

5 剛体の角運動量

5.1 回転運動と慣性モーメント

- **角速度ベクトル** $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)$: 回転軸の向き、大きさ $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$ が角速度
回転角度（単位はラジアン、無次元）の時間変化、次元は T^{-1}
質点の位置ベクトルと速度の関係（力学I参照）

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (127)$$

一般に $\boldsymbol{\omega}$ は時間に依存するので $\boldsymbol{\omega}(t)$ （時間とともに回転速度、向きが変化）

- 以下**回転軸を z 軸に固定** : $\omega_z = |\boldsymbol{\omega}| = \omega$ で速度 $\dot{\mathbf{r}}$ は xy 平面内、

$$\boldsymbol{\omega} = (0 \ 0 \ \omega) \quad (128)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = (0 \ 0 \ \omega) \times (x \ y \ z) = (0 \cdot z - \omega y \ \omega x - 0 \cdot z \ 0) = \omega (-y \ x \ 0) \quad (129)$$

質点の角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の z 成分

$$L_z = (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}})_z = m\omega \left[(x \ y \ z) \times (-y \ x \ 0) \right]_z = m\omega(x^2 + y^2) \equiv m\omega r_\perp^2 \quad (130)$$

$\mathbf{r}_\perp = (x \ y \ 0)$ 、 $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ は回転軸からの距離（図 10）

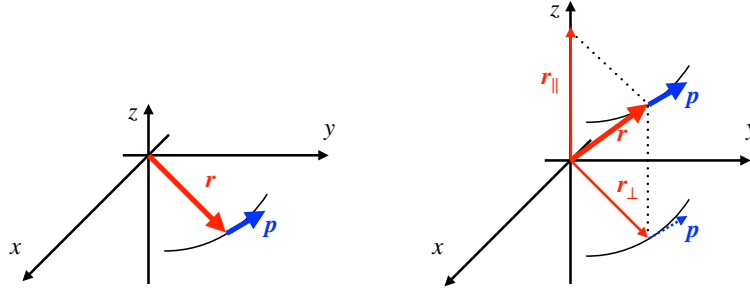


図 10: z 軸まわりの質点の回転運動。左: xy 平面内の運動、右: $z \neq 0$ の位置にある場合の運動。

- 密度 $\rho(\mathbf{r})$ の剛体の位置 $\mathbf{r}$ にある微小体積 dV による角運動量

$$dL_z = dm\omega r_\perp^2 = \rho(\mathbf{r})dV\omega r_\perp^2 \quad (131)$$

剛体が回転するとき、剛体の各部分での**角速度は共通**、 ω は $\mathbf{r}$ によらない（補足も参照）

剛体全体の角運動量 L_z

$$L_z = \int dL_z = \omega \int dV \rho(\mathbf{r}) r_\perp^2 \quad (132)$$

- **慣性モーメント** I : 角運動量と角速度の比例係数、次元は $L^2 M$ (§5.4 では $I = I_{zz}$)

$$L_z \equiv I\omega, \quad I = \int dV \rho(\mathbf{r}) r_\perp^2, \quad \left(\text{質点系の場合 } I = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 \right) \quad (133)$$

- 運動方程式を用いると

$$N_z = \frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} \quad (134)$$

同じ力のモーメントを与えた場合、 I が大きい方が角加速度 $d\omega/dt$ が小さい
 意味：回転運動に対する“質量”（剛体の回転させにくさ、回転の止めにくさ）
 ← 式の形が $F_z = M \frac{dv_z}{dt}$ と類似

- 回転の運動エネルギー：式 (129) を用いると

$$K = \frac{1}{2} \int dm \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{r}) \omega^2 [(-y)^2 + x^2] = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{r}) r_{\perp}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (135)$$

← 式の形が $K = \frac{1}{2} M v^2$ と類似

5.2 剛体の慣性モーメント

- 例 1) 位置 $\mathbf{r}_1 = (a \ 0 \ 0)$ に質量 m の質点、 $\mathbf{r}_2 = (a \ a \ a)$ に m の質点がある場合の z 軸まわりの慣性モーメント

$$I = \sum_{i=1}^2 m_i r_{\perp,i}^2 = m a^2 + m(a^2 + a^2) = 3m a^2 \quad (136)$$

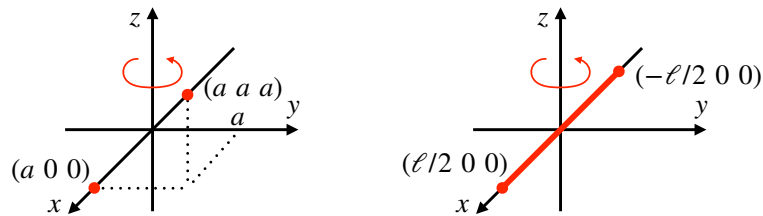


図 11: 質点系と剛体の慣性モーメント。左：例 1)、右：例 2)。

- 例 2) xy 平面内の一様線密度 λ_0 で長さ ℓ の棒の重心を通る z 軸まわりの慣性モーメント
 全質量 M は棒の長さ ℓ に線密度 λ_0 をかけたものなので $M = \lambda_0 \ell$
 棒に沿って x 軸をとり端点の座標を $(\ell/2 \ 0 \ 0)$ 、 $(-\ell/2 \ 0 \ 0)$ とすると、重心の x 座標は

$$R_x = \frac{1}{M} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx \lambda_0 x = \frac{\lambda_0}{M} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = 0 \quad (137)$$

よって原点が重心（棒の長さの半分の点）
 慣性モーメントは、回転軸からの距離 $r_{\perp}$ が x なので

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \lambda_0 x^2 dx = \lambda_0 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \lambda_0 \left[\frac{\ell^3}{24} - \left(-\frac{\ell^3}{24} \right) \right] = \frac{\lambda_0 \ell^3}{12} = \frac{M \ell^2}{12} \quad (138)$$

5.3 慣性モーメントの性質

- **平行軸の定理**：質量 M の剛体の重心を通る軸まわりの慣性モーメント I_G と、それと平行で距離 h 離れた軸まわりの慣性モーメント I_h の関係（図 12）

$$I_h = I_G + Mh^2 \quad (139)$$

$Mh^2 \geq 0$ より $I_h \geq I_G$ 、重心を中心とした回転が最も効率が良い（小さい力で速く回る）

- 証明：原点を重心にとった場合の z 軸まわりの慣性モーメント I_G

$$I_G = \int \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) dV \quad (140)$$

距離 h 離れた回転軸が通る座標を $\mathbf{h} = (h_x \ h_y \ 0)$ とすると $h^2 = h_x^2 + h_y^2$ 、新しい軸からみた位置 $\mathbf{r}_\perp = (x \ y \ 0)$ の点のベクトルは $\mathbf{r}_\perp - \mathbf{h} = (x - h_x \ y - h_y \ 0)$ となるので

$$\begin{aligned} I_h &= \int \rho(\mathbf{r}) [(x - h_x)^2 + (y - h_y)^2] dV \\ &= \int \rho(\mathbf{r}) (x^2 - 2xh_x + h_x^2 + y^2 - 2yh_y + h_y^2) dV \\ &= \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) dV}_{=I_G} - 2h_x \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}) x dV}_{=MR_x \leftarrow (86)} - 2h_y \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}) y dV}_{=MR_y \leftarrow (86)} + \underbrace{(h_x^2 + h_y^2)}_{=h^2} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}) dV}_{=M \leftarrow (81)} \end{aligned}$$

重心座標を原点にとったので $R_x = R_y = 0$ 、よって平行軸の定理 (139) を得る

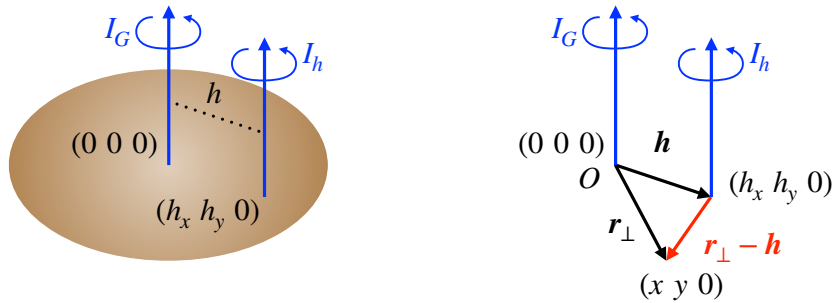


図 12: 平行軸の定理。

- **平板の定理**： xy 平面内の 2 次元の剛体の x, y, z 軸まわりの慣性モーメント I_x, I_y, I_z の関係

$$I_x + I_y = I_z \quad (141)$$

- 証明

$$I_x = \int \rho(\mathbf{r}) (y^2 + \underbrace{z^2}_{=0}) dV, \quad I_y = \int \rho(\mathbf{r}) (\underbrace{z^2}_{=0} + x^2) dV \quad (142)$$

$$I_z = \int \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) dV = I_x + I_y \quad (143)$$

ここで x 軸との距離 $r_\perp^2 = y^2 + z^2$ 、 y 軸との距離 $r_\perp^2 = x^2 + z^2$ を用いた

5.4 慣性モーメントテンソル

- 回転軸を z 軸に限らない場合： $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)$

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p} = \mathbf{r} \times (dm\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})dV [\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] \quad (144)$$

ベクトル解析の公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ (補足参照)

- 剛体全体の角運動量 $\mathbf{L}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int \rho(\mathbf{r})dV [\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] \\ L_x &= \int \rho(\mathbf{r})dV [(x^2 + y^2 + z^2)\omega_x - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)x] \\ &= \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2)dV}_{\equiv I_{xx}} \omega_x - \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})xydV}_{\equiv I_{xy}} \omega_y - \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})xz dV}_{\equiv I_{xz}} \omega_z \\ L_y &= - \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})yxdV}_{\equiv I_{yx}} \omega_x + \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})(x^2 + z^2)dV}_{\equiv I_{yy}} \omega_y - \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})yzdV}_{\equiv I_{yz}} \omega_z \\ L_z &= - \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})zxdV}_{\equiv I_{zx}} \omega_x - \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})zydV}_{\equiv I_{zy}} \omega_y + \underbrace{\int \rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2)dV}_{\equiv I_{zz}} \omega_z \end{aligned}$$

- 慣性モーメントテンソル $\hat{I}$ (補足参照)

$$\mathbf{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (145)$$

$$I_{ij} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \quad (146)$$

テンソル：各成分が変換に対して適切に変換されるもの

(スカラーは0階テンソル、ベクトルは1階テンソル、 $\hat{I}$ は2階テンソル)

対角項 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} ：各軸まわりの慣性モーメント

非対角項：慣性乗積、性質は

$$I_{xy} = - \int \rho(\mathbf{r})xydV = - \int \rho(\mathbf{r})yxdV = I_{yx}, \quad I_{yz} = I_{zy}, \quad I_{zx} = I_{xz} \quad (147)$$

慣性モーメントテンソルは実対称行列

- 慣性乗積がある場合、 $\mathbf{L}$ と $\boldsymbol{\omega}$ の向きが異なる
- 座標変換によって慣性乗積が消える座標系がいつでも取れる：主軸変換 (次回)