

第9回補足

1 自由度の振動の力学的エネルギー

§9.1 の 1 自由度の振動の力学的エネルギーを考える。ばねによる質点の振動の力学的エネルギーは、質点の運動エネルギーとばねのポテンシャルエネルギーの和になる。ばね定数 k のばねが一つ作用する場合のポテンシャルエネルギーは

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad F = -\frac{d}{dx}V(x) = -kx \quad (\text{A.233})$$

である。今の問題の場合、ばね 1、ばね 2 のポテンシャルエネルギーを V_1, V_2 とすると、

$$V_1(x) = \frac{k}{2}x^2, \quad V_2(x) = \frac{k}{2}x^2 \quad (\text{A.234})$$

であるので、力学的エネルギーは

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + kx^2 \quad (\text{A.235})$$

である。式 (230) の解 $x(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -C\omega \sin(\omega t + \phi), \\ E &= \frac{m}{2}C^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + kC^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \left(\frac{m}{2}\omega^2 + k\right) \underbrace{[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]}_{=1} C^2 \\ &= \left(\frac{m}{2}\frac{2k}{m} + k\right) C^2 \quad \leftarrow (229) \\ &= 2kC^2 \end{aligned} \quad (\text{A.237})$$

となる。つまり力学的エネルギーは時間に依存せず、振幅の 2 乗とばね定数の積になる。これは運動エネルギーが大きい ($|x| \sim 0$ で $|\dot{x}|$ が大きい) ときポテンシャルエネルギーが小さく、運動エネルギーが大きい ($|x| \sim C$ で $|\dot{x}|$ が小さい) ときポテンシャルエネルギーが大きいことを表している。 $2k$ の 2 は 2 つのばねが作用することに起因している。

非線形方程式の解の重ね合わせ

非線形微分方程式

$$\ddot{x} = 6c_1x^2 + c_2t, \quad c_1, c_2 : \text{定数} \quad (\text{A.238})$$

の解の重ね合わせを考える。 x_a, x_b が式 (A.238) の解であるとする

$$\ddot{x}_a = 6c_1x_a^2 + c_2t, \quad \ddot{x}_b = 6c_1x_b^2 + c_2t \quad (\text{A.239})$$

が従う。このとき、 A, B を定数として $x = Ax_a + Bx_b$ に関する微分方程式の左辺は

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(Ax_a + Bx_b) = A\ddot{x}_a + B\ddot{x}_b = 6Ac_1x_a^2 + Ac_2t + 6Bc_1x_b^2 + Bc_2t \quad (\text{A.240})$$

一方右辺は

$$\begin{aligned} 6c_1x^2 + c_2t &= 6c_1(Ax_a + Bx_b)^2 + c_2t \\ &= 6c_1(A^2x_a^2 + 2ABx_ax_b + B^2x_b^2) + c_2t \\ &= 6A^2c_1x_a^2 + 12ABc_1x_ax_b + 6B^2c_1x_b^2 + c_2t \neq \ddot{x} \end{aligned} \quad (\text{A.241})$$

となり、 $x = Ax_a + Bx_b$ は微分方程式を満たさない。

なお、線形微分方程式の解の重ね合わせの原理は、**任意**の定数 A, B を用いた線形結合で解になることであり、**特定**の A, B について解になっていても重ね合わせが成り立つとは言わない。今の例で特定の A, B に対し方程式が成立するかどうかを考えると、重ね合わせが成立する場合

$$6Ac_1x_a^2 + 6Bc_1x_b^2 + (A + B)c_2t = 6A^2c_1x_a^2 + 12ABc_1x_ax_b + 6B^2c_1x_b^2 + c_2t \quad (\text{A.242})$$

に対して、各項 (x_a^2, x_ax_b, x_b^2, t) の係数が一致する必要がある、それぞれ

$$\begin{aligned} 6Ac_1 &= 6A^2c_1 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \text{ または } A = 0 \\ 0 &= 12ABc_1 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \text{ または } B = 0 \\ 6Bc_1 &= 6B^2c_1 \quad \Rightarrow \quad B = 1 \text{ または } B = 0 \\ (A + B)c_2 &= c_2 \quad \Rightarrow \quad A = 1 - B \end{aligned}$$

となり、これらを全て満たす解はないことがわかる（上3式が成立するのは $A = B = 0$ のみで、これは最後の式を満たさない）。

2 自由度の振動の力学的エネルギー

§9.3 の 2 自由度の振動の力学的エネルギーを考える。ばね 1、ばね 2、ばね 3 のポテンシャルエネルギー V_1, V_2, V_3 は

$$V_1(x) = \frac{k}{2}u_1^2, \quad V_2(x) = \frac{k}{2}(u_1 - u_2)^2, \quad V_3(x) = \frac{k}{2}u_2^2 \quad (\text{A.243})$$

である。よって力学的エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{u}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{u}_2^2 + \frac{k}{2}u_1^2 + \frac{k}{2}(u_1 - u_2)^2 + \frac{k}{2}u_2^2 \\ &= \frac{m}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + \frac{k}{2}u_1^2 + \frac{k}{2}(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) + \frac{k}{2}u_2^2 \\ &= \frac{m}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + k(u_1^2 - u_1u_2 + u_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.244})$$

である。簡単のため

$$c_X \equiv \cos(\omega_X t + \phi_X), \quad c_Y \equiv \cos(\omega_Y t + \phi_Y) \quad (\text{A.245})$$

$$s_X \equiv \sin(\omega_X t + \phi_X), \quad s_Y \equiv \sin(\omega_Y t + \phi_Y) \quad (\text{A.246})$$

という記法を導入すると、式 (242), (243) の解より

$$u_1 = C_X c_X + C_Y c_Y \quad (\text{A.247})$$

$$u_2 = C_X c_X - C_Y c_Y \quad (\text{A.248})$$

$$u_1^2 = C_X^2 c_X^2 + 2C_X C_Y c_X c_Y + C_Y^2 c_Y^2 \quad (\text{A.249})$$

$$u_2^2 = C_X^2 c_X^2 - 2C_X C_Y c_X c_Y + C_Y^2 c_Y^2 \quad (\text{A.250})$$

$$u_1 u_2 = (C_X c_X + C_Y c_Y)(C_X c_X - C_Y c_Y) = C_X^2 c_X^2 - C_Y^2 c_Y^2 \quad (\text{A.251})$$

$$\begin{aligned} u_1^2 - u_1 u_2 + u_2^2 &= C_X^2 c_X^2 + 2C_X C_Y c_X c_Y + C_Y^2 c_Y^2 \\ &\quad - C_X^2 c_X^2 + C_Y^2 c_Y^2 \\ &\quad + C_X^2 c_X^2 - 2C_X C_Y c_X c_Y + C_Y^2 c_Y^2 \\ &= C_X^2 c_X^2 + 3C_Y^2 c_Y^2 \end{aligned} \quad (\text{A.252})$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{d}{dt}[C_X \cos(\omega_X t + \phi_X) + C_Y \cos(\omega_Y t + \phi_Y)] \\ &= -C_X \omega_X \sin(\omega_X t + \phi_X) - C_Y \omega_Y \sin(\omega_Y t + \phi_Y) \\ &= -C_X \omega_X s_X - C_Y \omega_Y s_Y \end{aligned} \quad (\text{A.253})$$

$$\dot{u}_1^2 = C_X^2 \omega_X^2 s_X^2 + 2C_X C_Y \omega_X \omega_Y s_X s_Y + C_Y^2 \omega_Y^2 s_Y^2 \quad (\text{A.254})$$

$$\dot{u}_2 = -C_X \omega_X s_X + C_Y \omega_Y s_Y \quad (\text{A.255})$$

$$\dot{u}_2^2 = C_X^2 \omega_X^2 s_X^2 - 2C_X C_Y \omega_X \omega_Y s_X s_Y + C_Y^2 \omega_Y^2 s_Y^2 \quad (\text{A.256})$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 &= C_X^2 \omega_X^2 s_X^2 + 2C_X C_Y \omega_X \omega_Y s_X s_Y + C_Y^2 \omega_Y^2 s_Y^2 \\ &\quad + C_X^2 \omega_X^2 s_X^2 - 2C_X C_Y \omega_X \omega_Y s_X s_Y + C_Y^2 \omega_Y^2 s_Y^2 \\ &= 2C_X^2 \omega_X^2 s_X^2 + 2C_Y^2 \omega_Y^2 s_Y^2 \end{aligned} \quad (\text{A.257})$$

となる、これを式 (A.244) に代入すると

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}(2C_X^2 \omega_X^2 s_X^2 + 2C_Y^2 \omega_Y^2 s_Y^2) + k(C_X^2 c_X^2 + 3C_Y^2 c_Y^2) \\ &= C_X^2 (m\omega_X^2 s_X^2 + kc_X^2) + C_Y^2 (m\omega_Y^2 s_Y^2 + 3kc_Y^2) \\ &= C_X^2 \left(m\frac{k}{m}s_X^2 + kc_X^2 \right) + C_Y^2 \left(m\frac{3k}{m}s_Y^2 + 3kc_Y^2 \right) \quad \leftarrow \omega_X = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_Y = \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ &= kC_X^2 (s_X^2 + c_X^2) + 3kC_Y^2 (s_Y^2 + c_Y^2) \\ &= kC_X^2 + 3kC_Y^2 \end{aligned} \quad (\text{A.258})$$

となる。これは X の基準振動の力学的エネルギー kC_X^2 と Y の基準振動の力学的エネルギー $3kC_Y^2$ の和になっている。

式 (248), (249) の計算

三角関数の公式より

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (\text{A.259})$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (\text{A.260})$$

より

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos X + \cos Y &= 2 \cos \frac{X + Y}{2} \cos \frac{X - Y}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.261})$$

$$\begin{aligned} \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y \\ \cos X - \cos Y &= -2 \sin \frac{X + Y}{2} \sin \frac{X - Y}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.262})$$

であるので、 $C_X = C_Y$, $\phi_X = \phi_Y = 0$ の場合

$$\begin{aligned} u_1 &= C_X [\cos(\omega_X t) + \cos(\omega_Y t)] \\ &= 2C_X \cos \left(\frac{\omega_X + \omega_Y}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_X - \omega_Y}{2} t \right) \\ &= 2C_X \cos \left(\frac{\omega_X + \omega_Y}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_Y - \omega_X}{2} t \right) \quad \leftarrow \cos(-x) = \cos(x) \\ &= 2C_X \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta \omega t) \end{aligned} \quad (\text{A.263})$$

$$\begin{aligned} u_2 &= C_X [\cos(\omega_X t) - \cos(\omega_Y t)] \\ &= -2C_X \sin \left(\frac{\omega_X + \omega_Y}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_X - \omega_Y}{2} t \right) \\ &= 2C_X \sin \left(\frac{\omega_X + \omega_Y}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_Y - \omega_X}{2} t \right) \quad \leftarrow \sin(-x) = -\sin(x) \\ &= 2C_X \sin(\bar{\omega} t) \sin(\Delta \omega t) \end{aligned} \quad (\text{A.264})$$

ここで

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_X + \omega_Y}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \sqrt{\frac{3k}{m}} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.265})$$

$$\Delta \omega = \frac{\omega_Y - \omega_X}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} - \sqrt{\frac{k}{m}} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.266})$$

を用いた。

2 自由度の振動のモード展開

式 (251) の解を運動方程式 (235) に代入すると

$$\begin{aligned}
 m\ddot{u}_1 &= -2ku_1 + ku_2 \\
 m[-\omega^2 C_1 \cos(\omega t + \phi)] &= -2kC_1 \cos(\omega t + \phi) + kC_2 \cos(\omega t + \phi) \\
 -m\omega^2 C_1 &= -2kC_1 + kC_2 \\
 0 &= (m\omega^2 - 2k)C_1 + kC_2
 \end{aligned} \tag{A.267}$$

同様に式 (251) の解を運動方程式 (236) に代入すると

$$\begin{aligned}
 m\ddot{u}_2 &= -2ku_2 + ku_1 \\
 m[-\omega^2 C_2 \cos(\omega t + \phi)] &= -2kC_2 \cos(\omega t + \phi) + kC_1 \cos(\omega t + \phi) \\
 -m\omega^2 C_2 &= -2kC_2 + kC_1 \\
 0 &= kC_1 + (m\omega^2 - 2k)C_2
 \end{aligned} \tag{A.268}$$

式 (A.267) と式 (A.268) は行列の式

$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{A.269}$$

の形にまとめることができる。これを変形すると、

$$\begin{aligned}
 -m\omega^2 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -m\omega^2 & 0 \\ 0 & -m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.270}$$

となる。方程式 $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明な解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つ条件は、行列 $\hat{A}$ が正則でないこと、つまり $\det \hat{A} = 0$ であることが必要である。これより $C_1 = C_2 = 0$ 以外の解は、

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} &= (m\omega^2 - 2k)^2 - k^2 \\
 &= (m\omega^2 - 2k - k)(m\omega^2 - 2k + k) \\
 &= m^2 \left(\omega^2 - \frac{3k}{m} \right) \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{A.271}$$

を満たす必要があり、

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \text{ or } \frac{3k}{m} \tag{A.272}$$

となる。