

力学 II 演習問題 [第 3 回] (2024.10.21 出題)

学修番号・名前

結果だけでなく途中の式と説明も書くこと。

- 図のように xy 平面に置いた厚さのない三角形の板の重心を考える。板は一様な面密度 σ を持つとする。以下の文章の空欄を式または数値で埋めよ（途中の式と説明は不要）。
- 式 (1) の y 成分の積分を実行し、 M に (2*) の結果を代入して重心の y 座標 Y を計算せよ。

まず板の質量を考える。この板は底辺 $2a$ で高さが b の三角形なので、面積は (1*) となり、全質量は面密度をかけて $M =$ (2*) となる。次に面積積分の範囲を考える。明らかに、 x については $x =$ (3*) から $x =$ (4*) まで積分すればよく、 y 積分の下限は常に $y =$ (5*) である。辺 PR に対応する直線を x の関数として表すと、これは $x = 0$ で $y = b$ 、 $x = -a$ で $y = 0$ となる x の一次関数なので、 $y =$ (6*) $x +$ (7*) である。同様に辺 RQ は $x = 0$ で $y = b$ 、 $x = a$ で $y = 0$ となる x の一次関数なので、 $y =$ (8*) $x +$ (9*) である。これらの関数が y の上限を与えるので、重心座標はベクトルの式として

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_{(3^*)}^0 dx \int_{(5^*)}^{(6^*)x+(7^*)} dy \sigma \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{M} \int_0^{(4^*)} dx \int_{(5^*)}^{(8^*)x+(9^*)} dy \sigma \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

で与えられる（式中の (5*) など上文章の空欄の答を代入する）。重心の z 成分については被積分関数が 0 であるので $Z = 0$ であり、三角形が y 軸について左右対称なので $X = 0$ である。

