

力学II 演習問題 [第4回] (2024.10.28 出題)

学修番号・名前

結果だけでなく途中の式と説明も書くこと。

- 半径 a の円弧状の1次元の剛体を、摩擦のない壁と静止摩擦係数 μ の地面に図のように立てかける。剛体は一律な線密度 λ を持つとする。以下の文章の空欄を式または数値で埋めよ（途中の式と説明は不要）。
- 剛体が滑らない最小の μ を求めよ。

まず剛体の質量を考える。この剛体は半径 a の円周の $1/4$ の長さなので、長さは (1^*) となり、全質量は線密度をかけて $M = (2^*)$ となる。重心を求めるのに2次元極座標 $x = r \sin \theta$ 、 $y = r \cos \theta$ を考えると、剛体上の点は $r = a$ として θ を (3^*) から (4^*) まで動かすことで得られる。 $r = a$ のとき、直交座標は $x = a \sin \theta$ 、 $y = a \cos \theta$ であり、半径 a の点で角度を $d\theta$ 動かしたときの微小線素（円弧の長さ）は $ad\theta$ なので、重心座標はベクトルの式として

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_{(3^*)}^{(4^*)} ad\theta \lambda \begin{pmatrix} a \sin \theta & a \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = \frac{2a}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $2\sqrt{2}/\pi \approx 0.9$ なので、重心は剛体の外に位置している。剛体にはたらく力は、地面との接地点 $\mathbf{r}_1 = ((5^*) \ (6^*) \ (7^*))$ に垂直抗力 $\mathbf{n}_1 = (0 \ n_1 \ 0)$ と摩擦力 $\mathbf{f} = (-f \ 0 \ 0)$ 、壁との接地点 $\mathbf{r}_2 = ((8^*) \ (9^*) \ (10^*))$ に垂直抗力 $\mathbf{n}_2 = (n_2 \ 0 \ 0)$ 、重心 \mathbf{R} に重力 $\mathbf{f}_g = (0 \ -Mg \ 0)$ がはたらいている。滑らない最小の μ のとき、 \mathbf{f} は最大静止摩擦力になっているため $f = (11^*)$ である。未知数4 (f, n_1, n_2, μ) に対し、力のつり合い2条件、力のモーメントのつり合い1条件、摩擦力の関係式1条件の計4条件あるので μ を決定できる。

