第 3 回補足

連続極限

1 次元の剛体を幅 Δx ごとに N 分割し、i 番目の微小部分の質量を Δm_i とする（図 A.4）。$x_i = i\Delta x$ を図 A.4 のように剛体の端が $x = 0$ になるように座標をとった場合の i 番目の質点の位置座標とする。剛体の密度が一様と限らない場合、Δm_i は i ごとに異なる値でも良い。Δx が十分小さければ質点系とみなせるので、全質量 M と重心座標 X は、式 (33) より

$$M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i, \quad X = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i x_i \tag{A.31}$$

で与えられる。

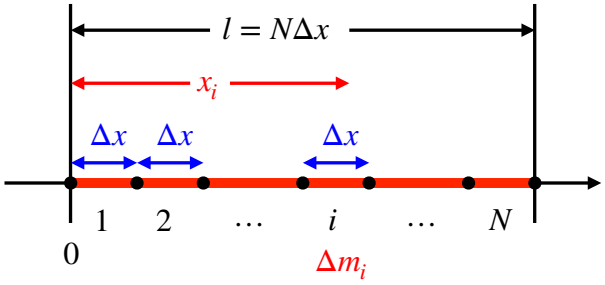

図 A.4: 1 次元剛体の連続極限。

$\Delta x \to 0$ の極限を考えるが、全体の長さ $l = N\Delta x$ を一定に保つためには同時に $N = l/\Delta x \to \infty$ とする必要がある（刻み幅を小さくするにつれ分割数を増やす）。質量の式を

$$M = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{\Delta x} \Delta x \tag{A.32}$$

と変形し、積分の定義

$$\int dx\ f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i} f(x_i) \Delta x \tag{A.33}$$

と比較すると、全質量 M は $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta m_i / \Delta x$ を x で積分したものに対応することがわかる。この量は位置 x での剛体の線密度

$$\lambda(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta x} \tag{A.34}$$

に対応する。$\Delta m_i / \Delta x$ は長さ Δx あたりの質量 Δm_i なので、i 番目の微小区間の平均線密度に対応するので、$\Delta x \to 0$ の極限で位置 x での線密度 $\lambda(x)$ になる。i 番目の微小区間という番号の情報が連続変数 x になっていることに注意。これより

$$M = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{\Delta x} \Delta x \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int dx\ \lambda(x) \tag{A.35}$$

同様に重心の座標は

$$X = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i x_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta x \frac{\Delta m_i}{\Delta x} x_i \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int dx\ x\lambda(x) \tag{A.36}$$

となる。$x_i = i\Delta x$ は i 番目の質点の位置座標なので、$\Delta x \to 0$ の極限では x になる。

空間 3 次元の場合は、剛体を微小体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ごとに分割し、番号をつけ、i 番目の微小部分の質量を Δm_i とする。位置座標などがベクトルになることに注意すると、全質量は

$$M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{\Delta V} \Delta V \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int dV\ \rho(\boldsymbol{r}), \quad \rho(\boldsymbol{r}) \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V} \tag{A.37}$$

となる。このときの密度は体積密度 $\rho(\boldsymbol{r})$k、積分は体積積分であることに注意。重心座標は

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M} \sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i = \frac{1}{M} \sum_i \frac{\Delta m_i}{\Delta V} \boldsymbol{r}_i \Delta V \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{1}{M} \int \rho(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{r}\ dV \tag{A.38}$$

となる。重積分の説明は以下の説明も参照。

偶関数と奇関数

x の関数が以下の性質を満たすとき、$f_{偶}(x)$ は偶関数、$f_{奇}(x)$ は奇関数と呼ばれる。

$$f_{偶}(-x) = f_{偶}(x) \tag{A.39}$$

$$f_{奇}(-x) = -f_{奇}(x) \tag{A.40}$$

例えば $f(x) = x^n$ は、n が偶数のとき偶関数、奇数のとき奇関数。また、$f_{偶}(x)$、$g_{偶}(x)$ が偶関数、$f_{奇}(x)$、$g_{奇}(x)$ が奇関数のとき

$f_{偶}(x)g_{偶}(x)$: 偶関数
$f_{奇}(x)g_{奇}(x)$: 偶関数
$f_{偶}(x)g_{奇}(x)$: 奇関数

が成り立つ（$-x$ を代入すれば確認できる)。どちらでもない関数 (例えば $f_{偶}(x) + g_{奇}(x)$) もあることに注意。積分区間が $x = 0$ について**対称**なとき、

$$\int_{-a}^{a} dx f_{偶}(x) = 2\int_{0}^{a} dx f_{偶}(x), \quad \int_{-a}^{a} dx f_{奇}(x) = 0 \tag{A.41}$$

となる（図 A.5 参照)。これらの性質により計算が簡単になり、間違いを減らすことにもつながる。

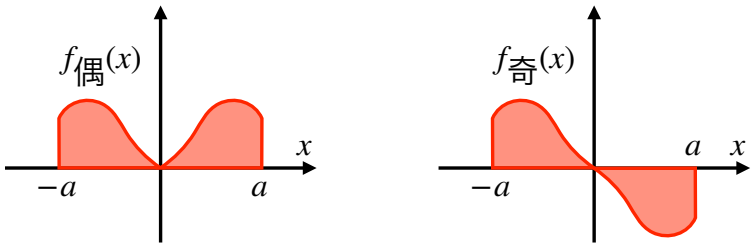

図 A.5: 対称区間（$x = -a$ から a まで）の偶関数（左）、奇関数（右）の積分。

重積分

複数の変数に依存する多変数関数の積分を重積分という。定義は、2 変数の場合

$$\int dx \int dy f(x,y) = \iint f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x \Delta y$$

意味：点 (x_i, y_j) での底面積 $\Delta x \Delta y$、高さ $f(x_i, y_j)$ の直方体の体積を範囲内で全て足す（図 A.6 左）
使い方：**積分する変数以外は定数**とみなして一変数ずつ順番に積分

$$\begin{aligned}
\int_0^a dx \int_0^b dy(Ax^2y + Bx + C) &= \int_0^a dx \left[Ax^2 \frac{y^2}{2} + (Bx + C)y \right]_{y=0}^{b} \\
&= \int_0^a dx \left(\frac{Ab^2}{2}x^2 + Bbx + Cb \right) \\
&= \left[\frac{Ab^2}{2}\frac{x^3}{3} + Bb\frac{x^2}{2} + Cbx \right]_{x=0}^{a} \\
&= \frac{Aa^3b^2}{6} + \frac{Ba^2b}{2} + Cab
\end{aligned} \tag{A.42}$$

逆の順番で積分しても結果は同じ（定義が和なので順番を交換できる）

$$\begin{aligned}
\int_0^b dy \int_0^a dx(Ax^2y + Bx + C) &= \int_0^b dy \left[A\frac{x^3}{3}y + B\frac{x^2}{2} + C \right]_{x=0}^{a} \\
&= \int_0^b dy \left(A\frac{a^3}{3}y + B\frac{a^2}{2} + C \right) \\
&= \left[A\frac{a^3}{3}\frac{y^2}{2} + \left(B\frac{a^2}{2} + C \right) y \right]_{y=0}^{b} \\
&= \frac{Aa^3b^2}{6} + \frac{Ba^2b}{2} + Cab
\end{aligned}$$

ただし**積分範囲が別の積分変数を含む場合**は先に積分を行う。式 (A.42) の積分範囲（図 A.6 中）の y の上限は常に b だが、式 (A.43)（図 A.6 右）では x の値ごとに上限が変わるため。

$$\begin{aligned}
\int_0^a dx \int_0^x dy(Ax^2y + Bx + C) &= \int_0^a dx \left[Ax^2 \frac{y^2}{2} + (Bx + C)y \right]_{y=0}^{x} \\
&= \int_0^a dx \left(\frac{A}{2}x^4 + Bx^2 + Cx \right)
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{A}{2}\frac{x^5}{5} + B\frac{x^3}{3} + C\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{a}$$
$$= \frac{Aa^5}{10} + \frac{Ba^3}{3} + \frac{Ca^2}{2} \tag{A.43}$$

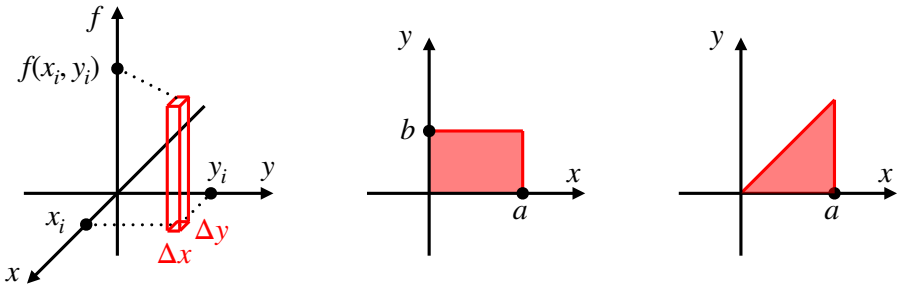

図 A.6: 左：重積分の定義、中：式 (A.42) の積分範囲、右：式 (A.43) の積分範囲。

極座標による半円板の重心

2 次元極座標は（図 A.7）

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{A.44}$$

と座標を (x, y) の代わりに (r, θ) で表す。直交座標での 2 次元の積分（面積分）は

$$\int dS\ f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ f(x,y) \tag{A.45}$$

であり、極座標での積分は

$$\int dS\ f(r,\theta) = \int_{0}^{\infty} dr \int_{0}^{2\pi} d\theta\ r\ f(r,\theta) \tag{A.46}$$

ここで微小面積要素は

$$dS = dxdy = rdrd\theta \tag{A.47}$$

で、r は変数変換のヤコビアンである。

図 6 の x, y 平面を 2 次元極座標であらわすと、剛体の範囲のみで積分を行うには、積分範囲を

$$0 \le r \le a, \quad 0 \le \theta \le \pi \tag{A.48}$$

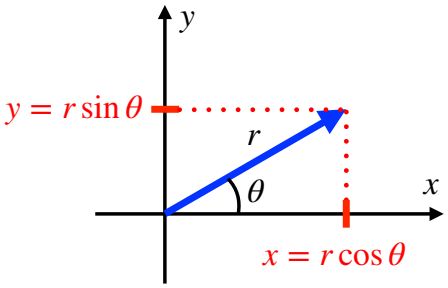

図 A.7: 2 次元極座標。

とすれば良いことがわかる。よって重心座標は、式 (A.44) を用いて

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{M}\int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \; r \; \sigma x \\
&= \frac{1}{M}\int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \; r \; \sigma r\cos\theta \\
&= \frac{\sigma}{M}\int_0^a dr \; r^2 \int_0^\pi d\theta \cos\theta \\
&= \frac{\sigma}{M}\int_0^a dr \; r^2 \Big[\sin\theta\Big]_0^\pi \\
&= \frac{\sigma}{M}\int_0^a dr \; r^2(0-0) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{A.49}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{M}\int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \; r \; \sigma y \\
&= \frac{1}{M}\int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \; r \; \sigma r\sin\theta \\
&= \frac{\sigma}{M}\int_0^a dr \; r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \\
&= \frac{\sigma}{\pi a^2\sigma/2}\int_0^a dr \; r^2 \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi a^2}\int_0^a dr \; r^2[-(-1)-1)] \\
&= \frac{4}{\pi a^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a \\
&= \frac{4a}{3\pi}
\end{aligned}
\tag{A.50}
$$

となり、式 (92) と一致する。

合力の作用点

合力の作用点 $\boldsymbol{r}$ が定義できる条件を考える。i の和が 2 のとき（剛体にはたらく力が 2 つのとき）

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{A.51}$$

$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \tag{A.52}$$

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2 \tag{A.53}$$

このとき式 (A.52) が式 (A.53) のようにかけるためには $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ が平行、つまり $\boldsymbol{F}_1 = a\boldsymbol{F}_2$（$a$ は定数）という条件が必要である。実際この場合、式 (A.52) は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\
&= \boldsymbol{r}_1 \times a\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\
&= a\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\
&= (a\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_2 \\
&= \frac{(a\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)}{a+1} \times (a+1)\boldsymbol{F}_2 \quad \text{（以下は } a \neq -1 \text{ の場合のみ成立）} \\
&= \frac{(a\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)}{a+1} \times (a\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_2) \\
&= \frac{(a\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)}{a+1} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) \\
&= \frac{(a\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)}{a+1} \times \boldsymbol{F}
\end{aligned} \tag{A.54}$$

となるので、

$$\boldsymbol{r} = \frac{(a\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)}{a+1} \quad (a \neq -1) \tag{A.55}$$

とすれば式 (A.53) の形でかける。式変形の途中で $a \neq -1$ の条件が必要であることに注意。実際式 (A.55) では分母が 0 になるため $a = -1$ とできない。$a = -1$ は本文で説明した偶力の場合（$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$）に対応する。

はたらく力が 3 以上の場合でも、全ての力が平行である場合（全ての $i > 1$ で $\boldsymbol{F}_1 = a_i \boldsymbol{F}_i$ とかける場合）、合力の作用点 $\boldsymbol{r}$ が定義できる。第 4 回の重力の場合がこれに相当する。ただし例外は合力が 0 になる場合（$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$）で、この場合は合力の作用点は定義できない（2 つの力の偶力の一般化）。