6　主軸変換

6.1　目的

- 慣性モーメントテンソル

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{148}$$

実対称行列（$I_{ij} = I_{ji}$）で一般に非対角項（慣性乗積）を持つ

- 実対称行列の**固有値は実数**で、直交行列 $\hat{U}$ を用いて対角化できる（補足参照）

$$\hat{U}^{-1}\hat{I}\hat{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \tag{149}$$

λ_i：$\hat{I}$ の**固有値**、$\boldsymbol{v}_i$：対応する**規格化した固有ベクトル**

$$\hat{I}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \tag{150}$$

- **主軸**：$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ を軸とした座標系

$$\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{v}_1 + L_2\boldsymbol{v}_2 + L_3\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{v}_1 + \omega_2\boldsymbol{v}_2 + \omega_3\boldsymbol{v}_3 \tag{151}$$

$$\hat{I}\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{I}\boldsymbol{v}_1 + \omega_2\hat{I}\boldsymbol{v}_2 + \omega_3\hat{I}\boldsymbol{v}_3 = \omega_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \omega_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \omega_3\lambda_3\boldsymbol{v}_3 \tag{152}$$

なので $\boldsymbol{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}$ は

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{153}$$

主軸変換は対称性の良い軸への**座標変換**

6.2　座標変換の例

- 傾いた楕円のグラフ（図 13 左、計算は補足参照）

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 16 \tag{154}$$

変数変換

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \tag{155}$$

を行うと、xy のような項が消える（2 次形式の標準化）

$$2X^2 + 4Y^2 = 16 \tag{156}$$

- 逆変換：座標軸を $\pi/4$ 傾けることに対応（図 13 右のようになる）

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y \tag{157}$$

$$Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y \tag{158}$$

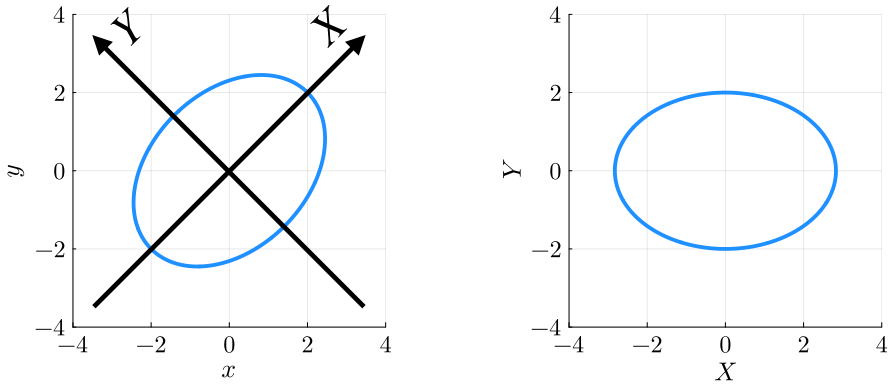

図 13: 楕円のグラフ。左）式 (154) と変換後の座標軸 X, Y、右）式 (156)。

- 行列を使った表現

$$\boldsymbol{r}^t \hat{A} \boldsymbol{r} = 16, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \tag{159}$$

$$\boldsymbol{R}^t \hat{B} \boldsymbol{R} = 16, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}^t = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \tag{160}$$

行列 $\hat{A}$ を対格化したものが $\hat{B}$（$\hat{U}$ は直交行列、$U^{-1} = U^t$）

$$\hat{B} = \hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}, \quad \boldsymbol{r} = \hat{U}^{-1}\boldsymbol{R}, \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{161}$$

6.3 行列の対角化

- 行列 $\hat{A}$ の対角化の手順
  - $0 = \det(\hat{A} - \lambda\hat{1})$ を解いて固有値 λ を求める
  - $(\hat{A} - \lambda\hat{1})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を用いて λ ごとに固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求める
- 例）演習問題 5 と同様に位置 $\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} a & a & a \end{pmatrix}$ に質量 m の質点がある場合の慣性モーメントテンソル

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} ma^2 \equiv \hat{A}ma^2, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{162}$$

- **固有値** λ（計算は補足参照）

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(\hat{A} - \lambda\hat{1}) \\
&= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (4-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1)
\end{aligned} \tag{163}
$$

三つの固有値を以下のように定義

$$
\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 5 \tag{164}
$$

- **固有ベクトル** $\boldsymbol{v}_i$

$$
(\hat{A} - \lambda_i\hat{1})\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \tag{165}
$$

より（定数 c_i は規格化で決定）

$$
\boldsymbol{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{166}
$$

- 固有ベクトルの直交性

$$
\boldsymbol{v}_1^t \boldsymbol{v}_2 = c_1 c_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 c_2(-2+1+1) = 0 \tag{167}
$$

他も同様で、異なる固有値を持つ固有ベクトルは直交する

$$
\boldsymbol{v}_i^t \boldsymbol{v}_j \propto \delta_{ij} \tag{168}
$$

- **規格化**

$$
1 = \boldsymbol{v}_1^2 = c_1^2(2^2 + 1^2 + 1^2) = 6c_1^2, \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{169}
$$

$c_1 = -1/\sqrt{6}$ も解だがこれは主軸の向きを逆向きにすることに対応するため、ここでは $c_1 > 0$ を採用する。同様に c_2、c_3 を求め、規格化した固有ベクトルは

$$
\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{170}
$$

- 変換行列

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{171}$$

転置行列が逆行列

$$\hat{U}^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \hat{U}^{-1} \tag{172}$$

対角化

$$\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{173}$$

6.4 回転の運動エネルギー

- 一般の回転軸の場合、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^2 &= (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) \\ &= \omega_i \omega_j \delta_{ij} \boldsymbol{r}^2 - \omega_i r_i \omega_j r_j \\ &= \omega_i \omega_j (\boldsymbol{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \end{aligned} \tag{174}$$

ベクトル解析の公式 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$（補足参照）

- 運動エネルギー（補足参照）

$$K = \frac{1}{2} \int dm\ \boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2} \omega_i \omega_j \underbrace{\int dV \rho(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j)}_{I_{ij}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \hat{I} \boldsymbol{\omega} \tag{175}$$

座標軸を主軸にとると

$$K = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 \tag{176}$$

軸固定（$I_{xx} = I_{yy} = 0$、$I_{zz} = I$、$\omega_z = \omega$）の場合：式 (135) に一致

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{177}$$