

8 剛体の一般の運動

8.1 オイラーの方程式

- 剛体の主軸 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ での座標系

$$\mathbf{N} = N_1 \mathbf{v}_1 + N_2 \mathbf{v}_2 + N_3 \mathbf{v}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{v}_1 + \omega_2 \mathbf{v}_2 + \omega_3 \mathbf{v}_3, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (200)$$

直交座標 (xyz) では I_{xy} などの慣性乗積が 0 でない $\rightarrow$ 主軸の座標系で運動方程式を考える

- 主軸と回転軸が一致しない場合 (図 17(a)) : 主軸の単位ベクトル $\mathbf{v}_i$ は角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転 $\boldsymbol{\omega}$ で **回転する座標系** でのベクトル $\mathbf{a}$ の時間変化 (力学 I 参照、 d'/dt は回転座標系での微分)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = \underbrace{\frac{d'}{dt} \mathbf{a}}_{\text{成分の時間変化}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}}_{\mathbf{v}_i \text{ の時間変化}} \quad (201)$$

- 主軸での回転の運動方程式

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt} \mathbf{L} = \frac{d'}{dt} \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (202)$$

各成分は **オイラーの方程式** (補足参照) : 主軸の座標での回転の運動方程式

$$N_1 = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \quad (203)$$

$$N_2 = I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \quad (204)$$

$$N_3 = I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \quad (205)$$

N_i から $\omega_i(t)$ を決める、または $\omega_i(t)$ を与えるように N_i を決める

- 回転の運動エネルギーと時間変化 : 式 (176) より、今の表記では (補足参照)

$$K = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2}, \quad \frac{dK}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} \quad (206)$$

主軸の座標系でも元の座標系でも成立

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ (回転していない) または $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ (外力がない) のとき K が保存

8.2 自由な歳差運動

- $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ (外力なし) で $I_1 = I_2$ の場合のオイラー方程式

$$0 = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 \quad (207)$$

$$0 = I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \quad (208)$$

$$0 = I_3 \dot{\omega}_3. \quad (209)$$

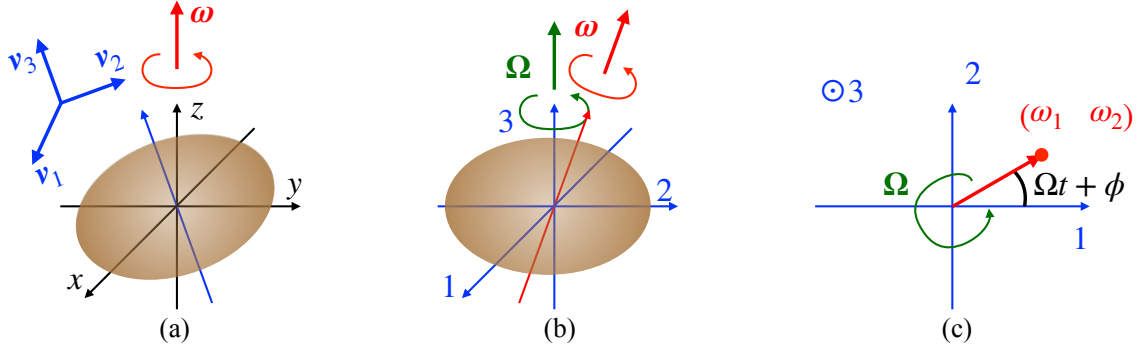


図 17: (a)：主軸 $\{v_1, v_2, v_3\}$ と回転軸 ω が一致しない運動、(b)：主軸の座標系での回転軸の歳差運動 Ω 、(c)： $\{v_1, v_2\}$ 面内での回転軸の歳差運動 Ω 。

式 (209) より、 ω_3 が一定、これより¹

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \omega_2 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \omega_1 = \Omega \omega_1, \quad \Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \quad (210)$$

- ω_2 を消去すると ω_1 に対する単振動の方程式

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega \dot{\omega}_2 = -\Omega^2 \omega_1 \quad (211)$$

$$\Rightarrow \omega_1 = A \cos(\Omega t + \phi), \quad \omega_2 = -\frac{1}{\Omega} \dot{\omega}_1 = \frac{1}{\Omega} A \Omega \sin(\Omega t + \phi) = A \sin(\Omega t + \phi) \quad (212)$$

- 回転軸の方向は v_3 軸を中心に $\{v_1, v_2\}$ 面内で回転 (図 (17)(b), (c))：**歳差運動**

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos(\Omega t + \phi) & A \sin(\Omega t + \phi) \end{pmatrix} \quad (213)$$

- 地球は極軸まわりに対称で極軸方向にわずかに扁平

$$I_1 = I_2 < I_3, \quad \frac{I_3 - I_1}{I_1} \sim 0.00327 \quad \Rightarrow \quad 306\Omega \sim \omega_3 \quad (214)$$

ω_3 は地軸の回転なので周期 $T = 2\pi/\omega_3$ は 1 日、歳差運動の周期 $T = 2\pi/\Omega$ は約 306 日

- **チャンドラー震動**：周期約 400 日の地軸の微小な歳差運動

注) 地軸の分点の歳差運動 (周期約 2 万 6 千年、太陽などの潮汐力が原因) とは別

8.3 2 粒子回転系

- 長さ $2a$ の軽い棒の端に質量 m の質点、 v_3 軸から θ ずれた方向に ω で回転 (図 18(a))
- 慣性モーメント

$$I_1 = I_2 = 2ma^2, \quad I_3 = 0 \quad (215)$$

¹地球の場合、自転 (ω) とチャンドラー震動 (歳差運動 Ω) の方向が一致しており、3 軸方向に扁平な楕円体は $I_3 > I_1$ となるので (演習問題参照)、ゴールドスタイン「古典力学」の第 3 版ではなく第 2 版の記述に合わせる。

- こまの回転速度が十分速く、減速しない

$$\mathbf{L} = I_3 \omega \mathbf{v}_3 \quad \dot{\omega} = 0 \quad (221)$$

と近似できる場合、角運動量の時間変化は（補足参照）

$$\dot{\mathbf{L}} = I_3 \omega \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (222)$$

- 重心座標 $\mathbf{R}$ と重力 $\mathbf{F}$

$$\mathbf{R} = R \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{pmatrix} \quad (223)$$

重力による力のモーメント

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} (R \sin \theta \sin \phi)(-Mg) - 0 \\ 0 - (R \sin \theta \cos \phi)(-Mg) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -MgR \sin \theta \sin \phi \\ MgR \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (224)$$

$\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$ だが $\mathbf{N}$ の方向が異なる

- 回転の運動方程式 ($\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$)

$$\begin{pmatrix} -MgR \sin \theta \sin \phi \\ MgR \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = I_3 \omega \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (225)$$

z 成分より $\dot{\theta} = 0$ 、 x 成分に代入して（ y 成分に代入しても同様）

$$-MgR \sin \theta \sin \phi = -I_3 \omega \sin \theta \sin \phi \dot{\phi}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{MgR}{I_3 \omega} \quad (226)$$

回転軸は ϕ 方向に角速度 $MgR/(I_3 \omega)$ の**等角速度円運動**（歳差運動、HP の動画参照）

θ は時間変化しない（倒れない）

- $\omega > 0$ のとき $MgR/(I_3 \omega) > 0$ ：こまの回転方向と歳差運動の回転方向は同じ
逆回転のこま： $\omega \rightarrow -\omega$ 、歳差運動も逆回転
- $\dot{\phi}$ は ω に反比例：こまの回転が速いとき歳差は遅く、回転がゆっくりになると歳差が速くなる
- θ が変化しない：こまは倒れない？
倒れる方向の角運動量を見捨てたため
オイラー方程式で厳密に扱えば章動（ θ 方向の振動）がおこる
- 実際のこまには接地点での摩擦力などがはたらき $|\mathbf{L}|$ が時間とともに減少
 $\Rightarrow$ 徐々に章動が起こり最終的にこまが倒れる