第8回補足

オイラーの方程式 (203), (204), (205)

主軸の座標系 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ での角運動量は、式 (200) より

$$\mathbf{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} = I_1\omega_1\mathbf{v}_1 + I_2\omega_2\mathbf{v}_2 + I_3\omega_3\mathbf{v}_3 \quad (\text{A.213})$$

である。 d'/dt は成分のみ微分すれば良いので、 I_i は時間に依存しないことより

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{L} = I_1\dot{\omega}_1\mathbf{v}_1 + I_2\dot{\omega}_2\mathbf{v}_2 + I_3\dot{\omega}_3\mathbf{v}_3 \quad (\text{A.214})$$

また式 (200) と (A.213) より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} &= (\omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2) \mathbf{v}_1 + (\omega_3 I_1 \omega_1 - \omega_1 I_3 \omega_3) \mathbf{v}_2 + (\omega_1 I_2 \omega_2 - \omega_2 I_1 \omega_1) \mathbf{v}_3 \\ &= -(I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \mathbf{v}_1 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \mathbf{v}_2 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \mathbf{v}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.215})$$

なので、式 (202) に代入すると、

$$\begin{aligned} &N_1 \mathbf{v}_1 + N_2 \mathbf{v}_2 + N_3 \mathbf{v}_3 \\ &= I_1 \dot{\omega}_1 \mathbf{v}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \mathbf{v}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \mathbf{v}_3 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \mathbf{v}_1 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \mathbf{v}_2 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \mathbf{v}_3 \\ &= [I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3] \mathbf{v}_1 + [I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1] \mathbf{v}_2 + [I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2] \mathbf{v}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.216})$$

となり、各 $\mathbf{v}_i$ の前の係数が式 (203), (204), (205) を与える。

運動エネルギーの時間微分 (206)

主軸の座標系での運動エネルギー (206) を時間微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{I_1}{2} \frac{d}{dt} \omega_1^2 + \frac{I_2}{2} \frac{d}{dt} \omega_2^2 + \frac{I_3}{2} \frac{d}{dt} \omega_3^2 \\ &= \frac{I_1}{2} 2\omega_1 \frac{d}{dt} \omega_1 + \frac{I_2}{2} 2\omega_2 \frac{d}{dt} \omega_2 + \frac{I_3}{2} 2\omega_3 \frac{d}{dt} \omega_3 \\ &= I_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + I_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + I_3 \omega_3 \dot{\omega}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.217})$$

一方この座標系では $\boldsymbol{\omega}$ と $\mathbf{N}$ はそれぞれ式 (200) とオイラーの方程式 (203), (204), (205) で与えられるので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} &= \omega_1 (I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3) \\ &\quad + \omega_2 (I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1) \\ &\quad + \omega_3 (I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2) \\ &= I_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 - \cancel{I_2 \omega_1 \omega_2 \omega_3} + \cancel{I_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \\ &\quad + I_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 - \cancel{I_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} + \cancel{I_1 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \\ &\quad + I_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 - \cancel{I_1 \omega_1 \omega_2 \omega_3} + \cancel{I_2 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \end{aligned} \quad (\text{A.218})$$

となり

$$\frac{dK}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} \quad (\text{A.219})$$

が成り立つ。

元の座標系では

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\hat{I}\boldsymbol{\omega}) = \hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.220})$$

より

$$N_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z \quad (\text{A.221})$$

$$N_y = I_{xy}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z \quad (\text{A.222})$$

$$N_z = I_{xz}\dot{\omega}_x + I_{yz}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z \quad (\text{A.223})$$

であるので、運動エネルギーとその微分は

$$\begin{aligned} K &= \frac{I_{xx}\omega_x^2}{2} + \frac{I_{xy}\omega_x\omega_y}{2} + \frac{I_{xz}\omega_x\omega_z}{2} + \frac{I_{yx}\omega_y\omega_x}{2} + \frac{I_{yy}\omega_y^2}{2} + \frac{I_{yz}\omega_y\omega_z}{2} \\ &\quad + \frac{I_{zx}\omega_z\omega_x}{2} + \frac{I_{zy}\omega_z\omega_y}{2} + \frac{I_{zz}\omega_z^2}{2} \\ &= \frac{I_{xx}\omega_x^2}{2} + \frac{I_{yy}\omega_y^2}{2} + \frac{I_{zz}\omega_z^2}{2} + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{I_{xx}}{2} \frac{d}{dt} \omega_x^2 + \frac{I_{yy}}{2} \frac{d}{dt} \omega_y^2 + \frac{I_{zz}}{2} \frac{d}{dt} \omega_z^2 + I_{xy} \frac{d}{dt} (\omega_x\omega_y) + I_{yz} \frac{d}{dt} (\omega_y\omega_z) + I_{zx} \frac{d}{dt} (\omega_z\omega_x) \\ &= I_{xx}\omega_x\dot{\omega}_x + I_{yy}\omega_y\dot{\omega}_y + I_{zz}\omega_z\dot{\omega}_z \\ &\quad + I_{xy}\dot{\omega}_x\omega_y + I_{xy}\omega_x\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_y\omega_z + I_{yz}\omega_y\dot{\omega}_z + I_{zx}\dot{\omega}_z\omega_x + I_{zx}\omega_z\dot{\omega}_x \\ &= \omega_x(I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{zx}\dot{\omega}_z) \\ &\quad + \omega_y(I_{xy}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z) \\ &\quad + \omega_z(I_{xz}\dot{\omega}_x + I_{yz}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z) \\ &= \omega_x N_x + \omega_y N_y + \omega_z N_z \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{A.224})$$

となる。成分表示を用いると（ここでの i, j は x, y, z を表しており主軸の座標系のものではないことに注意）

$$K = \frac{1}{2} \omega_i \omega_j I_{ij} \quad (\text{A.225})$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\omega_i \omega_j I_{ij}) = \frac{1}{2} \dot{\omega}_i \omega_j I_{ij} + \frac{1}{2} \omega_i \dot{\omega}_j I_{ij} \quad (\text{A.226})$$

ここで和をとる添字は何を使っても良いことと、成分表示の場合は順番を入れ替えて良いこと、 $\hat{I}$ が対称行列であることを用いると

$$\dot{\omega}_i \omega_j I_{ij} = \dot{\omega}_j \omega_i I_{ji} = \omega_i \dot{\omega}_j I_{ij} \quad (\text{A.227})$$

とできるので、

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \omega_i \dot{\omega}_j I_{ij} + \frac{1}{2} \omega_i \dot{\omega}_j I_{ij} = \omega_i I_{ij} \dot{\omega}_j \quad (\text{A.228})$$

ここで式 (A.220) の成分表示は

$$N_i = I_{ij} \dot{\omega}_j \quad (\text{A.229})$$

であるので

$$\frac{dK}{dt} = \omega_i N_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} \quad (\text{A.230})$$

となる。

こまの角運動量の時間変化 (222)

角度 θ, ϕ が時間依存の場合、

$$\frac{d}{dt} \sin(\theta(t)) = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \sin \theta = \dot{\theta} \cos \theta \quad (\text{A.231})$$

のようになるので、式 (221) の角運動量の時間微分は、式 (220) の $\mathbf{v}_3$ を用いて

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= I_3 \omega \frac{d}{dt} \mathbf{v}_3 \\ &= I_3 \omega \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (\sin \theta \cos \phi) \\ \frac{d}{dt} (\sin \theta \sin \phi) \\ \frac{d}{dt} \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= I_3 \omega \begin{pmatrix} \cos \phi \frac{d}{dt} \sin \theta + \sin \theta \frac{d}{dt} (\cos \phi) \\ \sin \phi \frac{d}{dt} (\sin \theta) + \sin \theta \frac{d}{dt} (\sin \phi) \\ (-\sin \theta) \dot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= I_3 \omega \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.232})$$

となる。