9　連成振動

9.1　1 自由度の振動と重ね合わせの原理

- 1 次元の運動（図 19）：ばね 1（ばね定数 k）、質点（質量 m）、ばね 2（ばね定数 k）
- つり合いの位置からの変位を x、右向きが正
  質点への力：ばね 1 から $-kx$、ばね 2 から $-kx$

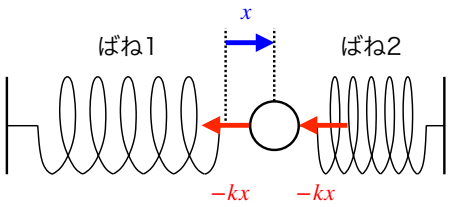

図 19: 1 自由度の振動。

- 運動方程式：単振動の方程式

$$m\ddot{x} = -kx - kx = -2kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{227}$$

- 運動方程式の解、周期 T、力学的エネルギー E（補足参照）

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi), \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}, \quad E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{2}x^2 = 2kC^2 \tag{228}$$

  C, ϕ が積分定数（1 自由度なので 2 つ）、**初期条件**（初期位置と初期速度）で決まる
  k が大きい（ばねが強い）または m が小さい（質点が軽い）と周期が短い
  E は時間に依存せずばね定数と振幅 C で決まる

- **線形微分方程式**：x について 1 次の項のみの方程式（x^2 や $\sin x$、定数項などを含まない）
  線形でない（非線形）微分方程式の例

$$\ddot{x} = 6c_1x^2 + c_2t, \quad c_1, c_2 : \text{定数} \tag{229}$$

- 解の**重ね合わせの原理**：$x_a(t)$、$x_b(t)$ が線形微分方程式の解のとき、解の線形結合

$$x(t) = Ax_a(t) + Bx_b(t), \quad A, B : \text{定数} \tag{230}$$

  も同じ方程式の解。非線形の方程式の解は重ね合わせの原理を満たさない（補足参照）。

- 例）単振動の方程式 (227) は線形：

$$\ddot{x_a} = -\omega^2 x_a, \quad \ddot{x_b} = -\omega^2 x_b \tag{231}$$

  のとき

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(Ax_a + Bx_b) = A\ddot{x_a} + B\ddot{x_b} = A\left(-\omega^2 x_a\right) + B\left(-\omega^2 x_b\right) = -\omega^2(Ax_a + Bx_b)$$
$$= -\omega^2 x \tag{232}$$

9.2　2 自由度の連成振動

- 1 次元の運動（図 20）：ばね 3 つ（ばね定数 k）、質点 2 つ（質量 m）
- つり合いの位置からの質点 1 の変位を u_1、質点 2 の変位を u_2、右向きが正
  $u_2 - u_1 > 0$ のとき：ばね 2 は伸びる $\Rightarrow$ 質点 1 への力は正方向、質点 2 は負方向
- 質点 1 への力：ばね 1 から $-ku_1$、ばね 2 から $k(u_2 - u_1)$
  （$u_2 - u_1 < 0$ の場合は符号が反転し正しく左向きの力を与える）
- 質点 2 への力：ばね 2 から $-k(u_2 - u_1)$、ばね 3 から $-ku_2$

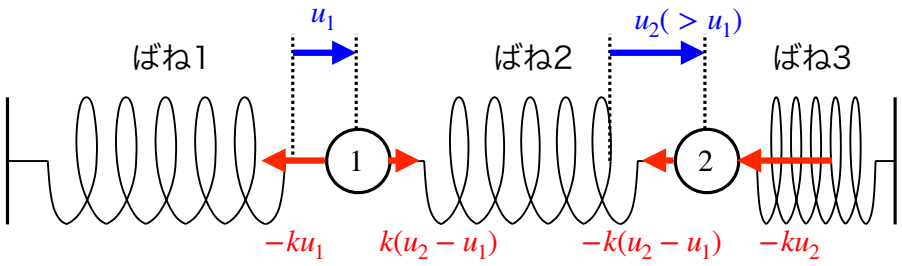

図 20: $u_2 > u_1 > 0$ の場合の 2 自由度の振動。

- 運動方程式（求めるのは $u_1(t)$ と $u_2(t)$）

$$m\ddot{u}_1 = -ku_1 + k(u_2 - u_1) = -2ku_1 + ku_2 \tag{233}$$

$$m\ddot{u}_2 = -ku_2 - k(u_2 - u_1) = -2ku_2 + ku_1 \tag{234}$$

連立線形微分方程式：解の重ね合わせが成り立つ

9.3　基準座標と基準振動

- 2 つの運動方程式の両辺の和と差

$$m\ddot{u}_1 + m\ddot{u}_2 = -2ku_1 + ku_2 - 2ku_2 + ku_1 = -ku_1 - ku_2 \tag{235}$$

$$m\ddot{u}_1 - m\ddot{u}_2 = -2ku_1 + ku_2 - (-2ku_2 + ku_1) = -3ku_1 + 3ku_2 \tag{236}$$

- **基準座標**（主軸変換と本質的に同じ、演習問題参照）

$$X = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (\text{重心座標}), \quad Y = \frac{u_1 - u_2}{2} \quad (\text{相対座標の半分}) \tag{237}$$

を定義すると、X、Y に対する運動方程式は

$$\ddot{X} = -\omega_X^2 X, \quad \ddot{Y} = -\omega_Y^2 Y, \quad \omega_X = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_Y = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{238}$$

それぞれ単振動の方程式なので、解は

$$X = C_X \cos(\omega_X t + \phi_X), \quad Y = C_Y \cos(\omega_Y t + \phi_Y) \tag{239}$$

- 運動方程式 (233)、(234) の解：基準座標の定義 (237) より

$$u_1 = X + Y = C_X \cos(\omega_X t + \phi_X) + C_Y \cos(\omega_Y t + \phi_Y) \tag{240}$$
$$u_2 = X - Y = C_X \cos(\omega_X t + \phi_X) - C_Y \cos(\omega_Y t + \phi_Y) \tag{241}$$

  C_X, C_Y, ϕ_X, ϕ_Y が積分定数（2 自由度なので 4 つ）、初期条件で決まる

- **基準振動**（基準モード、モード）：基準座標が表す運動
  一般の運動は異なる**基準振動の重ね合わせ**

- $C_Y = 0$ の解：X の基準振動（図 21 左）

$$u_1 = C_X \cos(\omega_X t + \phi_X), \quad u_2 = C_X \cos(\omega_X t + \phi_X) = u_1 \tag{242}$$

  重心が振動、相対は不変（ばね 2 は長さが変わらず力がはたらかない）

- $C_X = 0$ の解：Y の基準振動（図 21 右）

$$u_1 = C_Y \cos(\omega_Y t + \phi_Y), \quad u_2 = -C_Y \cos(\omega_Y t + \phi_Y) = -u_1 \tag{243}$$

  重心は不変、相対が振動（ばね 2 も力をおよぼす）

- 振動数の比較：

$$\omega_Y = \sqrt{\frac{3k}{m}} > \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_X \tag{244}$$

  なので Y の基準振動の方が振動数が大きく周期が短い ⇐ ばね 2 の力も加わるため

- 力学的エネルギー（補足参照）

$$E = \frac{m}{2}\dot{u}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{u}_1^2 + \frac{k}{2}u_1^2 + \frac{k}{2}(u_1 - u_2)^2 + \frac{k}{2}u_2^2 = kC_X^2 + 3kC_Y^2 \tag{245}$$

  独立な基準振動のエネルギーの和

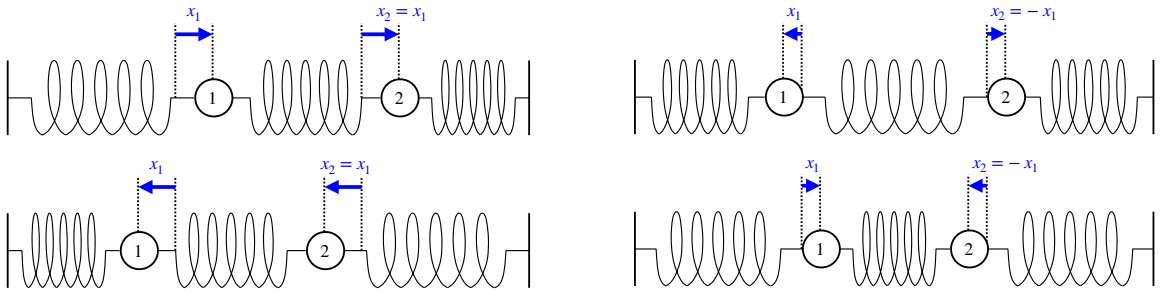

図 21: 2 自由度の基準振動。左：X の基準振動、右：Y の基準振動。

- $C_X = C_Y$, $\phi_X = \phi_Y = 0$ の場合（補足参照）

$$u_1 = C_X[\cos(\omega_X t) + \cos(\omega_Y t)] = 2C_X \cos(\bar{\omega}t)\cos(\Delta\omega t) \tag{246}$$

$$u_2 = C_X[\cos(\omega_X t) - \cos(\omega_Y t)] = 2C_X \sin(\bar{\omega}t)\sin(\Delta\omega t) \tag{247}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_X + \omega_Y}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_Y - \omega_X}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{248}$$

長い周期の振動 $2\pi/\Delta\omega$ と短い周期の振動 $2\pi/\bar{\omega}$ が重なる：**うなり**
（うなりが顕著になるのは $\Delta\omega$ が小さい場合、図 22 参照）

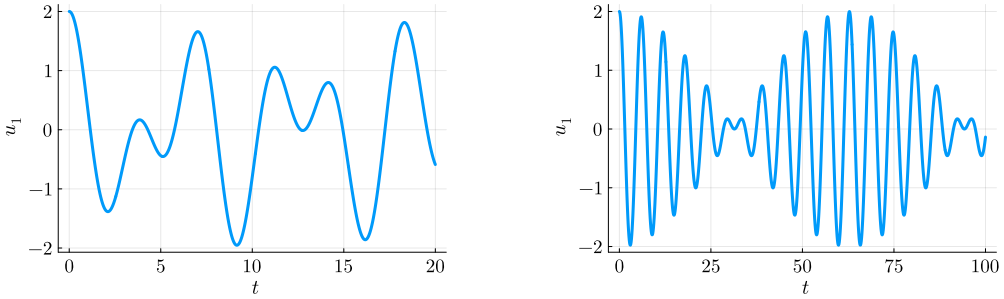

図 22: 連成振動のうなり。左：$\omega_Y = \sqrt{3}\omega_X$ の場合の $u_1(t)$、右：$\omega_Y = 1.1\omega_X$ の場合の $u_1(t)$。

9.4 モード展開

- 基準振動 X, Y の特徴：振動数 ω と初期位相 ϕ は u_1, u_2 で共通（振幅 C のみ異なる）
モード展開：解の形を

$$u_1 = C_1 \cos(\omega t + \phi), \quad u_2 = C_2 \cos(\omega t + \phi) \tag{249}$$

と**仮定して**運動方程式 (233), (234) に代入（補足参照、後述のフーリエ展開に相当）

$$m\ddot{u}_1 = -2ku_1 + ku_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = (m\omega^2 - 2k)C_1 + kC_2 \tag{250}$$

$$m\ddot{u}_2 = -2ku_2 + ku_1 \quad \Rightarrow \quad 0 = kC_1 + (m\omega^2 - 2k)C_2 \tag{251}$$

$u_i(t)$ の微分方程式が C_i の**代数方程式**になる

- 式 (250) と式 (251) をまとめた行列の式

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{252}$$

$C_1 = C_2 = 0$（自明な解）以外の解は、係数行列の行列式が 0（補足参照）：

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \text{ または } \frac{3k}{m} \tag{253}$$

基準振動の振動数 ω_X、ω_Y を再現する