

第6回補足

実対称行列の性質

実対称行列 $\hat{I}$ は、成分が実数で与えられ、転置行列が自分自身である行列である：

$$\hat{I}^t = \hat{I}, \quad \hat{I}^* = \hat{I} \quad (\text{A.84})$$

ここでは $\hat{I}$ の固有値が実数であること、異なる固有値に属する固有ベクトルが直交すること、 $\hat{I}$ が直交行列 $\hat{U}$ を用いて対角化できることを示す。任意の有限次元 $n \times n$ 行列について以下は成立するが、必要に応じて 2×2 または 3×3 行列を念頭において考えると良い。

まず $\hat{I}$ の固有値が実数であることを示す³。固有値を λ 、対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると

$$\hat{I}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad (\text{A.85})$$

が成り立つ。両辺の転置複素共役をとると

$$\begin{aligned} [\hat{I}\boldsymbol{v}]^\dagger &= [\lambda\boldsymbol{v}]^\dagger \\ [\hat{I}^*\boldsymbol{v}^*]^t &= \lambda^*[\boldsymbol{v}^*]^t \\ [\hat{I}\boldsymbol{v}^*]^t &= \lambda^*[\boldsymbol{v}^*]^t \quad \leftarrow (\text{A.84}) \\ [\boldsymbol{v}^*]^t \hat{I}^t &= \lambda^*\boldsymbol{v}^\dagger \\ \boldsymbol{v}^\dagger \hat{I} &= \lambda^*\boldsymbol{v}^\dagger \quad \leftarrow (\text{A.84}) \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

ここで一般の行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積について

$$(\hat{A}\boldsymbol{x})^t = \boldsymbol{x}^t \hat{A}^t \quad (\text{A.87})$$

であることを用いた。式 (A.85) に左から $\boldsymbol{v}^\dagger$ 、式 (A.86) に右から $\boldsymbol{v}$ をかけて引き算すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^\dagger \hat{I}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^\dagger \hat{I}\boldsymbol{v} &= \lambda\boldsymbol{v}^\dagger\boldsymbol{v} - \lambda^*\boldsymbol{v}^\dagger\boldsymbol{v} \\ 0 &= (\lambda - \lambda^*)\boldsymbol{v}^\dagger\boldsymbol{v} \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

となる。 $\boldsymbol{v}^\dagger\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|^2$ が 0 になるのは $\boldsymbol{v}$ がゼロベクトルの場合のみで、これは固有ベクトルにならないため $\boldsymbol{v}^\dagger\boldsymbol{v} \neq 0$ 、よって

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda^* &= 0 \\ \lambda &= \lambda^* \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

³成分が実数ならば固有値が実数なのは当たり前のようにも思えるが、本文で説明したように、固有値を求める方程式は n 成分行列の場合 λ の n 次方程式になるため、解は一般に複素数になる。具体的に $n = 2$ の場合、固有値を求める方程式は λ の 2 次方程式であり、判別式が負になる場合、実数解は持たないが複素数の解を持つことがわかる。

となる。 λ に虚部があるとこれは満たされないため、 λ は実数である。 $\hat{I}$ の任意の固有値は式 (A.85) を満たすので、実対称行列の固有値は全て実数である。成分表示では（以下繰り返し添字は和をとる、「ベクトル、行列の成分表示」も参照）、式 (A.84) は

$$I_{ij} = I_{ji}, \quad I_{ij}^* = I_{ij} \quad (\text{A.90})$$

となる。式 (A.85) に左から $\mathbf{v}^\dagger$ をかけた式を成分表示すると

$$\mathbf{v}^\dagger \hat{I} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v} \quad (\text{A.91})$$

$$v_i^* I_{ij} v_j = \lambda v_i^* v_i \quad (\text{A.92})$$

とかける。成分表示では各成分はスカラー量なので順番を入れ替えても良いことに注意し、両辺の複素共役をとると、

$$\begin{aligned} [v_i^* I_{ij} v_j]^* &= [\lambda v_i^* v_i]^* \\ [v_i^*]^* I_{ij}^* v_j^* &= \lambda^* [v_i^*]^* v_i^* \\ v_i I_{ij} v_j^* &= \lambda^* v_i v_i^* \quad \leftarrow (\text{A.90}) \\ v_j^* I_{ji} v_i &= \lambda^* v_i^* v_i \quad \leftarrow (\text{A.90}) \\ \mathbf{v}^\dagger \hat{I} \mathbf{v} &= \lambda^* \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

ここで和をとる添字（ダミー添字）は組み合わせの位置を変えなければどの記号を用いて良いので

$$v_j^* I_{ji} v_i = v_a^* I_{ab} v_b = v_i^* I_{ij} v_j = \mathbf{v}^\dagger \hat{I} \mathbf{v} \quad (\text{A.94})$$

を用いた。式 (A.91) と比較すると、

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v} &= \mathbf{v}^\dagger \hat{I} \mathbf{v} = \lambda^* \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v} \\ \lambda &= \lambda^* \quad \leftarrow \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v} \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

と同じ結果が得られる。

次に、異なる固有値に属する固有ベクトルが直交することを示す。固有値 λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ とすると、

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 = 0 \quad (\text{A.96})$$

を示せば良い。 λ_1 の固有値方程式は

$$\hat{I} \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad (\text{A.97})$$

左から $\mathbf{v}_2^t$ をかけると

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^t \hat{I} \mathbf{v}_1 &= \lambda_1 \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2^t \hat{I}^t \mathbf{v}_1 &= \lambda_1 \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_1 \quad \leftarrow (\text{A.84}) \\ [\hat{I} \mathbf{v}_2]^t \mathbf{v}_1 &= \lambda_1 \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

ここで (A.87) を用いた。 $[\hat{I}\mathbf{v}_2]$ は1つの縦ベクトルであることに注意。また、内積の性質から

$$\mathbf{y}^t \mathbf{x} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \quad (\text{A.99})$$

であることを用いると、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^t [\hat{I}\mathbf{v}_2] &= \lambda_1 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1^t \hat{I}\mathbf{v}_2 &= \lambda_1 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.100})$$

となる。一方 λ_2 の固有値方程式に左から $\mathbf{v}_1^t$ をかけると

$$\mathbf{v}_1^t \hat{I}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \quad (\text{A.101})$$

であるので、引き算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^t \hat{I}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1^t \hat{I}\mathbf{v}_2 &= \lambda_2 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \\ 0 &= (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

となる。よって

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 = 0 \quad (\text{A.103})$$

が従う。成分表示では、 λ_1 の固有値方程式に $v_{2,i}$ をかけると⁴

$$\begin{aligned} v_{2,i} I_{ij} v_{1,j} &= \lambda_1 v_{2,i} v_{1,i} \\ v_{1,j} I_{ij} v_{2,i} &= \lambda_1 v_{1,i} v_{2,i} \\ v_{1,j} I_{ji} v_{2,i} &= \lambda_1 v_{1,i} v_{2,i} \quad \leftarrow (\text{A.90}) \\ v_{1,i} I_{ij} v_{2,j} &= \lambda_1 v_{1,i} v_{2,i} \quad \leftarrow (\text{ダミー添字の入れ替え}) \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

となる。なお、成分表示では内積の性質 (A.99) は

$$y_i x_i = x_i y_i \quad (\text{A.105})$$

と成分の順番の入れ替えで表現されている。これと λ_2 の固有値方程式に $v_{1,i}$ をかけたものを引き算すると

$$\begin{aligned} v_{1,i} I_{ij} v_{2,j} - v_{1,i} I_{ij} v_{2,j} &= \lambda_1 v_{1,i} v_{2,i} - \lambda_2 v_{1,i} v_{2,i} \\ 0 &= (\lambda_1 - \lambda_2) v_{1,i} v_{2,i} \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

となり $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき $v_{1,i} v_{2,i} = \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 = 0$ がいえる。

⁴ $v_{2,i}$ はベクトル $\mathbf{v}_2$ の i 成分 $[\mathbf{v}_2]_i$ のこと。以下同様。

最後に実対称行列 $\hat{I}$ が直交行列 $\hat{U}$ を用いて

$$\hat{U}^{-1}\hat{I}\hat{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.107})$$

と対角化できることを示す。直交行列は転置行列が逆行列になる行列であり

$$\hat{U}^t = \hat{U}^{-1}, \quad \hat{U}^t U = U \hat{U}^t = \hat{1} \quad (\text{A.108})$$

を満たす。異なる固有値に属する固有ベクトルが直交することがわかっているので、各固有ベクトルを規格化すれば

$$\mathbf{v}_i^t \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.109})$$

とすることができる（具体的には式(169)のようにする）。よって以下では固有ベクトルは式(A.109)のように規格化されているとする。ここで

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots \end{pmatrix} \quad (\text{A.110})$$

と固有ベクトルを並べた行列を用意すると、 $\hat{U}$ は対称行列になる。これは転置行列

$$\hat{U}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \mathbf{v}_2^t \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{A.111})$$

を利用すると

$$\begin{aligned} \hat{U}^t U &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \mathbf{v}_2^t \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 & \cdots \\ \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \hat{1} \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

として示せる。次に $\hat{I}\hat{U}$ を計算すると、 $\mathbf{v}_i$ が固有ベクトルであることを用いて

$$\hat{I}\hat{U} = \hat{I} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{I}\mathbf{v}_1 & \hat{I}\mathbf{v}_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots \end{pmatrix} \quad (\text{A.113})$$

の形になる。ここで λ_i はスカラー量であることに注意する。これに $\hat{U}^{-1} = U^t$ をかけると、

$$\begin{aligned} \hat{U}^{-1}\hat{I}\hat{U} &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \mathbf{v}_2^t \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1^t\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_1^t\mathbf{v}_2 & \cdots \\ \lambda_1\mathbf{v}_2^t\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2^t\mathbf{v}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\delta_{11} & \lambda_2\delta_{12} & \cdots \\ \lambda_1\delta_{21} & \lambda_2\delta_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

となる。以上より、実対称行列は直交行列を用いて対角化でき、対角成分は固有値となることがわかる。

§6.2 の計算

座標変換 (155) より

$$x^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right)^2 = \frac{1}{2}X^2 - XY + \frac{1}{2}Y^2 \quad (\text{A.115})$$

$$xy = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 \quad (\text{A.116})$$

$$y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right)^2 = \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 \quad (\text{A.117})$$

であるので、

$$\begin{aligned} &3x^2 - 2xy + 3y^2 \\ &= 3 \left(\frac{1}{2}X^2 - XY + \frac{1}{2}Y^2 \right) - 2 \left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 \right) + 3 \left(\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 \right) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \right) X^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \right) Y^2 \\ &= 2X^2 + 4Y^2 \end{aligned} \quad (\text{A.118})$$

と式 (156) を得る。

式 (155) より

$$x + y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}X = \frac{2}{\sqrt{2}}X = \sqrt{2}X \quad (\text{A.119})$$

$$x - y = -\frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{\sqrt{2}}Y = -\frac{2}{\sqrt{2}}Y = -\sqrt{2}Y \quad (\text{A.120})$$

なので

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \quad (\text{A.121})$$

$$Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \quad (\text{A.122})$$

が逆変換になる。

式 (159) のように $\hat{A}$ と $\mathbf{r}$ を定義した場合、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^t \hat{A} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x - y \\ -x + 3y \end{pmatrix} \\ &= 3x^2 - xy - xy + 3y^2 \\ &= 3x^2 - 2xy + 3y^2 \end{aligned} \quad (\text{A.123})$$

となり式 (154) と等価であることがわかる。同様に、式 (160) のように $\hat{B}$ と $\mathbf{R}$ を定義した場合、

$$\mathbf{R}^t \hat{B} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2X \\ 4Y \end{pmatrix} = 2X^2 + 4Y^2 \quad (\text{A.124})$$

となり式 (156) と等価であることがわかる。

上の計算は $\mathbf{r}^t \hat{A} \mathbf{r} = \mathbf{R}^t \hat{B} \mathbf{R}$ であることを示している。ここで、 $\hat{U} \hat{U}^{-1} = \hat{1}$ より、

$$\mathbf{r}^t \hat{A} \mathbf{r} = \mathbf{r}^t \hat{1} \hat{A} \hat{1} \mathbf{r} = \mathbf{r}^t \hat{U} \hat{U}^{-1} \hat{A} \hat{U} \hat{U}^{-1} \mathbf{r} \quad (\text{A.125})$$

である。このとき

$$\hat{B} = \hat{U}^{-1} \hat{A} \hat{U}, \quad \mathbf{r} = \hat{U}^{-1} \mathbf{R} \quad (\text{A.126})$$

と定義すると、 $\hat{U}$ が直交行列であることから

$$\hat{U}^t = \hat{U}^{-1}, \quad \hat{U} = (\hat{U}^{-1})^t \quad (\text{A.127})$$

であるので、

$$\mathbf{r}^t = \mathbf{r}^t (\hat{U}^{-1})^t = \mathbf{r}^t \hat{U} \quad (\text{A.128})$$

となり

$$\mathbf{r}^t \hat{A} \mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{r}^t \hat{U}}_{\mathbf{R}^t} \underbrace{\hat{U}^{-1} \hat{A} \hat{U}}_{=\hat{B}} \underbrace{\hat{U}^{-1} \mathbf{r}}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^t \hat{B} \mathbf{R} \quad (\text{A.129})$$

が確認できる。また、式 (A.126) より

$$\begin{aligned} \hat{U} \hat{U}^{-1} \mathbf{R} &= \hat{U} \mathbf{r} \\ \mathbf{R} &= \hat{U} \mathbf{r} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \hat{U} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

であるので、式 (157)、(158) と比較することで $\hat{U}$ の具体形は

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.131})$$

であることがわかる。また、式 (A.126) は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (\text{A.132})$$

であるので式 (155) と比較すると

$$\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.133})$$

となるが、確かに $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^t$ となっていることがわかる。

§6.3 の計算

演習問題 5 で質点の座標を $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} a & a & a \end{pmatrix}$ とすると、慣性モーメントは

$$I_{xx} = \sum_n m_n (y_n^2 + z_n^2) = m(0^2 + 0^2) + m(a^2 + a^2) = 2ma^2$$

$$I_{xy} = -\sum_n m_n x_n y_n = -m(\textcolor{red}{b} \cdot 0) - m(a \cdot a) = -ma^2$$

$$I_{xz} = -\sum_n m_n x_n z_n = -m(\textcolor{red}{b} \cdot 0) - m(a \cdot a) = -ma^2$$

$$I_{yx} = I_{xy} = -ma^2$$

$$\begin{aligned}
I_{yy} &= \sum_n m_n(x_n^2 + z_n^2) = m(\textcolor{red}{b}^2 + 0^2) + m(a^2 + a^2) = m(2a^2 + \textcolor{red}{b}^2) \\
I_{yz} &= -\sum_n m_n y_n z_n = -m(0 \cdot 0) - m(a \cdot a) = -ma^2 \\
I_{zx} &= I_{xz} = -ma^2 \\
I_{zy} &= I_{yz} = -ma^2 \\
I_{zz} &= \sum_n m_n(x_n^2 + y_n^2) = m(\textcolor{red}{b}^2 + 0^2) + m(a^2 + a^2) = m(2a^2 + \textcolor{red}{b}^2)
\end{aligned}$$

となるので、 $b = \sqrt{2}a$ のとき、慣性モーメントテンソルは

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} ma^2 \quad (\text{A.134})$$

となる。

固有値 λ が満たす式は

$$\begin{aligned}
0 &= \det(\hat{A} - \lambda \hat{1}) \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 4 - \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\
&= (4 - \lambda)^2(2 - \lambda) \underbrace{-1 - 1 - (2 - \lambda)}_{-(4 - \lambda)} - (4 - \lambda) - (4 - \lambda) \\
&= (4 - \lambda)^2(2 - \lambda) - 3(4 - \lambda) \\
&= (4 - \lambda)[(4 - \lambda)(2 - \lambda) - 3] \\
&= (4 - \lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3] \\
&= (4 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) \\
&= (4 - \lambda)(\lambda - 5)(\lambda - 1)
\end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

固有値は $\lambda = 1, 4, 5$ であるので、それぞれ

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 5 \quad (\text{A.136})$$

と定義する。

次に $\lambda = \lambda_1 = 1$ の固有ベクトル $\mathbf{v}_1$ を求める。 $\mathbf{v}_1$ は

$$\begin{aligned}
 (\hat{A} - \lambda_1 \hat{1})\mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 2-1 & -1 & -1 \\ -1 & 4-1 & -1 \\ -1 & -1 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} v_{1x} - v_{1y} - v_{1z} \\ -v_{1x} + 3v_{1y} - v_{1z} \\ -v_{1x} - v_{1y} + 3v_{1z} \end{pmatrix} = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{A.137}$$

を満たすので、

$$\begin{aligned}
 v_{1x} - v_{1y} - v_{1z} &= 0 \\
 v_{1x} &= v_{1y} + v_{1z}
 \end{aligned} \tag{A.138}$$

さらに

$$\begin{aligned}
 -v_{1x} + 3v_{1y} - v_{1z} &= 0 \\
 -(v_{1y} + v_{1z}) + 3v_{1y} - v_{1z} &= 0 \\
 2v_{1y} - 2v_{1z} &= 0 \\
 v_{1y} &= v_{1z}
 \end{aligned} \tag{A.139}$$

となる。また式 (A.138) に代入すると

$$v_{1x} = v_{1y} + v_{1y} = 2v_{1y} \tag{A.140}$$

となる。よって

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2v_{1y} \\ v_{1y} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = v_{1y} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.141}$$

とできる。式 (A.137) は v_{1x}, v_{1y}, v_{1z} に対する 3 本の式を与えるが、このうち独立なものは 2 本なので⁵、2 つの関係式のみが得られるため、 v_{1x}, v_{1y}, v_{1z} の全ては決定できず、1 つの変数（今の場合は v_{1y} ）で他 2 つを表現することになる。どのように変数を消去しても定数倍を除いて同じ答えになる。以下で見るように、 v_{1y} は規格化を用いて決定する。

⁵固有値に縮退がある場合は独立な式は 1 本になる。

同様に、 $\lambda = \lambda_2 = 4$ の固有ベクトル $\mathbf{v}_2$ は

$$\begin{aligned}
(\hat{A} - \lambda_2 \hat{1})\mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 2-4 & -1 & -1 \\ -1 & 4-4 & -1 \\ -1 & -1 & 4-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2v_{2x} - v_{2y} - v_{2z} \\ -v_{2x} - v_{2z} \\ -v_{2x} - v_{2y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{A.142}$$

を満たすので、

$$\begin{aligned}
-v_{2x} - v_{2z} &= 0 \\
v_{2z} &= -v_{2x}
\end{aligned} \tag{A.143}$$

さらに

$$\begin{aligned}
-v_{2x} - v_{2y} &= 0 \\
v_{2y} &= -v_{2x}
\end{aligned} \tag{A.144}$$

となる。よって

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -v_{2x} \\ v_{2x} \\ v_{2x} \end{pmatrix} = v_{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.145}$$

とできる。また、 $\lambda = \lambda_3 = 5$ の固有ベクトル $\mathbf{v}_3$ は

$$\begin{aligned}
(\hat{A} - \lambda_3 \hat{1})\mathbf{v}_3 &= \begin{pmatrix} 2-5 & -1 & -1 \\ -1 & 4-5 & -1 \\ -1 & -1 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3v_{3x} - v_{3y} - v_{3z} \\ -v_{3x} - v_{3y} - v_{3z} \\ -v_{3x} - v_{3y} - v_{3z} \end{pmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{A.146}$$

を満たすので、

$$\begin{aligned}
-3v_{3x} - v_{3y} - v_{3z} - (-v_{3x} - v_{3y} - v_{3z}) &= 0 - 0 \\
-2v_{3x} &= 0 \\
v_{3x} &= 0
\end{aligned} \tag{A.147}$$

さらに

$$\begin{aligned}
-v_{3x} - v_{3y} - v_{3z} &= 0 \\
-v_{3y} - v_{3z} &= 0 \\
v_{3y} &= -v_{3z}
\end{aligned} \tag{A.148}$$

となる。よって

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_{3z} \\ v_{3z} \end{pmatrix} = v_{3z} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.149}$$

とできる。以上より固有ベクトルが定数 c_i を用いて式 (166) のようにかけることがわかる。

異なる固有ベクトルの直交性は、 $\mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 = 0$ は式 (167) で示されており、残りは

$$\mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_3 = c_1 c_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 c_3 (0 - 1 + 1) = 0 \tag{A.150}$$

$$\mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_3 = c_2 c_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_2 c_3 (0 - 1 + 1) = 0 \tag{A.151}$$

であるので式 (168) が従う。

固有ベクトルの規格化は、 $\mathbf{v}_1$ については式 (169) で示されており、残りは

$$1 = \mathbf{v}_2^2 = c_2^2 [(-1)^2 + 1^2 + 1^2] = 3c_2^2, \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{A.152}$$

$$1 = \mathbf{v}_3^2 = c_3^2 (0 + 1^2 + 1^2) = 2c_3^2, \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{A.153}$$

c_1 と同様に正符号の解を採用する。よって規格化した固有ベクトルは式 (170) のようになる。

変換行列の逆行列が転置になることを確認するために、 $\hat{U}\hat{U}^t$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\hat{U}\hat{U}^t &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{6} + \frac{1}{3} & \frac{2}{6} - \frac{1}{3} & \frac{2}{6} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{6} - \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{2}{6} - \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.154}$$

と単位行列になることから $\hat{U}^t = \hat{U}^{-1}$ であることがわかる。行列 $\hat{A}$ の対角化は

$$\begin{aligned}
\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} & -\frac{8}{3\sqrt{2}} + \frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{5}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} & -\frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.155}$$

となる。

ベクトルの公式

スカラー 4 重積の公式の説明

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{A.156}$$

先にスカラー 3 重積の公式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.157})$$

を示す。具体的な成分表示を用いると、

$$\begin{aligned} (\text{A.157}) \text{ 左辺} &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \\ &= a_y b_z c_x - a_z b_y c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y + a_x b_y c_z - a_y b_x c_z \\ &= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x \end{aligned} \quad (\text{A.158})$$

である。 abc の順に並べて添字が xyz の偶置換 (yzx と zxy) の場合符号が $+$ 、奇置換 (xzy と yxz と zyx) の場合符号が $-$ であることに注意する。同様に計算すると

$$\begin{aligned} (\text{A.157}) \text{ 中辺} &= \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x = (\text{A.157}) \text{ 左辺} \end{aligned} \quad (\text{A.159})$$

$$\begin{aligned} (\text{A.157}) \text{ 右辺} &= \begin{pmatrix} c_y a_z - c_z a_y & c_z a_x - c_x a_z & c_x a_y - c_y a_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_z b_x c_y - a_y b_x c_z + a_x b_y c_z - a_z b_y c_x + a_y b_z c_x - a_x b_z c_y \\ &= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x \end{aligned} \quad (\text{A.160})$$

と式 (A.157) を得る。これより

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.161})$$

の $\mathbf{c}$ に $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ を代入すると

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] \cdot \mathbf{a} \\ &= [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}] \cdot \mathbf{a} \quad \leftarrow \text{ベクトル 3 重積の式 (A.77)} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (\text{A.162})$$

と式 (A.156) を得る。内積は順番を変えて良いこと、 $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$ など内積の結果はスカラーなので順番を変えて良いことに注意。

成分表示を用いると、スカラー 3 重積は

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k c_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad (\text{A.163})$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k a_k = \epsilon_{ijk} b_i c_j a_k = \epsilon_{kij} a_k b_i c_j = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad (\text{A.164})$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})_k b_k = \epsilon_{ijk} c_i a_j b_k = \epsilon_{jki} a_j b_k c_i = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad (\text{A.165})$$

となり全て等しいことがわかる。ここで $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$ （全て偶置換）と繰り返し添字は（和をとる組み合わせを保てば）どの記号を使っても良いことを用いた。スカラー4重積は

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_i \\
 &= \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} c_l d_m \\
 &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\
 &= \delta_{jl} a_j c_l \delta_{km} b_k d_m - \delta_{jm} a_j d_m \delta_{kl} b_k c_l \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})
 \end{aligned} \tag{A.166}$$

と得られる。ここで公式 (A.83) を用いた。

ベクトル、行列の成分表示

行列とベクトルの成分表示の説明。ここでは縦ベクトルと横ベクトルを区別する。3次元縦ベクトルの成分表示は

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{A.167}$$

と表され、転置は

$$\mathbf{a}^t = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \tag{A.168}$$

と横ベクトルになる。以上を利用すると、内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{a}^t \mathbf{b} = \mathbf{b}^t \mathbf{a} \tag{A.169}$$

のように書ける。また、成分を利用すると

$$\mathbf{a}^t \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_i b_i = a_i b_j \delta_{ij} \tag{A.170}$$

和記号の省略とクロネッカーのデルタ δ_{ij} を用いた。行列は

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{A.171}$$

なので行列とベクトルの積は

$$\hat{A} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3 \\ A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3 \\ A_{31}a_1 + A_{32}a_2 + A_{33}a_3 \end{pmatrix} \tag{A.172}$$

であるので、各成分に注目すると

$$[\hat{A}\mathbf{a}]_i = A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + A_{i3}a_3 = \sum_{j=1}^3 A_{ij}a_j = A_{ij}a_j \quad (\text{A.173})$$

以上より、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^t \hat{A} \mathbf{a} &= \mathbf{a}^t [\hat{A}\mathbf{a}] \\ &= a_i [\hat{A}\mathbf{a}]_i \quad \leftarrow (\text{A.170}) \\ &= a_i A_{ij} a_j \quad \leftarrow (\text{A.170}) \\ &= a_i a_j A_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.174})$$

であるので、

$$\omega_i \omega_j I_{ij} = \boldsymbol{\omega}^t \hat{I} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.175})$$

が成り立つ。