第 4 回補足

棒の重心の計算

棒の重心座標 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} l\cos\theta/2 & l\sin\theta/2 & 0 \end{pmatrix}$ を定義に従って計算する。棒の全質量は長さ × 線密度なので $M = \lambda l$ である。図 A.8 のように棒にそって媒介変数 s を導入し、壁との接地点を $s = 0$、地面との接地点を $s = l$ とすると、棒上の座標は $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\theta & l\sin\theta - s\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ とあらわされるので

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} &= \frac{1}{M}\int_0^l ds\ \lambda \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{M}\int_0^l ds\ \lambda \begin{pmatrix} s\cos\theta & l\sin\theta - s\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda l}\left(\cos\theta \int_0^l ds\ s \quad l\sin\theta \int_0^l ds - \sin\theta \int_0^l ds\ s \quad 0 \right) \\
&= \frac{1}{l}\left(\cos\theta \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^l \quad l\sin\theta [s]_0^l - \sin\theta \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^l \quad 0 \right) \\
&= \frac{1}{l}\left(\frac{l^2}{2}\cos\theta \quad \left[l^2 - \frac{l^2}{2}\right]\sin\theta \quad 0 \right) \\
&= \left(\frac{l}{2}\cos\theta \quad \frac{l}{2}\sin\theta \quad 0 \right)
\end{aligned}
$$

を得る。

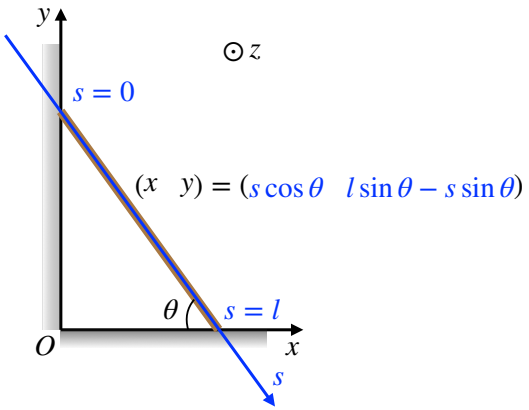

図 A.8: 媒介変数 s の定義。

式 (122) の計算

使える式は

$$
n_2 - f_1 = 0 \tag{A.56}
$$

$$-Mg + n_1 + f_2 = 0 \tag{A.57}$$

$$n_1 l\cos\theta_{\rm m} - n_2 l\sin\theta_{\rm m} - \frac{Mgl\cos\theta_{\rm m}}{2} = 0 \tag{A.58}$$

$$f_1 = \mu_1 n_1 \tag{A.59}$$

$$f_2 = \mu_2 n_2 \tag{A.60}$$

である。式 (A.59) を (A.56) に代入すると

$$\begin{aligned} n_2 - \mu_1 n_1 &= 0 \\ n_2 &= \mu_1 n_1 \end{aligned} \tag{A.61}$$

式 (A.59) を (A.56) に代入すると

$$\begin{aligned} -Mg + n_1 + \mu_2 n_2 &= 0 \\ Mg &= n_1 + \mu_2 n_2 \\ Mg &= n_1 + \mu_1\mu_2 n_1 \quad \leftarrow \text{(A.61)} \qquad (A.62) \\ Mg &= (1+\mu_1\mu_2) n_1 \qquad (A.63) \end{aligned}$$

式 (A.61) と (A.63) を (A.61) に代入すると

$$\begin{aligned} n_1 l\cos\theta_{\rm m} - \mu_1 n_1 l\sin\theta_{\rm m} - \frac{l\cos\theta_{\rm m}}{2}(1+\mu_1\mu_2) n_1 &= 0 \\ 2\cos\theta_{\rm m} - 2\mu_1\sin\theta_{\rm m} - \cos\theta_{\rm m}(1+\mu_1\mu_2) &= 0 \quad \leftarrow n_1 \neq 0, l \neq 0 \\ 2 - 2\mu_1\tan\theta_{\rm m} - 1 - \mu_1\mu_2 &= 0 \quad \leftarrow 0 < \theta_{\rm m} < \pi/2 \text{ より } \cos\theta_{\rm m} \neq 0 \\ 2\mu_1\tan\theta_{\rm m} &= 1 - \mu_1\mu_2 \\ \tan\theta_{\rm m} &= \frac{1}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2} \end{aligned} \tag{A.64}$$

と式 (122) を得る。