第5回補足

質点、質点系、剛体の角運動量と慣性モーメント

質量 m の質点が角運動量 ω で z 軸まわりを運動する場合の角運動量は、式 (130) より

$$L_z = m\omega r_{\perp}^2 \quad (\text{A.65})$$

慣性モーメントの定義 $L_z = I\omega$ より

$$I = mr_{\perp}^2 \quad (\text{A.66})$$

複数の質点が自由に運動する場合、 i 番目の質点の角運動量 $L_{z,i}$ は

$$L_{z,i} = m_i r_{\perp,i}^2 \omega_i \quad (\text{A.67})$$

ここで m_i 、 $r_{\perp,i}$ 、 ω_i は質点 i の質量、回転軸との距離、角速度である。質点が複数ある場合の質点系全体の角運動量 L_z は

$$L_z = \sum_i L_{z,i} = \sum_i (m_i r_{\perp,i}^2 \omega_i) \quad (\text{A.68})$$

であるが、質点の間の距離が固定されている場合、全ての質点は同じ角速度 ω を持つ：

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega \quad (\text{A.69})$$

このとき、

$$L_z = \sum_i (m_i r_{\perp,i}^2 \omega) = m_1 r_{\perp,1}^2 \omega + m_2 r_{\perp,2}^2 \omega + \dots = \left(\sum_i m_i r_{\perp,i}^2 \right) \omega \quad (\text{A.70})$$

と ω は和の外に出せる。ここで慣性モーメントの定義 $L_z = I\omega$ を用いると

$$I = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 \quad (\text{A.71})$$

を得る。同様に、剛体中の位置 $\mathbf{r}$ にある微小体積 $dV = dx dy dz$ について、この部分の質量は $\rho(\mathbf{r})dV$ なので、微小角運動量 dL_z は一般に

$$dL_z = \rho(\mathbf{r})dV r_{\perp}^2 \omega(\mathbf{r}) \quad (\text{A.72})$$

である。 $r_{\perp}$ は微小体積と回転軸との距離、 $\omega(\mathbf{r})$ は微小体積の角速度である。剛体全体の角運動量 L_z は

$$L_z = \int dL_z = \int dV [\rho(\mathbf{r})r_{\perp}^2 \omega(\mathbf{r})] \quad (\text{A.73})$$

であるが、剛体の各部分は同じ角速度 ω を持つ：

$$\omega(\mathbf{r}) = \omega \quad (\text{位置 } \mathbf{r} \text{ に依らず一定}) \quad (\text{A.74})$$

このとき、質点系の場合と同様に

$$L_z = \int dV [\rho(\mathbf{r})r_{\perp}^2] \omega \quad (\text{A.75})$$

と ω は積分の外に出せる。ここで慣性モーメントの定義 $L_z = I\omega$ を用いると

$$I = \int dV \rho(\mathbf{r})r_{\perp}^2 \quad (\text{A.76})$$

を得る。

ベクトルの公式

ベクトル3重積の公式の説明

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{A.77})$$

具体的な成分表示を用いると、

$$\begin{aligned} (\text{A.77}) \text{ 左辺} &= \begin{pmatrix} a_y(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_z - a_z(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_y \\ a_z(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_x - a_x(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_z \\ a_x(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_y - a_y(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) \\ a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x) \\ a_x(b_z c_x - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z \\ a_z b_y c_z - a_z b_z c_y - a_x b_x c_y + a_x b_y c_x \\ a_x b_z c_x - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_y b_y + a_z b_z) c_x \\ (a_x c_x + a_z c_z) b_y - (a_x b_x + a_z b_z) c_y \\ (a_x c_x + a_y c_y) b_z - (a_x b_x + a_y b_y) c_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_y c_y + a_z c_z) b_x + a_x b_x c_x - (a_y b_y + a_z b_z) c_x - a_x b_x c_x \\ (a_x c_x + a_z c_z) b_y + a_y b_y c_y - (a_x b_x + a_z b_z) c_y - a_y b_y c_y \\ (a_x c_x + a_y c_y) b_z + a_z b_z c_z - (a_x b_x + a_y b_y) c_z - a_z b_z c_z \end{pmatrix} \\ &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \\ &= (\text{A.77}) \text{ 右辺} \quad (\text{A.78}) \end{aligned}$$

と示せる。なお、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad (\text{A.79})$$

なので

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad (\text{A.80})$$

であることに注意（外積の順番によって結果が異なる）。

完全反対称テンソルを用いると

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_k &= \epsilon_{ijk} a_i (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_j \\ &= \epsilon_{ijk} a_i \epsilon_{lmj} b_l c_m \quad \leftarrow (\text{A.82}) \\ &= -\epsilon_{jik} \epsilon_{jlm} a_i b_l c_m \quad \leftarrow \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}, \epsilon_{lmj} = \epsilon_{jlm} \\ &= -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) a_i b_l c_m \\ &= -\delta_{il} \delta_{km} a_i b_l c_m + \delta_{im} \delta_{kl} a_i b_l c_m \\ &= -(\delta_{il} a_i b_l) c_k + (\delta_{im} a_i c_m) b_k \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) b_k - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) c_k \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

と示すことができる。ここで繰り返し添字は和をとる約束（アインシュタインの縮約）を採用し、 ϵ_{ijk} の反対称性、成分表示の内積および外積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j = \epsilon_{kij} a_i b_j \quad (\text{A.82})$$

および公式

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (\text{A.83})$$

を用いた。

式(146)の説明

$\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 、 $r_1 = x$ 、 $r_2 = y$ 、 $r_3 = z$ に注意して慣性モーメントテンソルの式(146)の各成分を具体的に書くと

$$I_{11} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{11} - r_1 r_1) = \int dV \rho(\mathbf{r}) [(x^2 + y^2 + z^2) - x^2] = \int \rho(\mathbf{r}) (y^2 + z^2) dV$$

$$I_{12} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{12} - r_1 r_2) = - \int \rho(\mathbf{r}) xy dV$$

$$I_{13} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{13} - r_1 r_3) = - \int \rho(\mathbf{r}) xz dV$$

$$I_{21} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{21} - r_2 r_1) = - \int \rho(\mathbf{r}) xy dV = I_{12}$$

$$I_{22} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{22} - r_2 r_2) = \int dV \rho(\mathbf{r}) [(x^2 + y^2 + z^2) - y^2] = \int \rho(\mathbf{r})(x^2 + z^2) dV$$

$$I_{23} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{23} - r_2 r_3) = - \int \rho(\mathbf{r}) yz dV$$

$$I_{31} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{31} - r_3 r_1) = - \int \rho(\mathbf{r}) xz dV = I_{13}$$

$$I_{32} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{32} - r_3 r_2) = - \int \rho(\mathbf{r}) yz dV = I_{23}$$

$$I_{33} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{33} - r_3 r_3) = \int dV \rho(\mathbf{r}) [(x^2 + y^2 + z^2) - z^2] = \int \rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2) dV$$

と上の定義の形を再現する。