

第7回補足

単振り子と単振動

通常の運動方程式を用いる場合：図 A.9 のように長さ ℓ の（重さのない）ひもの先に質量 m の質点がついた単振り子を考える。一般の質点の運動方程式（3 自由度）は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (\text{A.176})$$

z 方向を $z(t) = 0$ と固定して平面内の振り子の運動を考えれば 2 次元運動になる。振り子の端点を原点、水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとると、位置座標はデカルト座標 $(x \ y)$ または極座標 $(r \ \theta)$ で表すことができる。ただしこの場合の極座標は、振り子の端点からの距離を r 、鉛直下向きからの角度を θ としているので、通常と異なり

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.177})$$

である。ひもがゆるまない運動を考えると極座標の r が $r(t) = \ell$ と固定されて θ のみの 1 次元の問題になる。 θ に関する軌道上の（長さの次元の）座標は $s = \ell\theta$ であり、 s は鉛直下向きの位置からの変位に対応する（ $\theta > 0$ の向きが $s > 0$ ）。質点にはたらく力は

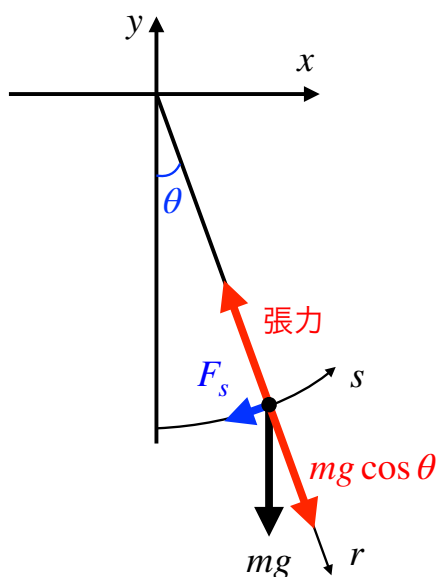


図 A.9: 単振り子の座標とはたらく力。

- 重力：鉛直下向きに mg (g ：重力加速度)
- ひもの張力： r 負方向、重力の r 方向成分 $mg \cos \theta$ とつり合う
- 重力の s (θ) 方向成分： $F_s = -mg \sin \theta$
符号は力の向き、 $s > 0$ のときに s が減る方向の力

であるので、変位 s に関する運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_s \\ m \frac{d^2(\ell\theta)}{dt^2} &= -mg \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell} \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.178})$$

となる。

回転の運動方程式を用いる場合：位置 $\mathbf{r}$ にある質点にはたらく重力 $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -mg & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.179})$$

力のモーメントの z 成分 N_z は

$$N_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z = x(-mg) - y \cdot 0 = -mgx \quad (\text{A.180})$$

ここで式 (A.177) と軌道上では $r(t) = \ell$ に固定されていることを用いると

$$N_z = -mg\ell \sin \theta \quad (\text{A.181})$$

回転の運動方程式 (134) より

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= I\dot{\omega} = N_z = -mg\ell \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{mg\ell}{I} \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.182})$$

1 質点の慣性モーメントは式 (A.66) より

$$I = mr_{\perp}^2 = m\ell^2 \quad (\text{A.183})$$

であるので、

$$\ddot{\theta} = -\frac{mg\ell}{m\ell^2} \sin \theta = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (\text{A.184})$$

と式 (A.178) と同じになる。回転の運動方程式 $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ は通常運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ とから導出されたので、回転運動の場合は両者は同じ式を与える。

振動 (θ) が小さいとき

$$\sin \theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \simeq \theta \quad (\text{A.185})$$

と近似すると、運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta \quad (\text{A.186})$$

と単振動の微分方程式になる。一般に、単振動の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (\text{A.187})$$

の一般解は、 A, B を定数として $x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ 、あるいは C, ϕ を定数として

$$x(t) = C \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{A.188})$$

である（2階の微分方程式の一般解は積分定数2つ、三角関数は2回微分したら自分自身に戻ることで確認）。また、時刻 $t + 2\pi/\omega$ の位置は

$$\begin{aligned} x(t + 2\pi/\omega) &= C \sin \left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \phi \right] \\ &= C \sin(\omega t + \phi + 2\pi) \\ &= C \sin(\omega t + \phi) \\ &= x(t) \end{aligned} \quad (\text{A.189})$$

と時刻 t と同じ位置になるので、振動の周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{A.190})$$

振り子の微分方程式 (A.186) の解と周期 T は $\omega^2 = g/\ell$ とすれば

$$\theta(t) = C \sin \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t + \phi \right) \quad (C, \phi \text{ 定数}) \quad (\text{A.191})$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (\text{A.192})$$

周期はひもの長さ ℓ のみで決まり（等時性）、ひもの長さ ℓ が長いと周期が長い。

メトロノームの原理

メトロノームは可動おもりの位置を変えると周期が変化する装置である（HPの動画参照）。可動おもりが遠い方が周期が長くなる。図 A.10 のように、重さのない棒に2つのおもりをつけたモデルでメトロノームを考える。棒に沿って x 軸をとり、回転軸が $x = 0$ となるように座標を設定する。位置 $x > 0$ に質量 m_1 の可動おもり、 $x = -a < 0$ に質量 m_2 の固定おもりがあるとする。

原点まわりの慣性モーメント I は

$$I = m_1 x^2 + m_2 (-a)^2 = m_1 x^2 + m_2 a^2 \quad (\text{A.193})$$

重心の x 座標は

$$X = \frac{m_1 x + m_2 (-a)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x - m_2 a}{M} \quad (M = m_1 + m_2) \quad (\text{A.194})$$

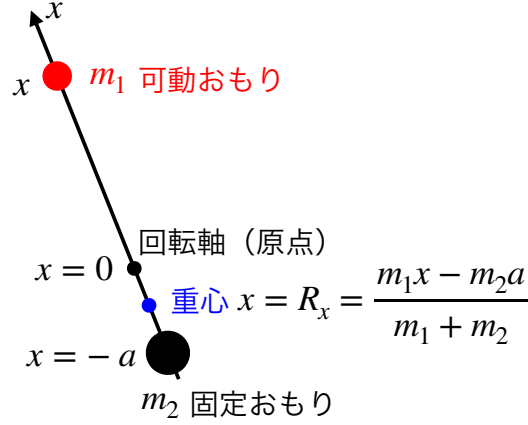


図 A.10: メトロノームのモデル。

であり、重心が回転軸より下 ($X < 0$) になるための x の範囲は

$$0 < x < \frac{m_2 a}{m_1}$$

である。重心と軸の間の距離 h は、 $X < 0$ なので

$$h = |X| = -X = \frac{-m_1 x + m_2 a}{M} \quad (\text{A.195})$$

とあらわされる。このモデルは剛体振り子になっているので、相当単振り子の長さ ℓ は、式 (185) より

$$\ell = \frac{I}{Mh} = \frac{m_1 x^2 + m_2 a^2}{M \frac{-m_1 x + m_2 a}{M}} = \frac{m_1 x^2 + m_2 a^2}{-m_1 x + m_2 a} \quad (\text{A.196})$$

これは $0 < x < m_2 a / m_1$ で x に対して単調増加： x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{dx} &= \frac{1}{-m_1 x + m_2 a} \frac{d}{dx} (m_1 x^2 + m_2 a^2) + (m_1 x^2 + m_2 a^2) \frac{d}{dx} (-m_1 x + m_2 a)^{-1} \\ &= \frac{1}{-m_1 x + m_2 a} 2m_1 x + (m_1 x^2 + m_2 a^2) (-1) (-m_1 x + m_2 a)^{-2} \frac{d}{dx} (-m_1 x + m_2 a) \\ &= \frac{2m_1 x}{-m_1 x + m_2 a} + \frac{(m_1 x^2 + m_2 a^2) (-1)}{(-m_1 x + m_2 a)^2} (-m_1) \\ &= \frac{2m_1 x}{-m_1 x + m_2 a} + \frac{m_1 (m_1 x^2 + m_2 a^2)}{(-m_1 x + m_2 a)^2} \end{aligned}$$

となるが、第1項分子は $0 < x$ より正、分母は条件 $x < m_2 a / m_1$ より正である。第2項は実数の2乗は常に正であることから正となり、結局

$$\frac{d\ell}{dx} > 0 \quad (0 < x < \frac{m_2 a}{m_1})$$

となる。つまりおもりが遠い (x が大きい) と周期が長い (ℓ , T が増加) ことを表している。

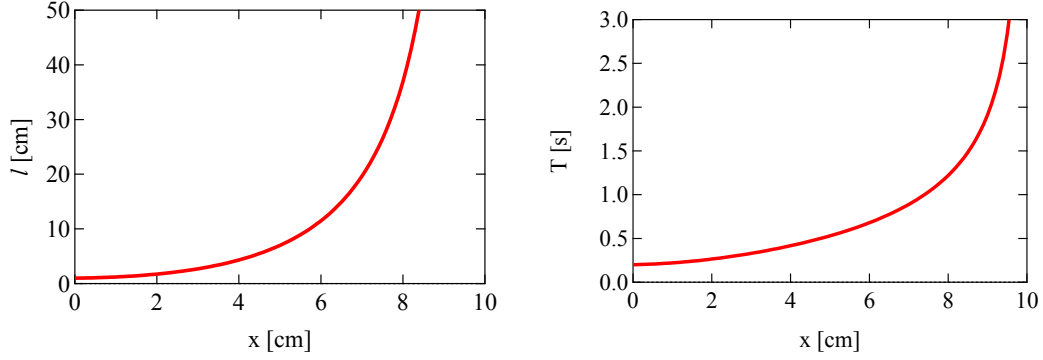


図 A.11: $m_1 = 10 \text{ g}$ 、 $m_2 = 100 \text{ g}$ 、 $a = 1.0 \text{ cm}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とした場合のメトロノームの相当単振り子の長さ ℓ (左) と周期 T (右)。

図 A.11 に、 $m_1 = 10 \text{ g}$ 、 $m_2 = 100 \text{ g}$ 、 $a = 1.0 \text{ cm}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とした場合の $\ell(x)$ と $T(x)$ を示す。この場合 x の上限は $m_2 a / m_1 = 10 \text{ cm}$ であり、周期 0.6 s ($\downarrow = 200$) から 3.0 s ($\downarrow = 40$) がこの範囲でカバーできることがわかる。単振り子で同じ範囲をカバーするには $\ell \sim 8.9 \text{ cm}$ から $\ell \sim 2.2 \text{ m}$ の長さが必要になる。実際のメトロノームは摩擦のため振動が減衰するので、ネジの力を加えて周期運動させている。また、式 (186) の周期になるのは振幅が小さい場合のみ成立することに注意。

同じ周期を与える重心距離

式 (187) と同じ周期 T を $\bar{R}$ が与える場合、以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
 2\pi \sqrt{\frac{I_G + M\bar{R}^2}{gM\bar{R}}} &= 2\pi \sqrt{\frac{I_G + MR^2}{gMR}} \\
 \frac{I_G + M\bar{R}^2}{\bar{R}} &= \frac{I_G + MR^2}{R} \\
 I_G R + M\bar{R}R^2 &= I_G \bar{R} + M\bar{R}R^2 \\
 0 &= I_G \bar{R} - I_G R + M\bar{R}R^2 - MR^2 \\
 0 &= I_G (\bar{R} - R) - M\bar{R}R(\bar{R} - R) \\
 0 &= (I_G - M\bar{R}R)(\bar{R} - R)
 \end{aligned} \tag{A.197}$$

よって $R = \bar{R}$ または

$$\begin{aligned}
 I_G - M\bar{R}R &= 0 \\
 M\bar{R}R &= I_G \\
 \bar{R} &= \frac{I_G}{MR}
 \end{aligned} \tag{A.198}$$

であれば R と同じ周期となる。2つの R が同じ周期を与える理由：式 (187) の周期 T は $R \rightarrow 0$ で $T \sim R^{-1/2}$ 、 $R \rightarrow \infty$ で $T \sim R^{1/2}$ と発散するので、間に極小があり同じ T を与える R と $\bar{R}$ が存在

する。周期 T の極小値を与える距離 $R_{\min}$ は $R = \bar{R}$ となる点なので

$$\begin{aligned} R_{\min} &= \frac{I_G}{MR_{\min}} \\ R_{\min}^2 &= \frac{I_G}{M} \\ R_{\min} &= \sqrt{\frac{I_G}{M}} \end{aligned} \tag{A.199}$$

であり、このときの周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + MR^2}{gMR}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + M(I_G/M)}{gM\sqrt{\frac{I_G}{M}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2I_G}{g\sqrt{I_G M}}} = 2\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{R_{\min}}{g}} \tag{A.200}$$

となる。

力学的エネルギー

運動方程式 (193) より

$$M\ddot{X} - Mg \sin \theta = -\frac{I}{r}\dot{\omega} \tag{A.201}$$

ここで滑らない条件 (194) より $\dot{X} = r\omega$ なので、左辺に $\dot{X}$ 、右辺に $r\omega$ をかけると

$$M\dot{X}\ddot{X} - Mg \sin \theta \dot{X} = -I\omega\dot{\omega} \tag{A.202}$$

ここで

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{X}^2}{2} = \frac{2\dot{X}}{2} \frac{d}{dt} \dot{X} = \dot{X}\ddot{X} \tag{A.203}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega^2}{2} = \frac{2\omega}{2} \frac{d}{dt} \omega = \omega\dot{\omega} \tag{A.204}$$

であるので、

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}^2}{2} - Mg \sin \theta \frac{dX}{dt} &= -I \frac{d}{dt} \frac{\omega^2}{2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - Mg \sin \theta X \right) &= 0 \end{aligned} \tag{A.205}$$

となる。

$$E \equiv \frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - Mg \sin \theta X \tag{A.206}$$

を定義すると、 E は力学的エネルギーに対応し、時間に依存しない（保存する）ことがわかる：

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{A.207}$$

初期条件を $t = 0$ で $X(0) = 0$ (初期位置が0)、 $\dot{X}(0) = 0$ (初期速度が0)、 $\omega(0) = 0$ (回転していない) とすると $E = 0$ が任意の時刻で成立する。時刻 $t > 0$ では $X(t)$ (初期位置から転がり落ちている)、 $\dot{X}(t)$ (速度を持っている)、 $\omega(t)$ (回転している) は全て有限なので

$$0 = \frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - Mg \sin \theta X \quad (\text{A.208})$$

となっている。滑らない条件 $\dot{X} = r\omega$ を用いると

$$\frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{I}{2} \frac{\dot{X}^2}{r^2} = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{r^2} \right) \dot{X}^2 = \frac{M\dot{X}^2}{2} \frac{Mr^2 + I}{Mr^2} \quad (\text{A.209})$$

と書き表せるので、式 (A.208) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{M\dot{X}^2}{2} \frac{Mr^2 + I}{Mr^2} - Mg \sin \alpha X \\ \frac{M\dot{X}^2}{2} &= \frac{Mr^2}{Mr^2 + I} Mg \sin \alpha X \end{aligned} \quad (\text{A.210})$$

と運動エネルギーを決定することができる。さらに、回転のエネルギーは式 (A.208) より

$$\begin{aligned} \frac{I\omega^2}{2} &= -\frac{M\dot{X}^2}{2} + Mg \sin \alpha X \\ &= \left(1 - \frac{Mr^2}{Mr^2 + I} \right) Mg \sin \alpha X \\ &= \frac{I}{Mr^2 + I} Mg \sin \alpha X \end{aligned} \quad (\text{A.211})$$

となる。まとめると

$$\frac{M\dot{X}^2}{2} = \frac{Mr^2}{Mr^2 + I} Mg \sin \alpha X, \quad \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I}{Mr^2 + I} Mg \sin \alpha X \quad (\text{A.212})$$

が得られる。