4　剛体のつり合いと回転

4.1　つり合いと保存則

- 力のつり合いと力のモーメントのつり合い

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \tag{101}$$

$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{0} \tag{102}$$

このとき全運動量 $\boldsymbol{P}$ と全角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存する

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \quad \leftarrow (43), (93) \tag{103}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \quad \leftarrow (95) \tag{104}$$

(103)→ 重心が等速直線運動、最初静止している場合は常に静止
(104)→ 等速回転運動、最初回転していない場合は常に回転しない

- 式 (101) と (102) の**両方が成立**しているとき、$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{0}$ は座標原点に依らない
座標原点を $\boldsymbol{a}$ 平行移動すると、各力の作用点は $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{a}$
移動後の座標での角運動量 $\boldsymbol{L}'$ の時間変化は

$$\dot{\boldsymbol{L}}' = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i - \sum_i \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}_i \tag{105}$$

第 1 項はもとの座標系での力のモーメント $\boldsymbol{N}$ なので式 (102) より $\boldsymbol{0}$、第 2 項は

$$\sum_i \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{a} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \quad (101) \tag{106}$$

より $\boldsymbol{0}$、よって任意の $\boldsymbol{a}$ で $\dot{\boldsymbol{L}}' = \boldsymbol{0}$ が従う
⇒ 力のモーメントのつり合いを考える際に、座標原点は自由に選んで良い

4.2　剛体にはたらく重力

- 密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の剛体全体に重力（z 方向、重力加速度 g）がかかっている場合
- 位置 $\boldsymbol{r}$ にある微小体積 dV の質量 dm

$$dm = \rho(\boldsymbol{r}) dV \tag{107}$$

- 微小体積にはたらく重力 $d\boldsymbol{F}$

$$d\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -dmg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g\rho(\boldsymbol{r}) dV \end{pmatrix} \tag{108}$$

全ての微小体積にはたらく重力の合力

$$\boldsymbol{F} = \int d\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \displaystyle\int \rho(\boldsymbol{r}) dV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Mg \end{pmatrix} \quad \leftarrow (86) \tag{109}$$

- 微小体積にはたらく力のモーメント

$$d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g\rho(\boldsymbol{r})dV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yg\rho(\boldsymbol{r})dV & xg\rho(\boldsymbol{r})dV & 0 \end{pmatrix} \tag{110}$$

全ての微小体積にはたらく力のモーメントの和

$$\boldsymbol{N} = \int d\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} -\int yg\rho(\boldsymbol{r})dV & \int xg\rho(\boldsymbol{r})dV & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -MgY & MgX & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow (86) \tag{111}$$

- 全ての微小体積にはたらく重力は平行で合力が $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0} \rightarrow$ 合力の作用点 $\boldsymbol{r}_{合}$ が定義できる $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_{合} \times \boldsymbol{F}$ より

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_{合} \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} x_{合} & y_{合} & z_{合} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Mgy_{合} & Mgx_{合} & 0 \end{pmatrix} \tag{112}$$

式 (111) と比較して $x_{合} = X$、$y_{合} = Y$、$z_{合}$ は任意なので Z にとると

$$\boldsymbol{r}_{合} = \boldsymbol{R} \tag{113}$$

つまり**合力の作用点は重心 $\boldsymbol{R}$**

- 座標原点を重心にとる（$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$）と $\boldsymbol{r}_{合} = \boldsymbol{0}$ となるので $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$、つまり重力による力のモーメントが消える点が重心座標である。重心を支えれば剛体が回転しないことを表している。

4.3 斜めにたてかけた棒

- 質量 M、長さ l の一様な密度を持つ棒を角度 θ（$0 < \theta < \pi/2$）で壁にたてかける（図 8）

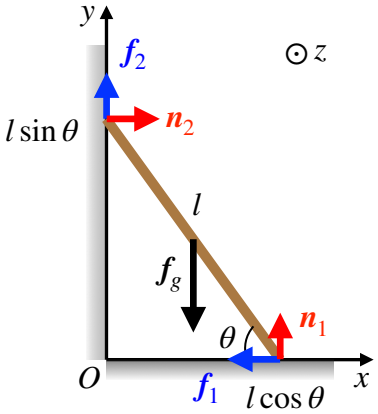


図 8: 斜めにたてかけた棒。

- 地面との接地点 $\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} l\cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に垂直抗力 $\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$ と摩擦力 $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -f_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 静止摩擦係数を μ_1 とする

- 壁との接地点 $\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 & l\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ に垂直抗力 $\boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} n_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と摩擦力 $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & f_2 & 0 \end{pmatrix}$
  静止摩擦係数を μ_2 とする
- 重力の作用点は重心（補足参照）：$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} l\cos\theta/2 & l\sin\theta/2 & 0 \end{pmatrix}$ に $\boldsymbol{f}_g = \begin{pmatrix} 0 & -Mg & 0 \end{pmatrix}$
- 棒が滑らない最小の角度 θ_{m}、このとき壁と地面両方で最大静止摩擦力
- 未知数 5（$f_1,\ f_2,\ n_1,\ n_2,\ \theta_{\mathrm{m}}$）なので **5 つ条件**が必要
- 力のつり合い $\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_g = \boldsymbol{0}$ の x, y 成分：2 条件

$$x \text{ 成分：}\ n_2 - f_1 = 0 \tag{114}$$
$$y \text{ 成分：}\ -Mg + n_1 + f_2 = 0 \tag{115}$$

- 力のモーメントのつり合い（z 成分）1 条件

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{f}_1) = \begin{pmatrix} l\cos\theta_{\mathrm{m}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -f_1 & n_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_1 l\cos\theta_{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \tag{116}$$
$$\boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{f}_2) = \begin{pmatrix} 0 & l\sin\theta_{\mathrm{m}} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_2 & f_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n_2 l\sin\theta_{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \tag{117}$$
$$\boldsymbol{N}_g = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{f}_g = \begin{pmatrix} l\cos\theta_{\mathrm{m}}/2 & l\sin\theta_{\mathrm{m}}/2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -Mg & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Mgl\cos\theta_{\mathrm{m}}/2 \end{pmatrix} \tag{118}$$
$$\Rightarrow \quad (\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{N}_g)_z = n_1 l\cos\theta_{\mathrm{m}} - n_2 l\sin\theta_{\mathrm{m}} - Mgl\cos\theta_{\mathrm{m}}/2 = 0 \tag{119}$$

- 垂直抗力と摩擦力の関係（壁、地面）2 条件

$$f_1 = \mu_1 n_1 \tag{120}$$
$$f_2 = \mu_2 n_2 \tag{121}$$

- 以上より（補足参照）

$$\tan\theta_m = \frac{1}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2} \tag{122}$$

$\mu_2 = 0$（壁が摩擦なし）のとき、よく知られた結果に一致
$\mu_2 > 0$ の場合 $\mu_2 = 0$ に比べて最小角が減少 $\rightarrow$ 壁の摩擦によって倒れにくくなる
$\mu_2 > 1/\mu_1$ のとき、計算上 $\theta_m < 0$ となるが、これは式 (120) と (121) が同時に満たされない、つまり壁の摩擦が大きく $0 < \theta < \pi/2$ の任意の θ で棒が倒れないことを示している

4.4 垂直抗力の作用点

- 角度 θ の摩擦のある斜面上の質量 M の剛体（図）の**回転**を考える
- 重力 $\boldsymbol{f}_g$、垂直抗力 $\boldsymbol{n}$、摩擦力 $\boldsymbol{f}$、座標原点 O を重心にとる

- 重力 $\boldsymbol{f}_g$ の作用点は重心 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$
  $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{f}$ の作用点を $\boldsymbol{r}$ とすると、$\boldsymbol{r}$ は剛体と斜面の接地面のどこか
  $\Rightarrow \boldsymbol{r}$ を力のモーメントのつり合いで決める

- 剛体が斜面上で静止している場合
  力のつり合い：$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{f}$ の合力は重力 $\boldsymbol{f}_g$ と逆向きで同じ大きさ

$$\boldsymbol{f}_g + \boldsymbol{n} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n} + \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{f}_g \tag{123}$$

  力のモーメントのつり合い

$$\boldsymbol{0} \times \boldsymbol{f}_g + \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}_g = \boldsymbol{0} \tag{124}$$

  $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{f}$ の作用点 $\boldsymbol{r}$ は重心にはたらく重力 $\boldsymbol{f}_g$ の方向
  $\Rightarrow \boldsymbol{r}$ は**重心の鉛直下にある剛体の接地点**（図 9(a)）
  $\boldsymbol{r}$ が剛体外部になる場合（図 9(b)）、式 (123) と (124) を同時に満たせない $\Rightarrow$ 剛体は回転
  回転するかどうかは**剛体の形**（重心の位置と斜面との接地面の関係）で決まる

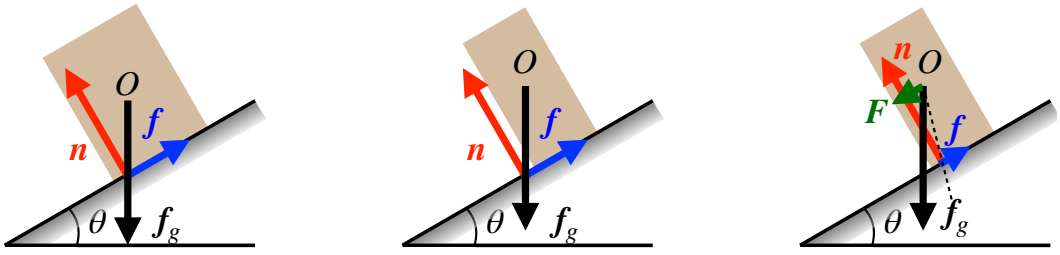
- 剛体が滑り落ちる場合
  合力 $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$ は斜面に平行に下向き
  力のつり合い

$$\boldsymbol{f}_g + \boldsymbol{n} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n} + \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{f}_g + \boldsymbol{F} \tag{125}$$

  力のモーメントのつり合い

$$\boldsymbol{0} \times \boldsymbol{f}_g + \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{f}_g - \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{0} \tag{126}$$

  作用点 $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{f}_g - \boldsymbol{F}$ の方向
  $\boldsymbol{F}$ が斜面下向きなので $\boldsymbol{f}_g - \boldsymbol{F}$ は鉛直下向きより斜面上方向を向く（図 9(c) の点線）
  $-\boldsymbol{F}$ の寄与で、静止していると回転する剛体が回転せずに滑り落ちる場合がある（図 9(c)）



(a) (b) (c)

図 9: 斜面上の剛体。