

7 剛体の運動（軸の向き一定）

7.1 剛体振り子（軸固定）

- 剛体振り子：固定された軸のまわりで運動する剛体（補足も参照）
 質量密度 $\rho(\mathbf{r})$ 、全質量 M 、軸まわりの慣性モーメント I
 水平方向を x 、鉛直方向を y 、水平な回転軸を z 方向、回転軸は座標原点を通る
 剛体には重力（ y 軸負の向き）のみが作用（重力加速度 g ）
- 回転の運動方程式（重心は回転と同じ）：

$$N_z = I\ddot{\theta} \quad (178)$$

θ は剛体の回転角度、つり合いの位置を $\theta = 0$ （このとき重心は y 軸上）

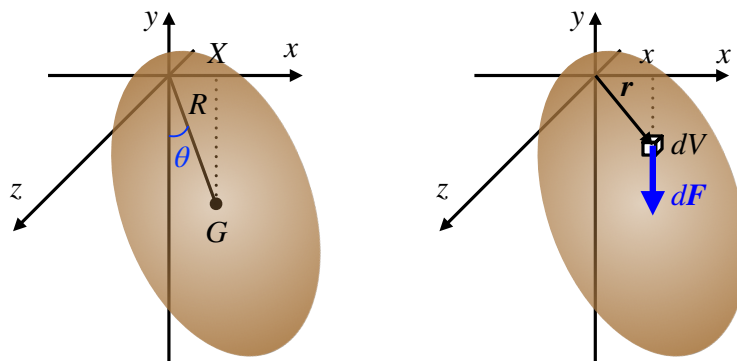


図 14: 剛体振り子。左：重心 G の回転角 θ 、右：位置 $\mathbf{r}$ にある微小体積 dV 。

- 位置 $\mathbf{r}$ にある微小体積 dV にはたらく重力 $d\mathbf{F}$

$$d\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -dmg & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho(\mathbf{r})dVg & 0 \end{pmatrix} \quad (179)$$

微小体積 dV による力のモーメントの z 成分 dN_z

$$dN_z = (\mathbf{r} \times d\mathbf{F})_z = x(-\rho(\mathbf{r})dVg) - y \cdot 0 = -\rho(\mathbf{r})dVgx \quad (180)$$

剛体全体の力のモーメント

$$N_z = \int dN_z = -g \int dV x \rho(\mathbf{r}) = -MgX \quad \leftarrow (86) \quad (181)$$

- 重心座標を $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$ と回転角 θ の関係

$$X = R \sin \theta, \quad Y = -R \cos \theta \quad (182)$$

力のモーメントは**全質量 M が重心にかかった場合の力のモーメント**と同じ

$$N_z = -MgR \sin \theta \quad (183)$$

- 運動方程式

$$\ddot{\theta} = -\frac{MRg}{I} \sin \theta \quad (184)$$

単振り子の式（補足 (A.178)）と比較すると、ひもの長さが

$$\ell = \frac{I}{MR} \quad (\text{相当単振り子の長さ}) \quad (185)$$

の単振り子の運動方程式と同じ

- **剛体振り子の周期**： θ が小さいとき（補足 (A.192)）

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{gMR}} \quad (186)$$

- 重心まわりの慣性モーメントを I_G とすると、平行軸の定理より $I = I_G + MR^2$ なので周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + MR^2}{gMR}} \quad (187)$$

$R \rightarrow 0$ （重心を回転軸にする）で $T \rightarrow \infty$ （振り子にならない）

軸の位置を調整すれば**長い周期が実現**できる（メトロノームの原理、補足参照）

- R に対して $\bar{R}$ の距離も同じ周期 T を与える（補足参照）

$$\bar{R} = \frac{I_G}{MR} \quad (188)$$

7.2 斜面上の剛体（軸が移動）

- 回転軸が固定されていない（ただし方向は変わらない）剛体の運動

- 角度 α の摩擦のある斜面上の剛体（図 15 左）

xy 面内の断面が半径 r の円である剛体（円柱など）

全質量 M 、重心（円の中心）まわりの慣性モーメント I

斜面に平行に下向きに x 軸、垂直に下向きに y 軸（ z 軸が手前向き）

剛体にはたらく力：重力、摩擦力 $-F$ （ x 軸負の向き）、垂直抗力

- 重心の運動方程式

$$M\ddot{X} = F_x \quad (189)$$

z （斜面横）方向に力のはたらかず、重力の y 成分と斜面の垂直抗力がつり合う $\rightarrow z, y$ 固定

x 方向の力 F_x は図 15 右より $F_x = Mg \sin \alpha - F$ なので

$$M\ddot{X} = Mg \sin \alpha - F \quad (190)$$

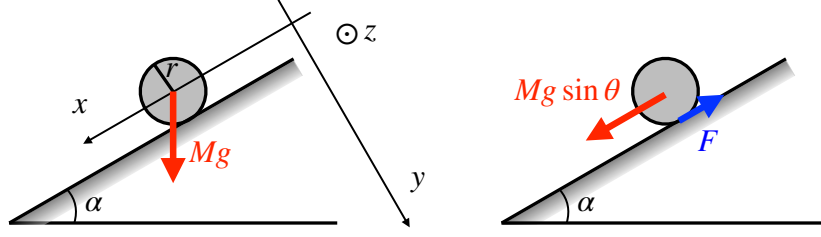


図 15: 左) 斜面上の剛体。右) 剛体にはたらく x 軸方向の力。

- 回転の運動方程式

$$I\dot{\omega} = N_z \quad (191)$$

z 軸は手前方向、転がり落ちる回転が $\omega > 0$ (z 軸正に対して右回り)

- 剛体にはたらく力のモーメント

重力の x 成分：回転軸からの距離が 0 でモーメントを与えない

摩擦力 F ：軸からの距離は半径 r 、 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{F}$ が直交するので $N_z = rF$ より

$$I\dot{\omega} = rF \quad \Rightarrow \quad F = \frac{I}{r}\dot{\omega} \quad (192)$$

- 重心運動の方程式 (190) から F を消去すると

$$M\ddot{X} = Mg \sin \alpha - \frac{I}{r}\dot{\omega} \quad (193)$$

未知関数は $X(t)$ と $\omega(t)$ (2 自由度)

7.3 剛体の運動

- 滑らずに転がり落ちる場合： $\dot{X}$ と ω が関係 (図 16)

- 速度 $\dot{X}$ の並進運動：重心の速度 $\dot{X}$ 、接地点の速度 $\dot{X}$
- 角速度 ω の回転運動：重心の速度 0、接地点の速度 $-r\omega$
- 角速度 ω で回転しながら滑らずに速度 $\dot{X}$ で運動：2 つの合成
重心の速度 $\dot{X}$ 、接地点が滑らない場合、接地点の速度は $\dot{X} - r\omega = 0$

$$\Rightarrow \dot{X} = r\omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{X} = r\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{1}{r}\ddot{X} \quad (194)$$

- 運動方程式 (193) は ω を消去すると

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= Mg \sin \alpha - \frac{I}{r^2}\ddot{X} \\ \frac{Mr^2 + I}{r^2}\ddot{X} &= Mg \sin \alpha \\ \ddot{X} &= \frac{Mr^2}{Mr^2 + I}g \sin \alpha \end{aligned} \quad (195)$$

等加速度運動、 $I = 0$ とすると摩擦のない場合に一致 (式 (190) で $F = 0$)

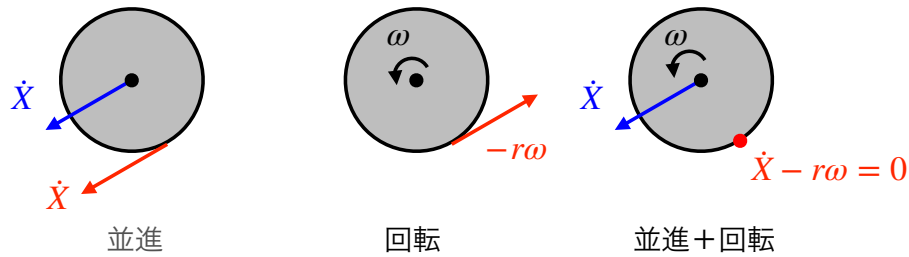


図 16: 並進（左）、回転（中）、転がり落ちる（右）運動の重心と接地点の速度。

- 摩擦なしと比べると、加速度が

$$g \sin \alpha \rightarrow \frac{Mr^2}{Mr^2 + I} g \sin \alpha \quad (196)$$

と変化、分母の方が大きいので、摩擦ありの方が加速度は小さくなる

⇐ **回転運動にエネルギーが取られる**

慣性モーメント I が大きい（回転しにくい）剛体ほど加速度がより減少する

7.4 力学的エネルギーの保存

- 運動方程式 (193) より、**力学的エネルギー** E が保存（補足参照）

$$E = \underbrace{\frac{M\dot{X}^2}{2}}_{\text{重心運動}} + \underbrace{\frac{I\omega^2}{2}}_{\text{回転}} - \underbrace{Mg \sin \alpha X}_{\text{位置エネルギー}}, \quad \frac{dE}{dt} = 0 \quad (197)$$

力の方向に変位がないので摩擦は仕事をせず、力学的エネルギーが保存する

- 滑らない条件 $\dot{X} = r\omega$ を用いると

$$\frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{I\dot{X}^2}{2r^2} = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{r^2} \right) \dot{X}^2 = \frac{M\dot{X}^2}{2} \frac{Mr^2 + I}{Mr^2} \quad (198)$$

- $t = 0$ で $X = 0$ 、 $\dot{X} = 0$ 、 $\omega = 0$ （初期位置を 0、初速 0 で回転していない）とすると $E = 0$

- 時刻 t では（補足参照）

$$\frac{M\dot{X}^2}{2} = \frac{Mr^2}{Mr^2 + I} Mg \sin \alpha X, \quad \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I}{Mr^2 + I} Mg \sin \alpha X \quad (199)$$

位置エネルギー $Mg \sin \alpha X$ を**重心運動と回転運動に分配**

I が大きいほど回転運動に多く分配され、重心運動に使えるエネルギーが減る

- 力学的エネルギー保存の結果は斜面の角度、形状によらない