

力学 II

HATTORI Kazumasa *

2023 年 12 月 11 日

概要

学部 1 年生向け講義「力学 II」のノート。力学 II では主に複数の質点の集まりの運動についてニュートン力学を用いて解析する手法を学ぶ。複数の質点からなる系のことを「質点系」とよぶ。質点の数が多い場合は個々の質点の運動方程式を連立して解くのは難しいが、純粋な回転を除いて質点の相対的な位置が固定されている剛体の場合は、著しく簡単になることを示す（だけど難しい... かも）。同時期に学習する（はずの）線形代数の行列の対角化は慣性モーメントの計算や、連成振動の問題と密接に関わってくるので非常に重要である。特に頻出する実対称行列の対角化については付録に詳しい解説をつけておいた。後半は波動と振動について重点的に学び、フーリエ級数、フーリエ変換を用いて一次元の波動方程式を解析する。初めて本格的に偏微分方程式を扱うことになるが、現代科学の根幹部分と言っても過言ではないので、必ず理解できるようになってほしい。偏微分方程式についての詳しい講義は 2 年生の後期の物理数学 II でなされる（物理数学 II の pdf ノートも参照）。なお、* 印がついている部分は少しもしくはとても難易度が高いので最初は飛ばしても差し支えない。以下にこのノートを作成するときに参考にした教科書をあげておく：

- 今井功 監訳「パークレー物理学コース 力学 下」, 丸善（剛体について基礎的な部分を書いてある）
- 伊東敏雄「身近に学ぶ 力学入門」, 学術図書出版社（入門用に）
- ゴールドスタイン「古典力学 上」, 吉岡書店（難易度は高いが独楽の運動の解析は参考になる。解析力学向けかも。）
- 小形正男「振動・波動」, 裳華房（波に関してかなり丁寧な解説がされていて読みやすい。種々の小ネタも。）

* hattori@tmu.ac.jp

目次

1	質点系の力学	4
1.1	質点系の運動方程式	4
1.2	質点系の運動エネルギー	5
1.3	質点系の角運動量	5
2	衝突	7
2.1	弾性衝突・非弾性衝突	7
2.2	質量が時間的に変化する場合の運動	8
3	剛体の自由度と運動方程式	11
3.1	自由度	11
3.2	運動方程式	12
3.3	剛体に作用する力	13
4	剛体の重心・つり合い	15
4.1	剛体の重心	15
4.2	つり合い	16
5	剛体の角運動量	20
5.1	慣性モーメント	20
5.2	平行軸の定理	22
5.3	平板の定理（垂直軸の定理）	22
5.4	慣性モーメントテンソル	23
6	主軸変換	24
7	固定軸まわりの剛体の回転	29
7.1	アトウツドの装置	29
7.2	実体振り子	30
7.3	剛体の平面運動	31
8	オイラーの方程式	34
8.1	回転に関する運動方程式	34
8.2	独楽（コマ）の運動	37
9	連成振動	43
9.1	ばねにつながれた2つの質点の運動	43
9.2	うなり	46
9.3	抵抗のあるばねの強制振動*	47

9.4	ばねにつながれた 3 つの質点の運動	49
9.5	4 種のばねにつながれた質量の異なる 3 つの質点の運動 *	52
10	多数の質点の連成振動	54
10.1	連続極限と波動方程式：固定端	54
10.2	N 個の質点の連成振動：固定端	56
10.3	自由端	58
11	フーリエ級数・フーリエ変換	61
11.1	フーリエ級数	61
11.2	フーリエ変換	63
12	波動方程式	65
12.1	弦の振動	65
12.2	波のエネルギー	66
12.3	一次元波動方程式の解	66
12.4	定在波	68
12.5	波束	69
12.6	波束の減衰	71
13	一次元の波	73
13.1	固定端での反射	73
13.2	自由端での反射	73
13.3	媒質が異なる境界での透過と反射	75
13.4	エネルギーの流れ：連続の方程式 *	78
付録 A	実対称行列の対角化	82
A.1	固有方程式と固有値	82
A.2	固有ベクトルの直交性	82
A.3	実直交行列	83
A.4	対角化の計算の流れ	83
A.5	基底変換	84
付録 B	積分公式	90
B.1	ガウス積分	90
B.2	フーリエ積分	91

1 質点系の力学

1.1 質点系の運動方程式

質点が複数 ($i = 1, 2, \dots, N$) 個ある場合も、ニュートンの運動方程式は各質点の加速度と質点にはたらく力で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &: i \text{ 番目の質点の座標 (質量 } m_i), \\ \mathbf{F}_i &: i \text{ 番目の質点にはたらく外力}, \\ \mathbf{F}_{ji} &: j \text{ 番目の質点が } i \text{ 番目の質点におよぼす力 (内力)}, \end{aligned}$$

を定義すると、運動方程式は、時間微分 $\frac{dA}{dt}$ を $\dot{A}$ で表して、

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{41} + \dots, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{42} + \dots, \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{43} + \dots, \\ &\dots \dots \\ m_N \ddot{\mathbf{r}}_N &= \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_{2N} + \mathbf{F}_{3N} + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

のように書ける。ここで、外力 $\mathbf{F}_i$ は質点系に各質点からの重力ではない重力がはたらいているような場合に有限になる。例えば N 個の粒子の運動を地上で考える場合など。

式 (1) は N 個の連立二階微分方程式になっていて、書き下すだけでも大変である。その中にあって、一つの特別な座標 (重心座標) は、以下のように単純な方程式として記述されることがわかる。式 (1) を辺々たすと、

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \underbrace{\sum_{i>j}^N (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij})}_{\text{作用・反作用の法則より } 0} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad (2)$$

となる。また、重心の座標 $\mathbf{R}$ を以下のように定義する：

$$\mathbf{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad M \equiv \sum_{i=1}^N m_i. \quad (3)$$

ここで、 M は全質量である。 $\mathbf{R}$ についての運動方程式は、式 (2) より、

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad (4)$$

のように、外力の和にのみ依存する。つまり、重心の運動は個々の質点がどのように力を及ぼし合っているかには依存しない、ということである。式 (3) を時間で微分すると、重心の速度 $\mathbf{V}$ 、運動量 $\mathbf{P}$ を得る：

$$\mathbf{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{P} = M\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i. \quad (5)$$

ここで、質点 i の速度 $\mathbf{v}_i$ と運動量 $\mathbf{p}_i$ を用いた。式 (5) から明らかにわかるように、重心の運動量は剛体の全運動量に等しい。これに対して、重心の速度 $\mathbf{V}$ は速度の総和ではない。 $\mathbf{P}$ を用いると、式 (4) は、

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad (6)$$

と表される。

1.2 質点系の運動エネルギー

1.1 節で導入した重心座標を用いて、重心座標からみた相対座標（重心座標系） $\mathbf{r}'_i$ と速度 $\mathbf{v}'_i$ を定義しよう：

$$\mathbf{r}'_i \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{R}, \quad \text{および} \quad \mathbf{v}'_i \equiv \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{V}. \quad (7)$$

これらを用いて、全運動エネルギー K を表してみると、

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{V}|^2 + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}'_i|^2, \quad (8)$$

となる。右辺第二項は、

$$\mathbf{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} - M |\mathbf{V}|^2 = \mathbf{V} \cdot (M\mathbf{V}) - M |\mathbf{V}|^2 = 0, \quad (9)$$

となるので、

$$K = \frac{1}{2} M |\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}'_i|^2, \quad (10)$$

を得る。第一項は重心の運動エネルギー、第二項は相対運動の運動エネルギーの和である。

1.3 質点系の角運動量

i 番目の質点の角運動量を $\mathbf{L}_i$ とする。 $\mathbf{L}_i$ の時間微分は i 番目の質点にはたらく力のモーメントなので、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_1 &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{41} \cdots), \\ \dot{\mathbf{L}}_2 &= \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{42} + \cdots), \\ \dot{\mathbf{L}}_3 &= \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{43} + \cdots), \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{L}}_N &= \mathbf{r}_N \times (\mathbf{F}_N + \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_{2N} + \mathbf{F}_{3N} + \cdots), \end{aligned} \quad (11)$$

が成立する。辺々たして、作用反作用の法則 $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ を用いると、

$$\dot{\mathbf{L}} \equiv \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{L}}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_{j>i}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}. \quad (12)$$

右辺第二項は $\mathbf{F}_{ji} \parallel \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ であれば ($\parallel$ は平行を表す記号) 外積の定義より 0 である。平行でない場合は、一見するとどうなるかわからないが、通常考える力では常に 0 になるので、以下では右辺第二項は 0 であるとして進める。よって、全角運動量 $\mathbf{L}$ の時間微分 $\dot{\mathbf{L}}$ は外力のモーメント $\mathbf{N}_i$ を用いて、

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i, \quad (13)$$

と表される。

以下では、式 (13) を、式 (10) のように、重心座標と相対座標の寄与に分離してみよう。式 (7) を用いると、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i), \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i, \end{aligned} \quad (14)$$

となるが、重心の定義 (3)(5) より、

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = M \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) - M \mathbf{R} = 0, \quad (15)$$

および、

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) = M \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \right) - M \mathbf{V} = 0, \quad (16)$$

なので、

$$\mathbf{L} = M \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{L}', \quad \mathbf{L}' \equiv \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i, \quad (17)$$

と表される、右辺第一項は重心の角運動量、第二項 $\mathbf{L}'$ は相対角運動量、または重心まわりの角運動量と呼ばれる（後者の方が正確な意味だろう）。式 (17) の時間微分をとると、

$$\dot{\mathbf{L}} = M \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{V} + M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{0} + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \dot{\mathbf{L}}', \quad (18)$$

である。一方、外力のモーメントを用いた関係式 (13) より、

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i, \quad (19)$$

となる。式 (18) と式 (19) を比較すると、重心まわりの角運動量の時間微分は、

$$\dot{\mathbf{L}}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}'_i, \quad (20)$$

となる。つまり、重心まわりの角運動量の時間微分は重心に関する（重心まわりの）外力のモーメント $\mathbf{N}'_i$ の和になる。

2 衝突

2.1 弾性衝突・非弾性衝突

- 衝突：物体間の相互作用の過程．図 1 の様に，質量 m_1 と m_2 の物体が「撃力」 $\mathbf{F}_{12}$ を及ぼし合って速度が $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ から $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ に変わる過程．

衝突の過程では外力は働いていない（もしくは撃力は一般に非常に大きく，外力を無視できる）ので全運動量が保存する：

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2. \quad (21)$$

全力学的エネルギーが保存する場合を弾性衝突と呼び，

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\mathbf{v}_2|^2 = \frac{1}{2} m_1 |\mathbf{v}'_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\mathbf{v}'_2|^2, \quad (22)$$

である．ただし，ここでは位置エネルギーは考慮しないものとする．初速度 $\mathbf{v}_{1,2}$ が与えられた時，式 (21) と式 (22) を用いれば， $\mathbf{v}'_{1,2}$ が求まる．一方，全力学的エネルギーが保存しない場合を非弾性衝突とよぶ．

♠ 例 1：一次元の非弾性衝突

一次元での衝突を考えると，運動量保存より $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$ である．非弾性衝突を特徴付けるはねかえり係数 e は以下の式で定義される：

$$\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = -e. \quad (23)$$

重心座標系で考えると見通しが良い．重心速度 V は，

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{m_1 v'_1 + m_2 v'_2}{M}, \quad M \equiv m_1 + m_2, \quad (24)$$

なので，重心から見た衝突前の速度 $u_{1,2}$ は，

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - V = \frac{m_1 + m_2}{M} v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{m_2}{M} (v_1 - v_2), \\ u_2 &= v_2 - V = \frac{m_1 + m_2}{M} v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = -\frac{m_1}{M} (v_1 - v_2), \end{aligned}$$

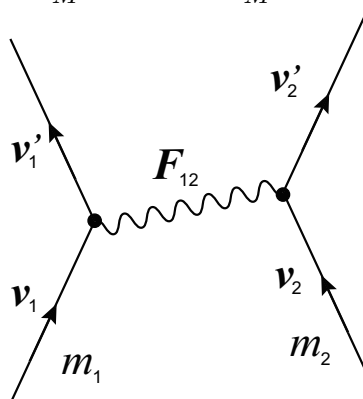


図 1 二つの物体の衝突と撃力．

と表すことができる．重心系での速度 $u_{1,2}$ に対して，元の $v_{1,2}$, $v'_{1,2}$ のことを実験室系の速度とよんだりする．一方，重心から見た衝突後の速度 $u'_{1,2}$ は，

$$\begin{aligned} u'_1 &= v'_1 - V = \frac{m_2}{M}(v'_1 - v'_2) \xrightarrow{\text{式(23)}} \frac{m_2}{M}(-e)(v_1 - v_2) = -eu_1, \\ u'_2 &= v'_2 - V = -\frac{m_1}{M}(v'_1 - v'_2) \xrightarrow{\text{式(23)}} -\frac{m_1}{M}(-e)(v_1 - v_2) = -eu_2, \end{aligned}$$

となる．よって，重心系においては衝突前の速度 $\{u_1, u_2\}$ が衝突後は $\{-eu_1, -eu_2\}$ となることがわかる．

衝突前の全運動エネルギーを計算してみると，

$$K = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 m_2^2 (v_1 - v_2)^2}{2M^2} + \frac{m_2 m_1^2 (v_1 - v_2)^2}{2M^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} (v_1 - v_2)^2 = \frac{\mu}{2} (v_1 - v_2)^2, \quad (25)$$

ここで換算質量： $\mu^{-1} \equiv m_1^{-1} + m_2^{-1}$ を用いた．衝突後は速度が $-e$ 倍されるので，

$$K' = \frac{\mu e^2}{2} (v_1 - v_2)^2, \quad (26)$$

である．弾性衝突の場合は力学的エネルギーが保存されるので $e = 1$ ，非弾性衝突の場合は力学的エネルギーが減少する（非弾性衝突という分にはエネルギーをもらっても良いが，通常は衝突の際に摩擦や，熱，音などに変換されエネルギーを失うことが想定されている）ので， $e < 1$ となる．また，特に $e = 0$ を完全非弾性衝突と呼び，二つの物体が合体して運動することに対応する（重心系での運動エネルギーが 0）．

♠ 例 2：二つの球の衝突

図 2 の様に x, y 軸をとる．撃力は x 方向にのみはたらくので y 方向の各々の球の運動量（したがって速さ）は保存する． x 方向の全運動量保存と x 方向のはねかえり係数を e として，

$$v'_{1x} - v'_{2x} = -e(v_{1x} - v_{2x}), \quad m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}, \quad (27)$$

が成り立つ．連立して衝突後の速度の x 成分を求めると， $M \equiv m_1 + m_2$ として，以下を得る：

$$\begin{aligned} v'_{1x} &= \left[1 - \frac{m_2}{M}(1+e)\right] v_{1x} + \frac{m_2}{M}(1+e)v_{2x}, \\ v'_{2x} &= \frac{m_1}{M}(1+e)v_{1x} + \left[1 - \frac{m_1}{M}(1+e)\right] v_{2x}. \end{aligned}$$

2.2 質量が時間的に変化する場合の運動

地表から宇宙に向けて発射されるロケットは大量の燃料を積んでいる．ロケットはこれらの燃料を進行方向と逆向きに噴射し加速していく．この時，ロケットと燃料の全質量は時間とともに変化（減少）していくことになるが，この様な場合には運動方程式をどの様に考えれば良いのだろうか？

時刻 t において，ロケットと燃料の全質量を $m(t)$ として，速度 $v(t)$ で「一緒に」運動しているとする．微小時間 Δt の間に一部の燃料をロケットから見て速さ V で進行方向と逆向きに噴射すると考える．この噴射された燃料の質量を $-\Delta m$ とおき，時刻 $t + \Delta t$ における，（一緒に動いている）ロケットと燃料の速度を $v(t) + \Delta v$ とおく．全質量は，噴射した燃料の分を引いて $m(t + \Delta t) = m(t) + \Delta m$ であるので，全運動量は，

$$[m(t) + \Delta m][v(t) + \Delta v] = m(t)v(t) + \Delta m v(t) + m(t)\Delta v + \Delta m \Delta v \simeq m(t)v(t) + \Delta m v(t) + m(t)\Delta v, \quad (28)$$

となる，ここで，微小量の二次の項は無視できることを用いた．一方，噴射された燃料の運動量は，

$$-\Delta m[v(t) - V], \quad (29)$$

と書ける．ここで， $v(t) + \Delta v$ ではなく $v(t)$ を用いているが，どちらにせよ， $\Delta m \Delta v$ の項は無視することができる為，時刻 t における速度 $v(t)$ を使おうが $t + \Delta t$ での速度 $v(t) + \Delta v$ を使おうが同じになる．式 (28) と式 (29) を用いると，時刻 t から $t + \Delta t$ の間に変化した「ロケットと燃料」と噴射された燃料の全運動量 ΔP は，

$$\begin{aligned} \Delta P &= \left\{ m(t)v(t) + \Delta m v(t) + m(t)\Delta v - \Delta m[v(t) - V] \right\} - m(t)v(t), \\ &= m(t)\Delta v + \Delta m V. \end{aligned} \quad (30)$$

Δt で割ると運動方程式 (6) を用いることができ，以下を得る：

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = m(t) \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} V \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \dot{P} = m(t)\dot{v}(t) + \dot{m}(t)V = F(t) = -m(t)g. \quad (31)$$

最右辺は，ロケットと燃料にはたらく重力 (=外力) $F(t) = -m(t)g$ である．ここでも $m(t)$ でなく $m(t) + \Delta m$ としても，結局 $m(t)g \gg \Delta mg$ なので $m(t)$ を用いて良い． $m(t)$ で割って整理すると，

$$\dot{v}(t) = -g - V \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}. \quad (32)$$

これは変数分離の形になっているので， t で積分すると，

$$v(t_1) - v(t_0) = -g \int_{t_0}^{t_1} dt - V \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} dt = -g(t_1 - t_0) - V \int_{m(t_0)}^{m(t_1)} \frac{dm}{m} = -g(t_1 - t_0) - V \ln \left[\frac{m(t_1)}{m(t_0)} \right], \quad (33)$$

を得る． $t_0 = 0$ で $v(0) = v_0$ ， $m(0) = m_0$ とすると， t_1 を t とかいて，

$$v(t) = v_0 - gt + V \ln \left[\frac{m_0}{m(t)} \right], \quad (34)$$

である [ツィオルコフスキー (Tsiolkovsky) の公式]．右辺最後の項により，噴射速度に比例して速度が増大することになる ($m(t) < m_0$)．対数の中は最初と最後の質量の比になっており，質量比とよぶ．

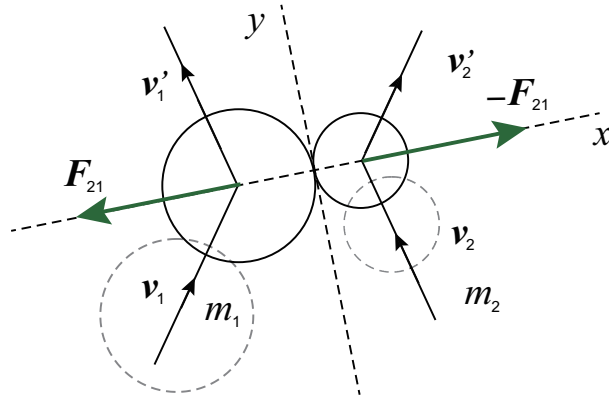


図2 二つの球の衝突.

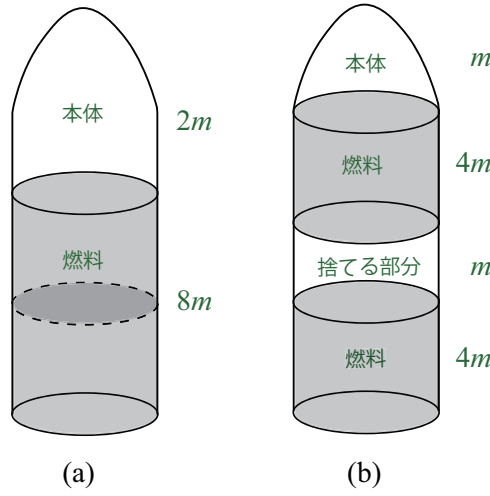


図3 総質量 $10m$ ，うち燃料 $8m$ の (a) 一段式ロケットと (b) 二段式ロケット．

♠ 例3：多段ロケット

実際のロケットは多段の燃料を積んでいる．第●燃料切り離し～，というロケットの発射中継を見た人もいるかもしれない．これは多段にした方が最終的に大きな速度が出しやすいという事実がある．式 (34) を用いて，図3に示したような同じ量の燃料 $8m$ を積んだ，総質量 $10m$ の二種類のロケットがどれだけ加速されるのかを考えてみよう．まず，図3(a)のロケットの場合は燃料の噴出速度を V とすると，式 (34) より，全ての燃料を噴出した時刻 t^* での本体の速さは，

$$v(t^*) = v_0 - gt^* + V \ln 5, \quad (35)$$

となる．図3(b)のロケットの場合は，燃料が二つに別れており，“捨てる部分”は燃料を積載するのに必要な部分とでも思ってもらおう．まず，質量 $4m$ の燃料を噴出速度 V で使い切った時刻 t' での速さは，

$$v(t') = v_0 - gt' + V \ln \frac{5}{3}. \quad (36)$$

“捨てる部分”は静かに射出するものとする，残った燃料 $4m$ を全て噴出した時刻 t'' での本体の速さは，

$$v(t'') = v(t') - g(t'' - t') + V \ln 5 = v_0 - gt'' + V \left(\ln \frac{5}{3} + \ln 5 \right). \quad (37)$$

$t'' \sim t^*$ であると仮定すると，図3(b)の場合の方が $V \ln \frac{5}{3}$ だけより加速されることがわかる．図3(a)の場合は最後に残っている本体の質量が図3(b)の2倍あるので，“公平”な比較ではないと思うかもしれない．図3(a)の本体の半分を最後に射出速度 V (!) で捨てたとすると， $V \ln 2$ が加わる^{*1}．もちろん (b) の場合と同様にゆっくり捨てれば一切加速されない．このような（大雑把な議論だが...）理由から，多段のロケットが主に使われているようである．

^{*1}これは式 (34) を使っているが，普通に分離して速さが v_{fin} になったとすると，運動量保存より $2mv(t^*) = mv_{\text{fin}} + m(v(t^*) - V) \rightarrow v_{\text{fin}} = v(t^*) + V$ である． $V \ln 2$ の場合もこの場合も，もちろん燃料の噴射速度と同じ速度では切り離せないので非現実的．

3 剛体の自由度と運動方程式

- 剛体：力が加わっても形が変化しない物体 (質点系). いわゆる堅い物体である. 全ての質点間の距離が不変, したがって, 任意の 3 つの質点からなる三角形が不変であるような質点系.

3.1 自由度

N 個の質点系には各質点の位置座標 $\mathbf{r}_i$ の自由度があり, 合計 $3N$ 個の座標がある. 運動方程式を解くには初期座標 $3N$ 個に加えて初速度をさらに $3N$ 個与える必要がある. このように, 一般の質点系では膨大な数の自由度があるが, 全ての質点間の距離が固定されている剛体では実は自由度はそれほど多くない. このことを, 質点 1, 2, 3, $\dots$ を位置座標 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$ に順次付け加えていくことで調べてみよう.

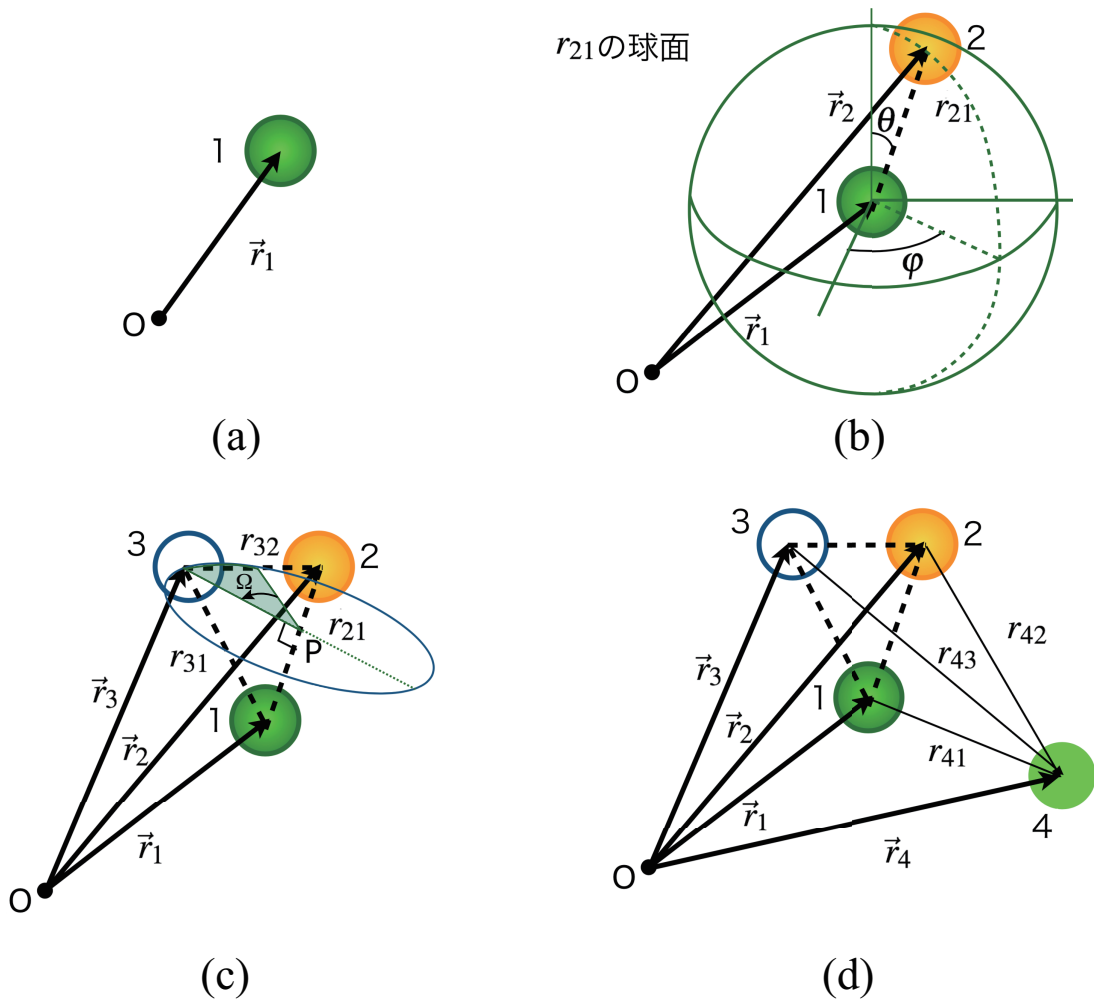


図4 剛体の自由度. (a) $N=1$, (b) $N=2$, (c) $N=3$, (d) $N=4$.

♠ 例 4 : $N = 1$

この場合は、質点が 1 つあるだけなので、自由度としては座標の成分の数と同じ **3 自由度**である [図 4(a)].

♠ 例 5 : $N = 2$

次に $N = 2$ の場合では、質点 1 の座標 $\mathbf{r}_1$ から二つ目の質点 2 の座標 $\mathbf{r}_2$ への相対座標 $\mathbf{r}_{21}$ を考える。「剛体」ということは $r_{21} = |\mathbf{r}_{21}|$ は一定であるので、自由度としては、 $\mathbf{r}_1$ の位置 (3 自由度) と $\mathbf{r}_{21}$ の位置 (3 自由度) のうち二つの角度 [図 4(b)] を考慮した合計 **5 自由度**となる。この二つの角度の取り方は自由にとって良いが、図 4(b) では 3 次元の極座標の 2 つの角度 θ, φ のようにとっている。このとき、剛体を $\mathbf{r}_1$ を原点にして回転させると、 $\mathbf{r}_{21}$ は半径 r_{21} の球面を動くことになる。

♠ 例 6 : $N = 3$

続いて $N = 3$ を考えると、図 4(c) のように、質点 1, 2 からの距離が r_{31} および r_{32} で一定であるような座標 $\mathbf{r}_3$ が $N = 3$ の場合の剛体である。このような座標 $\mathbf{r}_3$ は、図のような質点 1, 2 の間を結ぶ線分に垂直な面内の円周上になければいけない。つまり、その円周上のどの角度にあるか、という自由度 Ω が 1 つ加わることになり、合計で、 $\mathbf{r}_1$ の座標、 $\mathbf{r}_{21}$ の 2 つの角度変数とあわせて **6 自由度**である。

♠ 例 7 : $N = 4$

同様に $N = 4$ を考えよう。4 つ目の質点 4 を付け加えるとこれまでのように、その他の (つまり一つ目から三つ目までの) 質点を固定したまま、質点 4 だけを連続的に動かせる自由度がないことがわかる [図 4(d)]。よって、 $N = 4$ の場合の剛体の自由度は $N = 3$ のときから増えず、**6 自由度**であることがわかる。このような考え方をすれば、 N をこれ以上大きくしても自由度は増えないことが理解できる。

以上から、 $N \geq 3$ の剛体の自由度はたかだか **6 自由度**であることがわかった。以下ではこの 6 つの自由度を支配するニュートンの運動方程式を書き下すことにしよう。

3.2 運動方程式

剛体の 6 つの自由度は重心の座標と回転角に対応している。後々に学習する解析力学の考え方をを用いると、座標の値や回転角度を「変化させる～生成する」運動量が存在することが知られている。重心の座標を「動かす」のは重心の運動量 $\mathbf{P}$ である。また、重心の周りの回転角度を「回転させる」のは角運動量 $\mathbf{L}'$ である。これらの「運動量」はベクトルなので 2 つで合計 6 つの成分があり、運動方程式は式 (6) と式 (20) としてすでに求まっている：

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad \dot{\mathbf{L}}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i. \quad (38)$$

もしくは、第二式は、問題に応じて適当に設定した原点の周りの角運動量の式 (13)：

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (39)$$

でも代用可能である。

3.3 剛体に作用する力

重心運動に関する運動方程式は式 (38) の様に外力の総和：

$$\mathbf{F} \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad (40)$$

にしか依存していない。一方、回転に関しては外力のモーメントの和でしかない。もし、力 $\mathbf{F}$ の作用点 $\mathbf{r}$ が、

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (41)$$

の様に定義できれば、多くの力 $\mathbf{F}_i$ による剛体の運動が一つの力 $\mathbf{F}$ による運動として記述できることになる。

3.3.1 剛体に作用する重力

図 5 の様に、剛体を N 個の微小部分に分割して i 番目の微小部分の質量を m_i 、座標を $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ とする。また、剛体の全質量は以前と同様に $M = \sum_{i=1}^N m_i$ とする。負の z 方向に重力加速度の大きさを g として重力がかかっているとき、 i 番目の微部分にかかる重力 (=外力) は、

$$\mathbf{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}) = (0, 0, -m_i g), \quad (42)$$

である。また、力の総和 $\mathbf{F}$ は、

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \left(0, 0, -\sum_{i=1}^N m_i g \right) = (0, 0, -Mg), \quad (43)$$

となる。この時、作用点 $\mathbf{r}$ はどこになるだろうか？作用点 $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ の定義 (41) より、

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = (x, y, z) \times (0, 0, -Mg) = Mg(-y, x, 0). \quad (44)$$

また、

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (x_i, y_i, z_i) \times (0, 0, -m_i g) = g \sum_{i=1}^N (-m_i y_i, m_i x_i, 0), \quad (45)$$

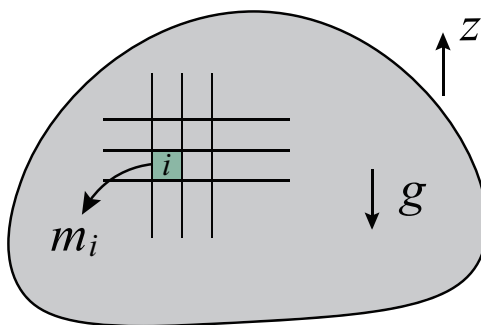


図 5 剛体にはたらく重力。

であるので、両者を比較して、

$$\begin{aligned} -yMg &= -\sum_{i=1}^N m_i y_i g & \rightarrow & y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \\ xMg &= \sum_{i=1}^N m_i x_i g & \rightarrow & x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \end{aligned} \quad (46)$$

を得る。つまり、作用点 $\mathbf{r}$ は力の方向 (z 方向) を除いて重心座標 $\mathbf{R}$ に他ならない。作用点の定義が外積 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を用いていることから、 $\mathbf{F}$ と平行な $\mathbf{r}$ の成分は決めることができない。ただし、決められなくとも、運動方程式には現れない為、適当に選んでも構わない。重力の場合は、 z 成分に関しても重心の z 座標にとってしまっても問題ない。

ところで作用点は原点のまわりの回転に関する運動方程式を簡単化するために導入されたが、重心のまわりの回転に関する運動方程式 (20) はどうなるのだろうか？直接計算してみると、

$$\dot{\mathbf{L}}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}'_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} - \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (47)$$

となり (今、 $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ である)、 $\mathbf{L}'$ は時間変化しないことが示される。つまり、重力がはたらいている場合でも、重心のまわりの角運動量 $\mathbf{L}'$ は一定に保たれるというよく知られた事実を表している。

3.3.2 偶力

作用点 $\mathbf{r}$ はいつも定義できるわけではない。偶力とは同じ大きさで反対向きの力 $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ が剛体の異なる点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に作用している場合の力のことをいう。つまり、力の総和は $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ であるにもかかわらず、力 $\mathbf{F}$ の作用点を定義する式は、

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 \neq \mathbf{0}, \quad (48)$$

となり、この式を満足するような $\mathbf{r}$ を定義することができない。この場合の力のモーメント $\mathbf{N}$ を特に偶力のモーメントとよび、その大きさは $\mathbf{F}_1$ と $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ のなす角を θ 、 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ の $\mathbf{F}_1$ への射影の長さを h と

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r}_{12}| |\mathbf{F}_1| \sin \theta = |\mathbf{F}_1| h,$$

と表すことができる。

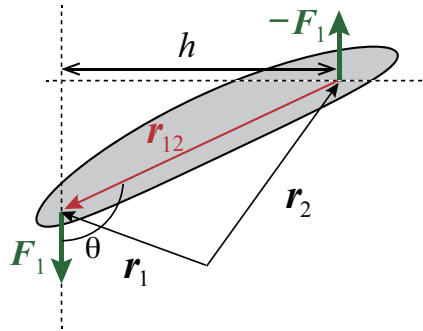


図6 偶力.

4 剛体の重心・つり合い

4.1 剛体の重心

くりかえしでてきていることからわかるが、剛体の重心座標 $\mathbf{R}$ は重要な量である。ここでは、重心座標を積分して求めてみよう。重心座標の定義は和の形で式 (3) で与えられているので、重心座標 $\mathbf{R}$ は、

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \Delta V \underbrace{\frac{m_i}{\Delta V}}_{\text{密度 } \rho(\mathbf{r}_i)} \mathbf{r}_i \xrightarrow{\text{積分の極限}} \frac{1}{M} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \quad M = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}), \quad (49)$$

のような積分で計算できる。積分範囲を明記していないが、剛体の外側では $\rho(\mathbf{r}) = 0$ であると思えば良い。全質量 M についても密度 $\rho(\mathbf{r})$ の体積積分で表されることは自明であろう。

図 7 にいくつかの剛体の例を示している。以下で全質量 M と重心座標 $\mathbf{R}$ を求めておこう。

♠ 例 8 : 質量の異なる三つの質点からなる正三角形の剛体 [図 7(a)]

$$M = 6m, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{6m} \left[m(0, a) + 2m \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}} \right) + 3m \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{a}{6} \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{a}{12} \left(1, -\frac{5}{\sqrt{3}} \right).$$

♠ 例 9 : 密度 ρ の半円 (ここでは ρ は面密度) [図 7(b)]

$$M = \frac{\rho}{2} \pi a^2, \quad \mathbf{R} = (X, Y) = \frac{2}{\pi \rho a^2} \int_{0 < y < \sqrt{a^2 - x^2}} d\mathbf{r} (x, y) \rho.$$

半円が y 軸に関して対称なので明らかに $X = 0$ になる。これは積分の変数 x を $x \rightarrow -x$ としたときに符号が変わることからも理解できる。 Y に関しては、

$$Y = \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy y = \frac{1}{\pi a^2} \int_{-a}^a dx (a^2 - x^2) \frac{1}{\pi a^2} \left[2a^3 - \frac{2a^3}{3} \right] = \frac{4a}{3\pi},$$

である。確かに、 $Y < \frac{a}{2}$ である。積分は極座標を用いると以下のようにも書ける：

$$Y = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a r dr \int_0^\pi d\theta r \sin \theta = \frac{4}{\pi a^2} \int_0^a r^2 dr = \frac{4a}{3\pi}.$$

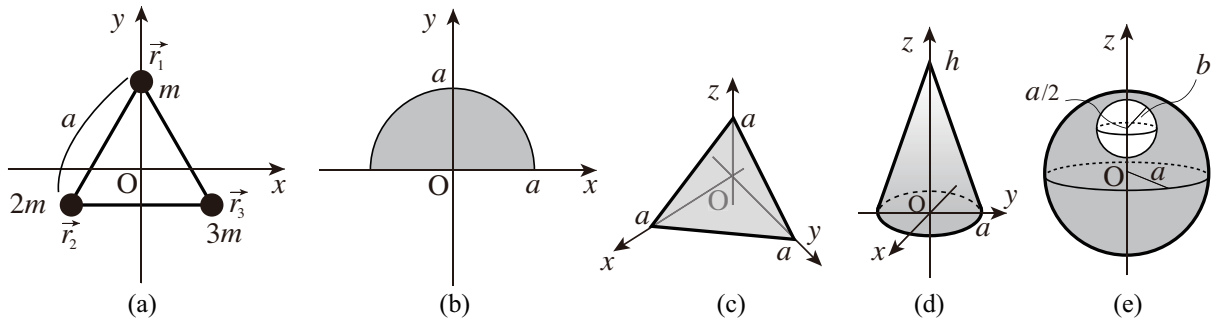


図 7 剛体の例. (b)-(e) では密度は一定で ρ とする.

♠ 例 10 : 密度 ρ , $x, y, z > 0, x + y + z < a$ で囲まれた領域 [図 7(c)]

この剛体の x, y, z の 3 方向は全て等価であるので, 重心座標は $\mathbf{R} = (Z, Z, Z)$ となることがわかる. 高さ z の断面の三角形の面積は $(a - z)^2/2$ なので,

$$M = \rho \int_0^a dz \frac{(a - z)^2}{2} = \frac{\rho a^3}{6}, \quad Z = \frac{6}{\rho a^3} \int_0^a dz \rho z \frac{(a - z)^2}{2} = 3a \int_0^1 du u(1 - u)^2 = 3a \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{a}{4},$$

である.

♠ 例 11 : 密度 ρ , 半径 a , 高さ h の円錐 [図 7(d)]

重心は z 軸上にあるのは自明なのと, 高さ z の断面の円の半径は $a - az/h$ であることから,

$$M = \frac{\rho \pi a^2 h}{3}, \quad Z = \frac{3}{\pi \rho a^2 h} \int_0^h dz z \int_0^{a - az/h} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \rho = \frac{3}{h} \int_0^h dz z \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 = 3h \int_0^1 du u(1 - u)^2.$$

積分は一つ前の例と同じなので, $Z = \frac{h}{4}$ である.

♠ 例 12 : 密度 ρ , 半径 a の球の内部の高さ $a/2$ の点を中心に半径 $b < a/2$ の球が空洞になっている剛体 [図 7(e)]

重心は z 軸上にあるのは自明なのと, 半径 a の球内の積分から, 半径 b の球の積分の差をとれば全質量, 重心が求まることから,

$$M = \frac{4\pi\rho}{3} [a^3 - b^3], \quad Z = \frac{1}{M} \int_{r < a} d\mathbf{r} z \rho - \frac{1}{M} \int_{|r - a\hat{z}/2| \leq b} d\mathbf{r} z \rho \xrightarrow{r' = r - a\hat{z}/2} 0 - \frac{\rho}{M} \int_{|r'| \leq b} d\mathbf{r}' \left(z' + \frac{a}{2}\right).$$

z' の積分は 0 なので, 結局,

$$Z = -\frac{a}{2M} \frac{4\pi\rho b^3}{3} = -\frac{1}{2} \frac{ab^3}{a^3 - b^3},$$

となる.

4.2 つり合い

- つり合っている条件 : 剛体の全運動量 (=重心の運動量) $\mathbf{P}$ と角運動量 $\mathbf{L}$ が時間変化しない.

ここで, つり合っているときは, 任意の点のまわりの角運動量が時間変化しないことが以下のようにして理解できる. つり合いの条件より, 運動方程式 (6) と, ある適当な点のまわりの角運動量 $\mathbf{L}$ について, (39) より,

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0},$$

が成立している. 座標系の原点を $\mathbf{a}$ だけずらして, $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{a}$ とし, $\mathbf{a}$ のまわりの角運動量 $\mathbf{L}_a$ を考えると,

$$\dot{\mathbf{L}}_a = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{a} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} - \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

となるので, $\mathbf{L}_a$ は時間変化しない. ここで, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ および $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ であることを用いた. $\mathbf{a}$ は任意にとれるので, 結局, つり合っているときは任意の点のまわりの角運動量が時間変化しないことになる.

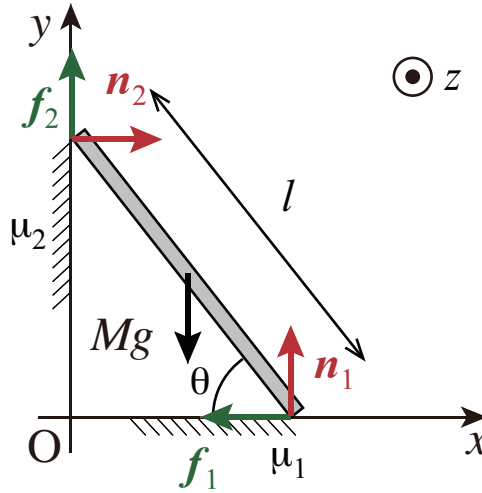


図8 斜めにたてかけた棒.

♠ 例 13 : 斜めにたてかけた棒

図8のように、質量 M 、長さ l の一様な棒が壁に地面との角度 θ でたてかけられている。壁と地面は静止摩擦係数 $\mu_{1,2}$ の摩擦係数 $f_{1,2}$ があり、それぞれの垂直抗力を $n_{1,2}$ とする。棒が滑り出す最大の θ を求めたい。

棒が滑らないとき、つり合いの条件が成立している。つまり、力の総和 $\mathbf{F}$ と任意の点のまわりの力のモーメント $\mathbf{N}$ が $\mathbf{0}$ である。まず、力の総和 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ を考える。摩擦係数と垂直抗力の向きを図8のようにとり、それぞれの大きさを $f_{1,2}$, $n_{1,2}$ とおくと、

$$F_x = -f_1 + n_2 = 0, \quad F_y = n_1 + f_2 - Mg = 0, \quad (50)$$

である。原点のまわりの力のモーメント $\mathbf{N}$ は、地面との接地点の座標を $\mathbf{r}_1$ 、壁との接地点の座標を $\mathbf{r}_2$ 、棒の重心座標を $\mathbf{R}$ とすると、

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times (-f_1, n_1, 0) + \mathbf{r}_2 \times (n_2, f_2, 0) + \mathbf{R} \times (0, -Mg, 0) = (0, 0, ln_1 \cos \theta) - (0, 0, ln_2 \sin \theta) - (0, 0, Mgl \cos \theta/2),$$

となる。 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ なので、

$$n_1 - n_2 \tan \theta = \frac{Mg}{2}, \quad (51)$$

を得る。角度 $\theta = \pi/2$ から徐々に θ を小さくしていくと、両方の摩擦係数がともに最大静止摩擦係数に達する（片方だけ達しても滑り出さない）。このとき、 $f_1 = \mu_1 n_1$, $f_2 = \mu_2 n_2$ であり、式 (50) より、

$$n_2 = f_1 = \mu_1 n_1, \quad n_1 + f_2 = Mg \rightarrow n_1 + \mu_2 n_2 = Mg,$$

を得る。これらを連立して n_1 , n_2 を求めると、

$$n_1 = \frac{Mg}{1 + \mu_1 \mu_2}, \quad n_2 = \frac{\mu_1 Mg}{1 + \mu_1 \mu_2},$$

となる。このときの θ を θ_m と書いて、式 (51) に代入すると、

$$\tan \theta_m = \frac{n_1 - \frac{Mg}{2}}{n_2} = \frac{1}{\mu_1} - \frac{Mg}{2} \frac{1 + \mu_1 \mu_2}{\mu_1 Mg} = \frac{1}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2},$$

となることがわかる． $\mu_2 \geq \mu_1^{-1}$ のとき $\theta_m = 0$ となり棒は滑り出さない．

♠ 例 14：垂直抗力の作用点

摩擦のある斜面上にある物体にはたらく力は、

$$\text{重力： } Mg, \quad \text{垂直抗力： } R = Mg \cos \theta, \quad \text{摩擦力： } F = Mg \sin \theta,$$

である．この物体が回転するかどうかを判断するには、力の作用点の情報が必要になる．重力の作用点は重心にとれることは以前見たとおりであるが、 R と F に関しては作用点はどこであるべきなのだろうか？以下では、重力、垂直抗力、摩擦力ベクトルをそれぞれ、 Mg , R , F とかくことにする．また、合力 $R + F$ の作用点を重心から測って r の位置の底面にあるものとする．

(i) 物体が静止しており、回転しないとき

力の総和と重心まわりの力のモーメント N' は、

$$R + F + Mg = 0, \quad N' = 0 \times Mg + r \times (R + F) = 0 \quad (\text{回転しないのでゼロ}).$$

このことから、 $R + F$ は Mg と同じ大きさで逆向きであり、作用点は $r \parallel R + F$ である．つまり、作用点は重心から鉛直下に下ろした直線と底面の交点にある．

(ii) 物体が静止しているが、回転し始めるとき

重心まわりの力のモーメント N' は、

$$N' = 0 \times Mg + r \times (R + F) = 0,$$

を満足する r が底面上に取れない場合に回転することがわかる．よって、回転し始める時は作用点 r は物体の底面の端に位置している．

(iii) 物体が降下しているが、回転しないとき

物体にはたらく全合力は斜面平行方向下向き ($\hat{x}$ 方向とする) になっているので、

$$R + F + Mg = f \hat{x}$$

である．この時の力のモーメントは

$$N' = r \times (R + F) = 0,$$

を満たすように作用点 r を物体の底面内（重心から鉛直下に下ろした直線と底面の交点ではない）に取ることが可能になる．また、動いている場合は静止している場合に比べて物体の重心が高くても回転しにくいことがわかる．

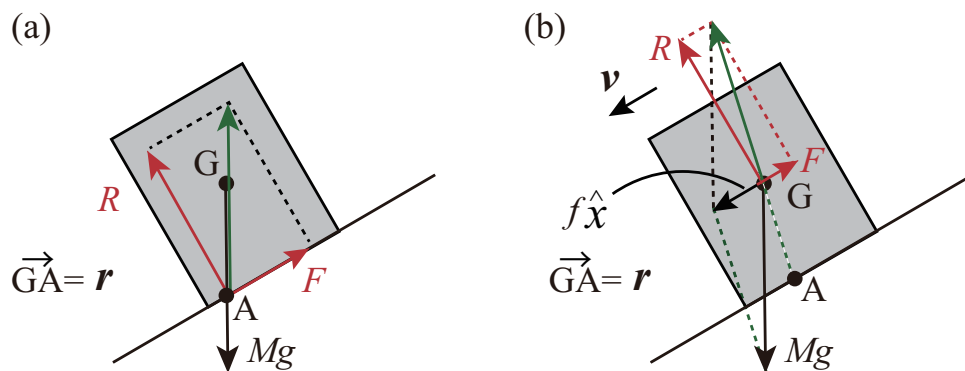


図9 垂直抗力と摩擦力の作用点 A ．重心の位置を G と表す．(a) 静止かつ回転しない場合．(b) 回転せずに降下している場合．回転しない場合は作用点 A から合力 $\mathbf{R} + \mathbf{F}$ を描くと重心 G の方向にならないといけない．

5 剛体の角運動量

5.1 慣性モーメント

剛体が角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している場合の剛体の角運動量はどのように表されるかを調べよう、簡単のため、角速度は一定で、その方向を z 軸の正の向きにとろう： $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$ 。以前やったように、剛体を N 個の微小な質点に分割し、 i 番目の質点の座標、質量を $\mathbf{r}_i$, m_i とする。また、 z 軸と $\mathbf{r}_i$ のなす角度を θ_i とする。この質点の速度は角速度を用いると、 $\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \omega(-y_i, x_i, 0)$ であり、原点まわりの角運動量の z 成分 L_z は、

$$L_z = \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i \times (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \right] \cdot \hat{z} = \omega \sum_{i=1}^N m_i \left[(x_i, y_i, z_i) \times (-y_i, x_i, 0) \right] \cdot \hat{z} = \omega \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (52)$$

のように計算される。ここに現れた、剛体の形とその密度分布にのみ依存する量を慣性モーメントとよび、

$$I \equiv \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{(x_i^2 + y_i^2)}_{\rightarrow |\mathbf{r}_i|^2 \sin^2 \theta_i} = \sum_{i=1}^N \Delta V \frac{m_i}{\Delta V} (x_i^2 + y_i^2) \xrightarrow{\text{積分の極限}} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) |\mathbf{r}|^2 \sin^2 \theta, \quad (53)$$

である (後ほど出てくることになるが、ここでの慣性モーメントは正確には z 軸まわりの慣性モーメント、もしくは z 軸に関する慣性モーメント等とよばれる)。 I は回転軸からの距離 $|\mathbf{r}| \sin \theta$ の二乗に密度をかけたものを体積積分して得られる。 I を用いると、

$$L_z = I\omega, \quad (54)$$

である。

慣性モーメントは運動エネルギーを表すのにも便利である：

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \omega^2 (x_i^2 + y_i^2) = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (55)$$

式 (54) と式 (55) は、もし、 $I \rightarrow m$, $\omega \rightarrow v$ とおきかえれば、質点における質量 m と速度 v に対する運動量と運動エネルギーの表式とそっくりである：

$$\text{質点} : p = mv, \quad K = \frac{mv^2}{2} \longleftrightarrow \text{剛体} : L_z = I\omega, \quad K = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (56)$$

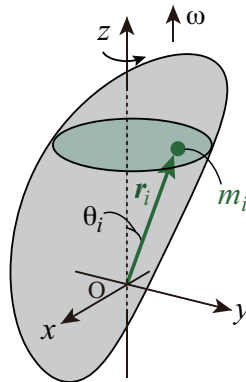


図 10 z 軸まわりに角速度 ω で回転する剛体。

♠ 例 15：一様な長さ l ，線密度 λ の細い棒の重心のまわりの棒に垂直な軸の慣性モーメント

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda x^2 dx = 2 \frac{\lambda}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 = \frac{\lambda l^3}{12} = \frac{Ml^2}{12}.$$

♠ 例 16：一様な面密度 σ ，一辺の長さが a, b の薄い正方形の板の重心のまわりの板に垂直な軸の慣性モーメント

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \sigma (x^2 + y^2) = \sigma \left[b \int_{-a/2}^{a/2} dx x^2 + a \int_{-b/2}^{b/2} dy y^2 \right] = \frac{\sigma}{12} (ba^3 + ab^3) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$

♠ 例 17：一様な面密度 σ で，半径 a の円板の重心のまわりの板に垂直な軸の慣性モーメント

$$I = \int d\mathbf{r} \sigma |\mathbf{r}|^2 = 2\pi\sigma \int_0^a dr r^3 = \frac{\pi\sigma a^4}{2} = \frac{Ma^2}{2}.$$

♠ 例 18：一様な密度 ρ で，半径 a の球の重心のまわりの慣性モーメント

球の場合は中心を通る軸であれば全て等価である．適当な方向を z 軸にとって，円柱座標を使うと，

$$I = \int_{-a}^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} dr r \int_0^{2\pi} d\theta \rho r^2 = 2\pi\rho \int_{-a}^a dz \frac{(a^2-z^2)^2}{4} = \pi\rho \left[a^5 - 2a^2 \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} \right] = \frac{8\pi\rho a^5}{15}.$$

よって，

$$I = \frac{2Ma^2}{5},$$

となる．積分で球座標を用いると，

$$I = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho r^2 \sin^2\theta = 2\pi\rho \int_0^a r^4 dr \int_{-1}^1 dx (1-x^2) = 2\pi\rho \frac{a^5}{5} \frac{4}{3} = \frac{8\pi\rho a^5}{15},$$

である（球座標の方が少し楽？）．球座標を扱う際に良くやる様に， θ 積分は $x = \cos\theta$ と変数変換している．

5.2 平行軸の定理

慣性モーメントを計算する際に便利な性質がいくつかある．ここでは重心を通る回転軸の周りの慣性モーメント I_R と、その回転軸に平行で距離 d だけ離れた回転軸のまわりの慣性モーメント I の間の関係を示そう．まず、原点を重心にとると、 I_R は、

$$I_R = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (57)$$

である．一方、重心から回転軸 (z 軸) に垂直な方向に d だけ離れた点の座標を $(x_d, y_d, 0)$ とおくと、

$$I = \sum_{i=1}^N m_i [(x_i - x_d)^2 + (y_i - y_d)^2] = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i x_d + y_i y_d) + \sum_{i=1}^N m_i (x_d^2 + y_d^2). \quad (58)$$

右辺第一項は I_R 、第二項は和を取ると重心座標、つまり 0 であり、第三項は Md^2 になる (全質量を M とする)．よって、

$$I = I_R + Md^2, \quad (59)$$

が成立する (平行軸の定理)．

5.3 平板の定理 (垂直軸の定理)

薄い板に垂直な軸 ($=z$ 軸) のまわりの慣性モーメント I_z と、板の面内の二つの直交する軸 (x, y 軸とする) のまわりの慣性モーメント I_x, I_y の間の関係を調べてみよう．座標軸の原点は板の適当な場所にとって良い．剛体内の点の z 座標は全て $z_i = 0$ なので、原点の周りの I_x は、

$$I_x = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + 0^2) = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2, \quad (60)$$

と表される．同様に、 I_y も

$$I_y = \sum_{i=1}^N m_i (z_i^2 + x_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i (0^2 + x_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2. \quad (61)$$

よって、

$$I_x + I_y = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_z, \quad (62)$$

が成立する (平板の定理) ．

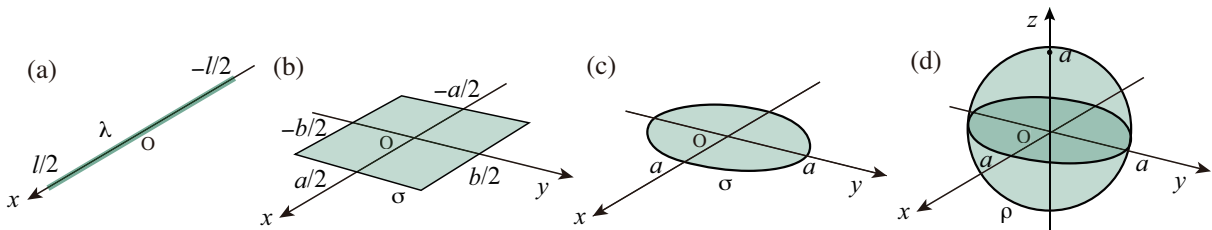


図 11 基本的な形状での慣性モーメントの計算例．

5.4 慣性モーメントテンソル

5.1 節では z 軸に剛体の軸を固定し、角運動量の z 成分だけを考えたが、一般の場合に原点周りの全ての角運動量成分も考えてみよう。回転の方向と速さを角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で表すと、剛体中の (例によって N 個の微小部分に分割した) 質点 i の速度は $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ である。よって、原点のまわりの角運動量 $\mathbf{L}$ は、

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \left[|\mathbf{r}_i|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i \right], \quad (63)$$

と書ける。ここで、

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A})]_\lambda = A_l (B_m A_n \epsilon_{mnp}) \epsilon_{lp\lambda} = A_l A_n B_m [\delta_{ln} \delta_{m\lambda} - \delta_{lm} \delta_{n\lambda}] = A_l A_l B_\lambda - A_l B_l A_\lambda = |\mathbf{A}|^2 B_\lambda - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) A_\lambda,$$

を用いた。 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^N m_i \left[|\mathbf{r}_i|^2 \omega_x - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) x_i \right] = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_x}_{\equiv I_{xx}} - \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \omega_y}_{\equiv I_{xy}} - \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i z_i x_i \omega_z}_{\equiv I_{xz}}, \\ &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \end{aligned} \quad (64)$$

の様に表すことができる。同様にすると、

$$L_y = - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \omega_x + \sum_{i=1}^N m_i (z_i^2 + x_i^2) \omega_y - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \omega_z \equiv I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \quad (65)$$

$$L_z = - \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i \omega_x - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \omega_y + \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \equiv I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z, \quad (66)$$

となる。式 (64)–(66) を行列を用いて表すと、

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \equiv \hat{I} \boldsymbol{\omega}, \quad (67)$$

となる。行列 $\hat{I}$ を慣性モーメントテンソルとよぶ。慣性モーメントテンソルの対角項はそれぞれの軸のまわりの慣性モーメントに他ならない。また、非対角項は慣性乗積とも呼ばれる。まとめて書くと、

$$I_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{r}_i|^2 \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{(\mathbf{r}_i)_\mu (\mathbf{r}_i)_\nu}{|\mathbf{r}_i|^2} \right) \xrightarrow{\text{積分の極限}} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) |\mathbf{r}|^2 \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{(\mathbf{r})_\mu (\mathbf{r})_\nu}{|\mathbf{r}|^2} \right), \quad (68)$$

とも表すことができる。ここで、 $(\mathbf{r}_i)_x = x_i$, $(\mathbf{r}_i)_y = y_i$, $(\mathbf{r}_i)_z = z_i$ 等である。なお、式 (68) は式 (63) を成分表示すれば容易に導出できる。また、重要な性質として、 $\hat{I}$ の成分は全て実数でかつ $I_{\mu\nu} = I_{\nu\mu}$, つまり $\hat{I}$ は実対称行列である。

6 主軸変換

慣性モーメントテンソル $\hat{I}$ は座標系の回転に対して変化することは容易に想像できる．実は上手く座標系を回転して座標軸を選ぶと， $\hat{I}$ が対角行列に見える座標が必ず存在することが示される．このような座標系の三つの軸のことを主軸とよぶ．これは線形代数で習う実対称行列に関する重要な性質で，

任意の実対称行列は実直交行列 $\hat{U}$ を用いて対角化可能であり，その対角成分の値（固有値）は実数である，

ということに他ならない．主軸は剛体の形や密度分布の「対称性」の良い向きを向いているので，単純なものであれば直感的にわかることもある．行列の対角化については付録 A にまとめておいた．以下で，具体例を見てみよう．

♠ 例 19：図 7(c) の剛体

慣性モーメントテンソル $I_{\mu\nu}$ を計算する．重心座標の計算のときと同様に，この剛体の x, y, z 方向は等価なので， $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ ， $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx}$ である．また質量は $M = \rho a^3/6$ であることは以前に計算した．

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int d\mathbf{r} \rho (x^2 + y^2) \xrightarrow{x \text{ と } y \text{ は等価}} 2\rho \int dx x^2 = 2\rho \int_0^a dz \int_0^{a-z} dx x^2 \int_0^{a-z-x} dy, \\ &= 2\rho \int_0^a dz \int_0^{a-z} (a-z-x)x^2 dx = 2\rho \int_0^a dz \left[\frac{(a-z)^4}{3} - \frac{(a-z)^4}{4} \right] = \frac{\rho a^5}{30} = \frac{Ma^2}{5}. \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= - \int d\mathbf{r} \rho xy = -\rho \int_0^a dz \int_0^{a-z} dx x \int_0^{a-z-x} dy y = -\frac{\rho}{2} \int_0^a dz \int_0^{a-z} dx x (a-z-x)^2, \\ &= -\frac{\rho}{2} \int_0^a dz \left[\frac{(a-z)^4}{2} - \frac{2(a-z)^4}{3} + \frac{(a-z)^4}{4} \right] = -\frac{\rho}{24} \int_0^a dz (a-z)^4 = -\frac{\rho a^5}{120} = -\frac{Ma^2}{20}. \end{aligned} \quad (70)$$

よって，慣性モーメントテンソルは，

$$\hat{I} = \frac{Ma^2}{20} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2}{5} \hat{\mathbf{1}} - \underbrace{\frac{Ma^2}{20} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{A}}, \quad (71)$$

と書ける．恒等行列 $\hat{\mathbf{1}}$ はどのようなベクトルでも固有ベクトルになるので，第二項の行列 $\hat{A}$ を対角化すれば自動的に $\hat{I}$ を対角化できる．固有方程式を $\hat{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ として，

$$0 = \det(\hat{A} - \lambda\hat{\mathbf{1}}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 \rightarrow \lambda = 2, -1. \quad (72)$$

$\lambda = -1$ は縮退していることに注意する．まず， $\lambda = 2$ の固有ベクトルを求める． $\mathbf{v}_2 = (u, v, w)^T$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (73)$$

を解けば良い．どのみち規格化の自由度は決まらないので，手っ取り早いのはどこかの成分を 1 とおいて計算することである．もし解が見つからなければ，別の成分を 1 としてやり直せば良い． $u = 1$ とおくと，以下の 3 つの式になる：

$$\underbrace{v + w = 2, 2v - w = 1}_{\text{たとえ } v=1}, -v + 2w = 1. \quad (74)$$

第 3 式から $w = 1$ が求まるので， N_2 を正の規格化定数としてあらためて $\mathbf{v}_2 = N_2(1, 1, 1)^T$ とおいて，

$$1 = |\mathbf{v}_2|^2 = 3N_2^2 \rightarrow N_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (75)$$

のように固有ベクトルが一つ求まる．同様に， $\lambda = -1$ についても， $\mathbf{v}_{-1}^{(1)} = (u, v, w)^T$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

この場合は，実質，式は一本しかなく $u + v + w = 0$ だけである．よって，この式を満足するものであれば何でも良い．例えば， $u = 1, v = -1, w = 0$ と取ろう．規格化しておくくと，

$$\mathbf{v}_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (77)$$

である．これはもちろん $\mathbf{v}_2$ と直交する．固有値 $\lambda = -1$ は 2 重に縮退していたので，もう一つの固有ベクトル $\mathbf{v}_{-1}^{(2)}$ を求めなければいけない． $\mathbf{v}_{-1}^{(1)}$ と直交していないといけなないので，規格化定数の符号を除いて次の形に一意的に決まる：

$$\mathbf{v}_{-1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

以上をまとめると， $\hat{I}$ の固有値 λ_{tot} と固有ベクトルは，

$$\lambda_{\text{tot}} = \frac{Ma^2}{10} : \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\text{tot}} = \frac{Ma^2}{4} : \mathbf{v}_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\text{tot}} = \frac{Ma^2}{4} : \mathbf{v}_{-1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

のようになる．以上 3 つの固有ベクトルは互いに直交していることを確認してほしい（直交していなければ計算が間違っていることになる）．3 つの固有ベクトルの向きがすなわち主軸の方向である．これは以下のようにしてわかる（付録 A には座標回転という観点からの説明がある）．3 つの直交した単位ベクトル $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{-1}^{(1)}, \mathbf{v}_{-1}^{(2)}$ の方向の $\boldsymbol{\omega}$ の成分をそれぞれ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とおくと， $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{v}_2 + \omega_2 \mathbf{v}_{-1}^{(1)} + \omega_3 \mathbf{v}_{-1}^{(2)}$ と表すことが可能である．式 (67) を考えると，

$$\mathbf{L} = \hat{I} \boldsymbol{\omega} = \hat{I} (\omega_1 \mathbf{v}_2 + \omega_2 \mathbf{v}_{-1}^{(1)} + \omega_3 \mathbf{v}_{-1}^{(2)}) = \left[\frac{Ma^2}{10} \omega_1 \mathbf{v}_2 + \frac{Ma^2}{4} \omega_2 \mathbf{v}_{-1}^{(1)} + \frac{Ma^2}{4} \omega_3 \mathbf{v}_{-1}^{(2)} \right], \quad (80)$$

となることがわかる． $\mathbf{L}$ の $\mathbf{v}_2$ 成分は $\boldsymbol{\omega}$ の $\mathbf{v}_2$ 成分である ω_1 にのみ依存しており， $\mathbf{L}$ の $\mathbf{v}_{-1}^{(1,2)}$ 成分は $\boldsymbol{\omega}$ の $\mathbf{v}_{-1}^{(1,2)}$ 成分 ($= \omega_{2,3}$) にのみ依存している（つまり慣性乗積が全て 0 である），このことは明らかに $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{-1}^{(1)}, \mathbf{v}_{-1}^{(2)}$ が主軸であることを示している．

対角化は直交基底 $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ から別の直交基底 $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{-1}^{(1)}, \mathbf{v}_{-1}^{(2)}\}$ への基底の変換に対応している．基底変換の行列は今の例では実直交行列 $\hat{U}$ で表され、 $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{-1}^{(1)}, \mathbf{v}_{-1}^{(2)}$ を横に並べて、

$$\hat{U} = \left(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{-1}^{(1)}, \mathbf{v}_{-1}^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad (81)$$

となる．式 (67) の両辺に左から $\hat{U}^T$ をかけると、 $UU^T = \hat{\mathbf{1}}$ に注意して、

$$\hat{U}^T \mathbf{L} = \hat{U}^T \hat{I} \hat{U} \hat{U}^T \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{4} \end{pmatrix} \hat{U}^T \boldsymbol{\omega}, \quad (82)$$

のように対角化される．任意のベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ に対して $\hat{U}^T \mathbf{a}$ は、

$$\hat{U}^T \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{a_x + a_y + a_z}{\sqrt{3}} \\ \frac{a_x - a_y}{\sqrt{2}} \\ \frac{a_x + a_y - 2a_z}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \text{ただし、} a_1 \text{ は } \mathbf{v}_2 \text{ 方向の成分, } a_2 \text{ は } \mathbf{v}_{-1}^{(1)} \text{ 方向の成分, } a_3 \text{ は } \mathbf{v}_{-1}^{(2)} \text{ 方向の成分,} \quad (83)$$

のようになるので、このことから主軸方向では慣性モーメントテンソルが対角化されることがわかる：

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

この剛体の場合は、明らかに対称性の良い $\mathbf{v}_2 \parallel (1, 1, 1)$ 方向が主軸になることに気付ければ計算も楽になる．

♠ 例 20：ガウス積分への応用

主軸の変換は様々な状況で使いこなせると非常に便利である．一例として、次のガウス積分を考えよう：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-3x^2 - 3y^2 + 2xy).$$

指数関数の指数に $+2xy$ がなければ x と y は付録 B に示したようにガウス積分できるが、この場合はそう単純にはいかない．以下のように考えると良い．指数関数の指数部分は次のように行列で表すことができることに気づけるだろうか？

$$-3x^2 - 3y^2 + 2xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{x}^T \hat{I} \mathbf{x}. \quad (85)$$

ここでは、 $\hat{I}$ が対称行列になるように工夫している．よって、直交行列 U を用いて対角化すると、

$$\mathbf{x}^T \hat{I} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \hat{U} \hat{U}^T \hat{I} \hat{U} \hat{U}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \hat{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \hat{U}^T \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}'^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{x}', \quad (86)$$

のようになることがわかる。固有値 $\lambda_1 > \lambda_2$ を求めると,

$$(-3 - \lambda)^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = -3 \pm 1 \rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -4, \quad (87)$$

となる。固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \rightarrow -u_1 + v_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (88)$$

および,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow u_2 + v_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (89)$$

となる。ただし, u_2, v_2 については, 連立方程式を解くまでもなく, 直交性から導出できる。したがって, 直交行列 $\hat{U}$ は,

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (90)$$

である。固有ベクトルの全体の符号はどう取っても良いので, 必ずしも $\hat{U}$ がこの形になるわけではないが, ここでは $\det \hat{U} = 1$ となるように符号を調整した。よって, 新しい座標 $\mathbf{x}' = (x', y')^T$ と元の座標は,

$$\mathbf{x} = \hat{U} \mathbf{x}' \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (91)$$

の関係がある。積分測度はヤコビアンを計算して,

$$J(x', y') = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \det \hat{U} = 1, \quad (92)$$

なので, $dx dy \rightarrow |J(x', y')| dx' dy' = dx' dy'$ である。これはこの直交行列による座標変換が純粋な回転に対応していることから明らかである (行列式が -1 の場合は反転や鏡映といった操作が含まれる)。以上のことから, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(\mathbf{x}^T \hat{I} \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp(\mathbf{x}'^T \hat{U}^T \hat{I} \hat{U} \mathbf{x}'), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp \left[\mathbf{x}'^T \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}' \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp(-2x'^2 - 4y'^2), \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (93)$$

と解析的に求めることができる。このような積分は, 場の理論, ファインマン経路積分などにも頻出するので身につけておくと良い。

♠ 例 21: 回転の運動エネルギー

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している剛体の運動エネルギー K は,

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{m_i}{2} |\mathbf{v}_i|^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega_l (\mathbf{r}_i)_m \epsilon_{lmn} \omega_\rho (\mathbf{r}_i)_\lambda \epsilon_{\rho\lambda n} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega_l \omega_\rho (\delta_{l\rho} \delta_{m\lambda} - \delta_{l\lambda} \delta_{m\rho}) (\mathbf{r}_i)_m (\mathbf{r}_i)_\lambda, \\ &= \frac{1}{2} \omega_l \omega_\rho \sum_i m_i |\mathbf{r}_i|^2 \left(\delta_{l\rho} - \frac{(\mathbf{r}_i)_\rho (\mathbf{r}_i)_l}{|\mathbf{r}_i|^2} \right) = \frac{1}{2} \omega_l (\hat{I})_{l\rho} \omega_\rho = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{I} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (94)$$

ここで, l, m, ρ, λ, n についての和の記号は省略しているのと, 式 (68) を用いている. もし, 座標系を主軸にとれば,

$$K = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2, \quad (95)$$

となる.

7 固定軸まわりの剛体の回転

剛体が一つの主軸に固定された軸（ z 軸と取ろう）の周りを角速度 ω で回転する場合は角運動量 $\mathbf{L}$ のうち、運動に関係するのは固定軸に平行な成分のみである。この時、式 (67) の z 成分のみを考えれば良い。よって、 z 軸まわりの慣性モーメントを単に I と書いて、 $L_z = I\omega$ より、運動方程式 (38) は、

$$\dot{L}_z = N_z \rightarrow I\dot{\omega} = N_z, \quad (96)$$

となる。

7.1 アトウッドの装置

質量 m_1 , m_2 の質点が軽いひもで図 12(a) のように滑車に繋がれている。滑車の重心は固定軸上にあり、半径を a 、滑車の回転角速度を ω 、滑車の軸まわりの慣性モーメントを I_0 、糸の張力 T_1 , T_2 、質点の速度は $v_1 = v_2 = v$ 、重力加速度の大きさを g とする。二つの質点の運動方程式と滑車の運動方程式 (96) は、

$$m_1\dot{v} = m_1g - T_1, \quad m_2\dot{v} = T_2 - m_2g, \quad (97)$$

$$I_0\dot{\omega} = N_z = aT_1 - aT_2, \quad (98)$$

である。式 (97) を使って式 (98) の T_1 と T_2 を消去すると、

$$I_0\dot{\omega} = a[m_1g - m_1\dot{v} - (m_2g + m_2\dot{v})]. \quad (99)$$

ここで、ひもと滑車は滑らずに運動すると仮定すると、微小時間 Δt の間に質点が動く距離と滑車の回転した距離が等しくならないといけない。つまり、

$$v\Delta t = a\omega\Delta t \rightarrow \omega = \frac{v}{a}, \quad (100)$$

が成立する。よって、式 (99) に代入すると、

$$I_0\frac{\dot{v}}{a} = -a(m_1 + m_2)\dot{v} + ag(m_1 - m_2) \rightarrow \dot{v} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + I_0/a^2}, \quad (101)$$

を得る。つまり、質点は等加速度運動をする。

滑車が厚さ d 、密度 ρ の円盤で質量が M とすると、滑車の面に垂直な軸のまわりの慣性モーメント I_0 は

$$I_0 = \int_0^d dz \int_0^a \rho dr r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho d \frac{a^4}{4} = \frac{(\pi\rho da^2)a^2}{2} = \frac{Ma^2}{2}, \quad (102)$$

である。この I_0 の値を用いると、

$$\dot{v} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + M/2}, \quad (103)$$

となる。この表式から、質点二つの質量の合計に比べて滑車の質量が無視できない場合は滑車の運動の効果が顕著になることが読み取れる。

7.2 実体振り子

水平方向の軸の周りに質量 M の剛体をぶら下げた図 12(b) のような実体振り子を考えよう．この支点を原点 O にとる．水平方向の軸を z 軸にとり，鉛直下向きを x 軸の正の方向， z 軸に垂直なもう一つの水平方向を y 軸にとる． x 軸から y 軸に回転する方向に角度変数 ϕ をとる．固定軸まわりの慣性モーメント I とおくと，式 (67) は，

$$L_z = I\dot{\phi}, \quad (\dot{\phi} \text{ が単位時間あたりに変化する角度} = \text{角速度} \omega \text{ である}). \quad (104)$$

剛体には支点 O に剛体を支える力がはたらいているが，この固定軸まわりの角運動量 L_z には影響しない．よって，剛体の角運動量に関する運動方程式 (96) は剛体の位置 $\mathbf{r}$ での密度を $\rho(\mathbf{r})$ として，

$$\dot{L}_z = I\ddot{\phi} = N_z = \int d\mathbf{r} \mathbf{r} \times [\rho(\mathbf{r})g\hat{x}] = Mg\mathbf{R} \times \hat{x} = -MgR \sin \phi, \quad (105)$$

となる．ここで $\mathbf{R}$ は原点 O から測った剛体の重心座標ベクトル， $R = |\mathbf{R}|$ である．よって，

$$\ddot{\phi} = -\frac{MgR}{I} \sin \phi \sim -\frac{MgR}{I} \phi, \quad (|\phi| \ll 1), \quad (106)$$

を得る．これは単振動の微分方程式なので，定数 A ， ϕ_0 を用いると，

$$\phi = A \cos \left(\sqrt{\frac{MRg}{I}} t + \phi_0 \right). \quad (107)$$

実体振り子は長さ $\ell = I/(MR)$ の単振り子と等価であることがわかる．重心を通る「固定軸に平行な軸」の周りの慣性モーメントを I_0 とすると，平行軸の定理 (59) より， $I = I_0 + MR^2$ なので，

$$\ell = \frac{I_0 + MR^2}{MR} \rightarrow R^2 - \ell R + \frac{I_0}{M} = 0, \quad (108)$$

が成り立つ． ℓ が与えられたとき，重心から，

$$R = R_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\ell \pm \sqrt{\ell^2 - \frac{4I_0}{M}} \right], \quad (109)$$

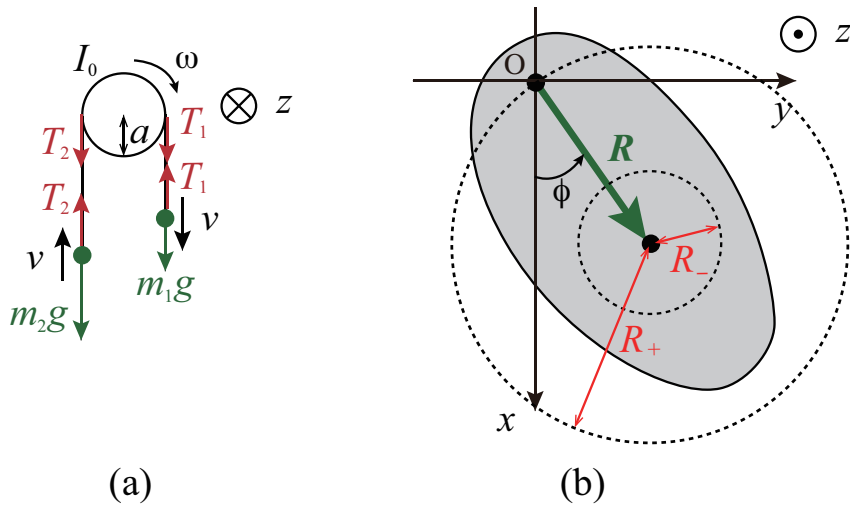


図 12 (a) アトウッドの装置. (b) 実体振り子.

の距離にある点を支点にとれば、その時の振り子の周期は式 (107) の一般解のものと同じ値 $2\pi\sqrt{\frac{I}{MRg}}$ になることがわかる。

7.3 剛体の平面運動

斜面を転がる球や円柱などの運動は「重心 $\mathbf{R}$ の並進」＋「重心まわりの回転 ω 」に分けることができる。ただし、 ω の方向は回転軸の方向とする。このような質量 M の剛体の重心まわりの回転軸方向に関する慣性モーメントを I_0 とすると、運動方程式は、

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad I_0\dot{\omega} = \sum_i N_i, \quad (N_i \text{ は回転軸方向の外力のモーメント}), \quad (110)$$

であり、運動エネルギー K は式 (55) より、

$$K = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2, \quad (111)$$

である。

♠ 例 22：斜面を転がる半径 a 、質量 M 、中心（重心）まわりの慣性モーメント I_0 の一様な球

図 13 のように、水平面と斜面のなす角度を α 、斜面からの垂直抗力を R 、斜面の摩擦力を F とする。斜面方向に x 軸、それに垂直な方向を y 軸とすると、重心の運動方程式は、

$$M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - F, \quad M\ddot{y} = R - Mg \cos \alpha = 0, \quad (112)$$

であり、回転に関する運動方程式は、反時計回りを回転の正の方向として、（重力の力のモーメントはゼロ）、

$$I_0\dot{\omega} = aF, \quad \dot{x} = a\omega. \quad (113)$$

ここで、第二式は滑りがない条件 (100) である。式 (113) より

$$\ddot{x} = a\dot{\omega} = a \left(\frac{a}{I_0} F \right) = \frac{a^2}{I_0} F \rightarrow F = \frac{I_0}{a^2} \ddot{x}. \quad (114)$$

式 (112) に代入すると、

$$M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - \frac{I_0}{a^2} \ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_0/(Ma^2)}. \quad (115)$$

5.1 節の例で求めたように、球の中心まわりの慣性モーメントは $I_0 = 2Ma^2/5$ であることを用いると、

$$\ddot{x} = \frac{5}{7}g \sin \alpha \equiv a_c, \quad F = \frac{2}{5}M\ddot{x} = \frac{2}{7}Mg \sin \alpha, \quad (116)$$

であることがわかる。滑らない条件は μ_0 を静摩擦係数として、 $F \leq \mu_0 R$ であるので、斜面の角度 α と静摩擦係数 μ_0 が、

$$\frac{F}{R} = \frac{\frac{2}{7}Mg \sin \alpha}{Mg \cos \alpha} = \frac{2}{7} \tan \alpha \leq \mu_0, \quad (117)$$

である限り、滑らずに回転し続ける。ここで、 R については式 (112) を用いた。重心の並進運動は等加速度運動なので、 $t = 0$ で球を静かに放したとすると時刻 t での速度 $v(t)$ と変位 $x(t)$ は、

$$v(t) = a_c t = \frac{5}{7}gt \sin \alpha, \quad x(t) = \frac{5}{14}gt^2 \sin \alpha, \quad (118)$$

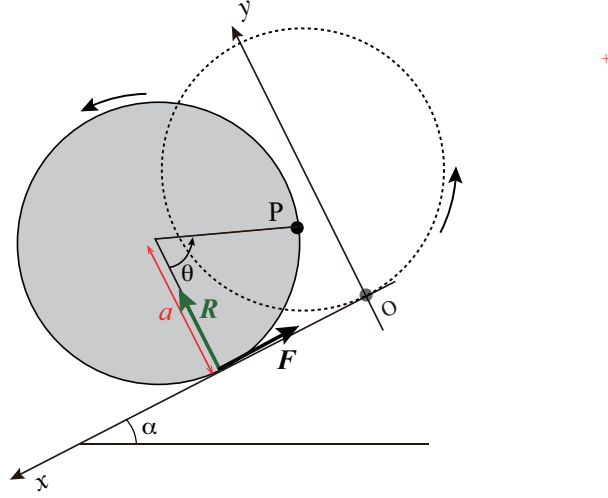


図 13 斜面を転がる球；球面上の点 P の奇跡はサイクロイド。

である。

滑りがないとき、力学的エネルギーは摩擦があっても保存することを確認しておこう。式 (112) の第 1 式と (113) の第 1 式より、

$$M\ddot{x} - Mg \sin \alpha = -\frac{I_0}{a}\dot{\omega}, \quad (119)$$

が成立する。両辺に $\dot{x} = a\omega$ をかけると（左辺には $\dot{x}$ ，右辺には $a\omega$ をかけるのがミソ），

$$M\dot{x}\ddot{x} - Mg(\sin \alpha)\dot{x} = -I_0\dot{\omega}\omega \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 - Mg(\sin \alpha)x \right) = 0. \quad (120)$$

よって、回転の運動のエネルギーの式 (55) を思い出すと、

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2}_{\text{重心}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_0\omega^2}_{\text{回転}} + \underbrace{[-Mg(\sin \alpha)]x}_{\text{位置エネルギー}} = \text{一定}, \quad (121)$$

であることがわかる。これは滑らない場合には摩擦力 F は仕事をしないことに起因する。回転している間、斜面との接触点が垂直方向に動くことはサイクロイド曲線を考えればすぐに理解できる。球面上のある P 点の座標を (X, Y) とおくと、媒介変数 θ を用いて、

$$X = a\theta - a \sin \theta, \quad Y = a - a \cos \theta. \quad (122)$$

θ で微分すると、

$$\frac{dX}{d\theta} = a - a \cos \theta, \quad \frac{dY}{d\theta} = a \sin \theta, \quad (123)$$

である。よって、

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\frac{1}{2}\theta^2} = \frac{2}{\theta} \rightarrow \infty. \quad (124)$$

つまり、点 P が斜面を離れる瞬間 ($\theta \rightarrow 0$ の時) に、点 P の描く奇跡の「傾き」は無限大、つまり斜面に垂直になる。よって、斜面と平行な成分しか持たない摩擦力は仕事をするのではない。

剛体が転がっていくと、元々持っていた位置エネルギーは重心の運動エネルギーと回転の運動エネルギーに変換される。回転の運動エネルギーを求めるために、式 (113) と式 (115) を用いると、

$$\ddot{\theta} = \frac{Mga \sin \alpha}{I_0 + Ma^2} = \frac{Mga \sin \alpha}{I'}, \quad (125)$$

となる。ここで、 I' は接地点のまわりの慣性モーメントである*2。 $\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{a}$ を両辺にかけると、

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{Mga \sin \alpha}{I'} \frac{\dot{x}}{a} = \frac{Mg \sin \alpha}{I'} \dot{x} \longrightarrow \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 - Mgx \sin \alpha \frac{I_0}{I'} = \text{一定}. \quad (127)$$

時刻 $t = 0$ で $x = 0, \theta = 0$ として、静かに剛体をはなし、時刻 t において重心座標が $x(t)$ だとすると、

$$\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2(t) - Mgx(t) \sin \alpha \frac{I_0}{I'} = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2(t) = \left(\frac{I_0}{I'}\right) Mgx(t) \sin \alpha = \left(\frac{I_0}{I_0 + Ma^2}\right) Mgx(t) \sin \alpha. \quad (128)$$

つまり、回転の運動エネルギーは位置エネルギーの減少分の $I_0/(I_0 + Ma^2)$ 倍だけのエネルギーを受け取っていることになる。力学的エネルギー保存 (121) を考慮すると、重心の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2(t) = \left(1 - \frac{I_0}{I_0 + Ma^2}\right) Mgx(t) \sin \alpha = \left(\frac{Ma^2}{I_0 + Ma^2}\right) Mgx(t) \sin \alpha. \quad (129)$$

なので、位置エネルギーの減少分の $Ma^2/(I_0 + Ma^2)$ 倍だけのエネルギーを受け取っていることになる。エネルギー保存の観点から見ると、重心加速度 (115) が、質点の時よりも $\frac{Ma^2}{I_0 + Ma^2}$ 倍だけ小さくなっているのは、回転運動に位置エネルギーの減少分を奪われているためであるとも解釈できる。

*2 実は、運動エネルギー K は I' を用いて、

$$K = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{I_0}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{M}{2}(a\dot{\theta})^2 + \frac{I_0}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{I_0 + Ma^2}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{I'}{2}\dot{\theta}^2, \quad (126)$$

と書ける。

8 オイラーの方程式

この節では、主軸と回転軸が一致しない、より一般的な場合の剛体の回転運動を考える。

8.1 回転に関する運動方程式

剛体の主軸の方向を単位ベクトル $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ で表す。この剛体が角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している時の角運動量 $\mathbf{L}$ は、

$$\mathbf{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} = I_{xx}\omega_x\hat{x} + I_{yy}\omega_y\hat{y} + I_{zz}\omega_z\hat{z}, \quad (130)$$

で与えられることは6節で学んだ通りである（座標軸を主軸にとっている）。角運動量の時間微分は、

$$\dot{\mathbf{L}} = \underbrace{I_{xx}\dot{\omega}_x\hat{x} + I_{yy}\dot{\omega}_y\hat{y} + I_{zz}\dot{\omega}_z\hat{z}}_{\boldsymbol{\omega} \text{ を微分}} + \underbrace{I_{xx}\omega_x\dot{\hat{x}} + I_{yy}\omega_y\dot{\hat{y}} + I_{zz}\omega_z\dot{\hat{z}}}_{\text{単位ベクトルを微分}}, \quad (131)$$

となる。ここで、剛体が角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している時はその主軸も角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているので、 $\hat{x}$ などは時間に依存することに注意すること。単位ベクトルの時間微分は図14のように微小時間 Δt の間の変化を考えれば良い。 $\hat{x}(t)$ と $\boldsymbol{\omega}$ のなす角を θ とおくと、変化量の絶対値は $|\hat{x}(t+\Delta t) - \hat{x}(t)| \simeq |\boldsymbol{\omega}|\Delta t \sin\theta$ であり、変化の方向は $\boldsymbol{\omega} \times \hat{x}(t)$ に平行である。よって、

$$\hat{x}(t+\Delta t) - \hat{x}(t) \simeq \boldsymbol{\omega} \times \hat{x}(t)\Delta t \rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \hat{x}(t),$$

が成立することがわかる。他の単位ベクトルの時間微分も同様に、 $\dot{\hat{y}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \hat{y}(t)$, $\dot{\hat{z}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \hat{z}(t)$ となるのは明らかである。この関係式は、一定の角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する回転座標系におけるベクトル $\mathbf{a}$ の時間微分が、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a} = \frac{d'}{dt}\mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}, \quad (\text{第一項は成分の時間微分}), \quad (132)$$

であったこととほとんど同じことで（単位ベクトルの場合は第一項は常にゼロである）、実は $\boldsymbol{\Omega}$ は時間に依存していても結果は同じであったわけである。

式(131)に戻ると、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \left(\frac{d}{dt}(I_{xx}\omega_x), \frac{d}{dt}(I_{yy}\omega_y), \frac{d}{dt}(I_{zz}\omega_z) \right)^T + I_{xx}\omega_x\boldsymbol{\omega} \times \hat{x}(t) + I_{yy}\omega_y\boldsymbol{\omega} \times \hat{y}(t) + I_{zz}\omega_z\boldsymbol{\omega} \times \hat{z}(t), \\ &= \frac{d'}{dt}\mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \times [I_{xx}\omega_x\hat{x}(t) + I_{yy}\omega_y\hat{y}(t) + I_{zz}\omega_z\hat{z}(t)] = \frac{d'}{dt}\mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}, \end{aligned} \quad (133)$$

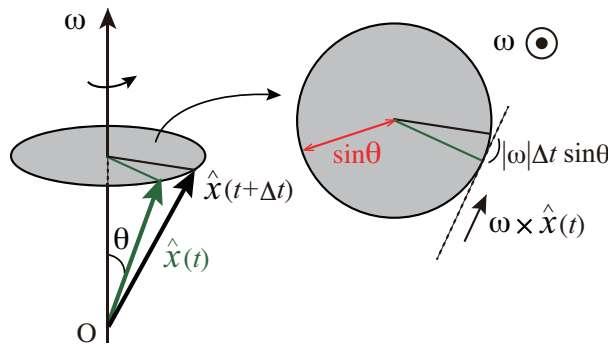


図14 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する単位ベクトルの時間変化

のように式 (132) の表式になる。 $\frac{d'}{dt}$ は成分のみを時間微分する演算子であることに留意すること。回転に関する運動方程式 (39) より、

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d'}{dt} \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{N}_i \equiv \mathbf{N}, \quad (134)$$

である。 $\mathbf{L}$ を慣性モーメントを用いて書き直し、成分ごとに書き下すと、

$$I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z = N_x, \quad (135)$$

$$I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x = N_y, \quad (136)$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y = N_z, \quad (137)$$

となる。式 (135)-(137) をオイラーの方程式とよぶ。オイラーの方程式は座標系を主軸にとった時に未知の角速度ベクトルを力のモーメントから求める場合や、角速度を外力により固定した時にその力のモーメントを求める際に有用である。

式 (135)(136)(137) にそれぞれ $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ をかけてたすと、

$$I_{xx}\omega_x\dot{\omega}_x + I_{yy}\omega_y\dot{\omega}_y + I_{zz}\omega_z\dot{\omega}_z = \omega_x N_x + \omega_y N_y + \omega_z N_z \longrightarrow \frac{d}{dt} \sum_{\mu=x,y,z} \frac{I_{\mu\mu}\omega_\mu^2}{2} = \frac{dK}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}, \quad (138)$$

となる。運動エネルギー (95) の時間変化は角速度と力のモーメントの内積で表される。

♠ 例 23 : 軽い棒でつながった 2 粒子回転系

図 15(a) のような、長さ $2a$ の軽い棒の両端に質量 m の質点が固定された剛体の回転運動を考える。棒の中心 O を支点として棒に平行な y 軸から角度 θ ずれた方向を軸として角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で剛体を回転させている。 y 軸に垂直な 2 つの軸を x, z 軸とする。ただし、 x 軸は常に y 軸と $\boldsymbol{\omega}$ を含む面内にとることにする。そうすると、 z 軸は常に $\boldsymbol{\omega}$ と直交する。

まず、それぞれの軸まわりのこの剛体の慣性モーメントは

$$I_{xx} = I_{zz} = 2ma^2, \quad I_{yy} = 0,$$

である。また、角速度のそれぞれの軸の成分は、

$$\omega_x = -|\boldsymbol{\omega}| \sin \theta, \quad \omega_y = |\boldsymbol{\omega}| \cos \theta, \quad \omega_z = 0,$$

であるので、点 O まわりの剛体の角運動量 $\mathbf{L}$ は、

$$\mathbf{L} = \hat{I} \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|\boldsymbol{\omega}| \sin \theta \\ |\boldsymbol{\omega}| \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ma^2 |\boldsymbol{\omega}| \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

となる。 $|\boldsymbol{\omega}|$ が時間的に一定になるようにこの剛体を回転し続けるのに必要な力のモーメント $\mathbf{N}$ はオイラーの方程式 (135)-(137) より、

$$N_x = N_y = 0, \quad N_z = 2ma^2 |\boldsymbol{\omega}|^2 \sin \theta \cos \theta,$$

であることがわかる。 $\mathbf{N} \perp \boldsymbol{\omega}$ であり、 z 軸の回転に伴って $\mathbf{N}$ もまた回転する。

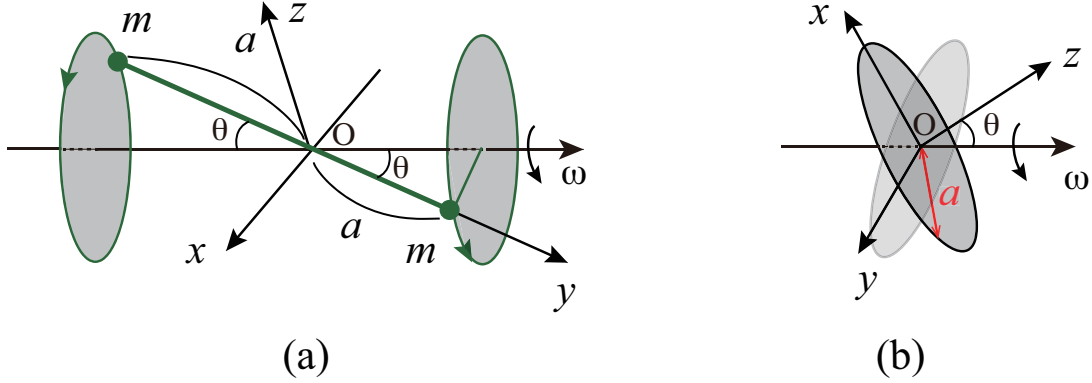


図 15 (a) 軽い棒でつながった 2 粒子回転系. (b) 円盤の回転.

♠ 例 24 : 円盤の回転

図 15(b) のように, 半径 a , 質量 m の一様な薄い円盤の中心 O を支点として, 円盤に垂直な z 軸に対して角度 θ だけずれた方向を軸として角速度 ω で円盤を回転させる. x 軸を ω と z 軸を含む面内にとると, y 軸は円盤を含む面にありかつ ω と常に垂直にとることができる. それぞれの軸のまわりの慣性モーメントは,

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{ma^2}{4} \equiv I, \quad I_{zz} = \frac{ma^2}{2} = 2I,$$

となる. 5.1 節の例と 5.3 節の平板の定理を参照のこと. また, x, y, z 軸は剛体の主軸であるので慣性乗積は 0 である. ω の各成分は,

$$\omega_x = -|\omega| \sin \theta, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = |\omega| \cos \theta,$$

であるので, 円盤の点 O のまわりの角運動量 $\mathbf{L}$ は,

$$\mathbf{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|\omega| \sin \theta \\ 0 \\ |\omega| \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I|\omega| \sin \theta \\ 0 \\ 2I|\omega| \cos \theta \end{pmatrix},$$

である. $\boldsymbol{\omega}$ と $\mathbf{L}$ の間の角度を α とすると,

$$\cos \alpha = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{|\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{L}|} = \frac{I|\omega|^2 \sin^2 \theta + 2I|\omega|^2 \cos^2 \theta}{|\omega| \sqrt{I^2 |\omega|^2 \sin^2 \theta + 4I^2 |\omega|^2 \cos^2 \theta}} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}},$$

である. $\mathbf{L}$ は角度 α を保ちつつ, $\boldsymbol{\omega}$ のまわりを回転している. 例えば $\theta = \pi/6$ のとき, $\cos^2 \theta = 3/4$ より, $\cos \alpha \simeq 0.97 \rightarrow \alpha \simeq 14^\circ$ である. $\boldsymbol{\omega}$ を一定に保つために必要な $\mathbf{N}$ はオイラーの方程式 (135)–(137) より,

$$N_x = N_z = 0, \quad N_y = I|\boldsymbol{\omega}|^2 \sin \theta \cos \theta,$$

である.

上記二つの例からわかるように, 一定の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で剛体を回転させる場合, $\mathbf{L}$ と $\boldsymbol{\omega}$ が平行でないときに有限の $\mathbf{N}$ が必要になる. このことは,

$$\mathbf{L} \text{ と } \boldsymbol{\omega} \text{ が平行でない} \rightarrow \mathbf{L} \text{ が時間変化 (回転)} \rightarrow \mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} \neq \mathbf{0} \text{ [運動方程式 (39)]},$$

であることから理解できる.

♠ 例 25：中間軸の定理（テニスラケットの定理）

3つの主軸方向の慣性モーメントが $I_{zz} > I_{yy} > I_{xx}$ である一般の剛体を考えよう．今，それぞれの主軸方向に角速度の初期値を与え，外力が0のもとで運動がどのように時間発展するかを近似的に考えることにする．慣性モーメントが最も大きい z 軸周りの初期角速度の場合，時刻 t が $t = 0$ から短時間であれば， $|\omega_z| \gg |\omega_{x,y}|$ である． ω_x, ω_z の成分に関してのオイラーの運動方程式は

$$I_{zz}\dot{\omega}_z = (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y \simeq 0 \rightarrow \omega_z \simeq \text{一定}, \quad (139)$$

$$I_{xx}\dot{\omega}_x = (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z \rightarrow I_{xx}\ddot{\omega}_x \simeq (I_{yy} - I_{zz})\dot{\omega}_y\omega_z = -\frac{(I_{zz} - I_{yy})(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}}\omega_z^2\omega_x, \quad (140)$$

$$I_{yy}\dot{\omega}_y = (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x \rightarrow I_{yy}\ddot{\omega}_y \simeq (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\dot{\omega}_x = -\frac{(I_{zz} - I_{yy})(I_{zz} - I_{xx})}{I_{xx}}\omega_z^2\omega_y, \quad (141)$$

となり， $\omega_z \simeq \text{一定}$ ， $\omega_{x,y}$ は0の周りの単振動となり，運動は初期の状態と似た z 軸周りの安定な回転となる．オイラー方程式の構造から，初期角速度を x 軸方向に取った場合も同様に安定である．一方，初期角速度を y 軸方向に取った場合は

$$I_{yy}\dot{\omega}_y = (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x \simeq 0 \rightarrow \omega_y \simeq \text{一定}, \quad (142)$$

$$I_{xx}\dot{\omega}_x = (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z \rightarrow I_{xx}\ddot{\omega}_x \simeq (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\dot{\omega}_z = -\frac{(I_{zz} - I_{yy})(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}}\omega_y^2\omega_x, \quad (143)$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_z = (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y \rightarrow I_{zz}\ddot{\omega}_z \simeq (I_{xx} - I_{yy})\omega_y\dot{\omega}_x = \frac{(I_{xx} - I_{yy})(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}}\omega_y^2\omega_z, \quad (144)$$

となり， x, z 成分の角速度が単振動にならず，虚数振動数をもつ単振動の解になってしまい，従って $\omega_{x,z}$ が増大し， $\omega_{x,z}$ が小さい初期の運動は不安定となる．このように，慣性モーメントが二番目に大きい軸のまわりの回転運動が不安定になることを中間軸の定理とよぶ．落下しても割れないように気をつけつつスマートフォンやテニスラケットで実際に確認してみるとよい．

8.2 独楽（コマ）の運動

最後にもう少し複雑な回転運動を考えてみよう．独楽（コマ）の運動は，独楽の自転と独楽の中心軸（対称軸）が鉛直軸のまわりに回転する（これを歳差運動とよぶ）運動に加え，さらに中心軸と鉛直軸の間の角度変化を生じさせる回転という複数の回転運動が絡み合っている．完全な解を求めるのはかなり面倒なので，まずはある極限のもとに近似的に独楽の運動を解析してみよう．

図 16 のように， Z 軸の正の方向を鉛直上向きとして床に固定した座標軸を X, Y, Z 軸と表す（ XYZ 座標系）．また，質量 M の独楽の主軸を x, y, z 軸とし（ xyz 座標系）， z 軸は独楽の中心軸（自転する軸）ととり，独楽は中心軸に関して対称であるとする（よって， x, y 方向は z 方向に垂直であればどこを向いていても良い：対称独楽）．このことから，独楽の主軸まわりの慣性モーメント（原点 O まわり）は $I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz}$ となる．運動の間，独楽の中心軸の先端（接地点）は止まっていると仮定し，接地点を原点 O とする．原点 O から測った重心座標 G の位置ベクトルを $\mathbf{R}$ とおき， XYZ 座標系の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ ， xyz 座標系の単位ベクトルを $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ と表す．ただし，原点は接地点のままとする．

8.2.1 歳差運動の近似解

独楽は角速度 $\dot{\psi}\hat{z} = \omega\hat{z}$ で自転しており（ ω は一定），歳差運動の角速度 $\dot{\phi}\hat{Z}$ より十分に速いものとする（ $\omega \gg \dot{\phi}$ ）．また，中心軸と鉛直軸の角度 θ は時間変化しないものとする．この条件では独楽の全角運動量 $\mathbf{L}$

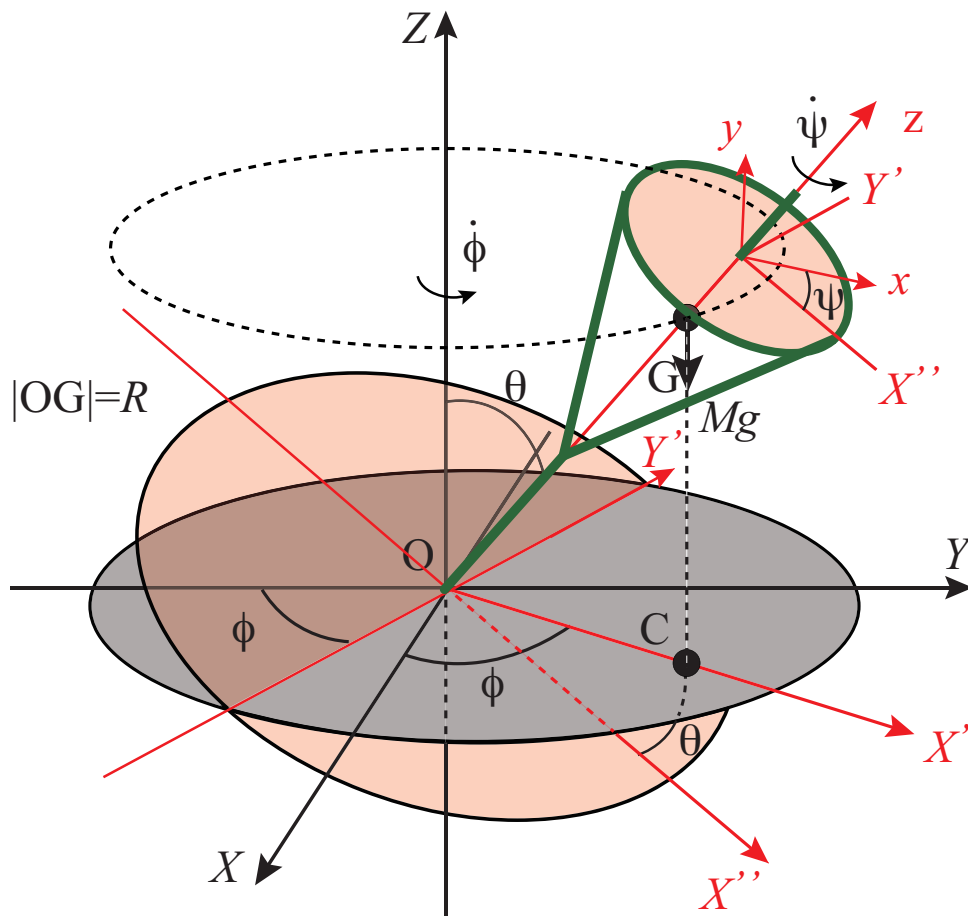


図 16 独楽の運動とオイラー角.

は,

$$\mathbf{L} \simeq I_{zz}\omega\hat{z}, \quad (145)$$

と近似でき, 重心 G は図 16 の点線上を円運動することが以下の議論から導かれる. 角速度の角運動量に平行な成分は $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$ には現れないことに注意すると, 歳差運動に関する角速度 $\dot{\phi}\hat{Z}$ と, 自転による角運動量 $I_{zz}\omega\hat{z}$ の外積のみが運動方程式に現れる. つまり,

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\phi}\hat{Z} \times I_{zz}\omega\hat{z} = I_{zz}\omega\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}. \quad (146)$$

一方, この歳差運動を駆動している原点 O まわりの力のモーメント $\mathbf{N}$ は,

$$\mathbf{N} = (\text{垂直抗力}) \times \mathbf{0} + \mathbf{R} \times (-Mg\hat{Z}) = MgR\sin\theta\hat{\phi}, \quad (147)$$

と書ける. 回転に関する運動方程式 (39) に式 (146) と式 (147) を代入すると,

$$I_{zz}\omega\dot{\phi}\sin\theta = MgR\sin\theta \rightarrow \dot{\phi} = \frac{MgR}{I_{zz}\omega}. \quad (148)$$

つまり, 歳差運動の角速度は $\frac{MgR}{I_{zz}\omega}$ である. 独楽の自転の角速度が速いほど歳差運動の角速度は遅くなることがわかる.

8.2.2 オイラー角*

図 16 に示した三つの角度変数 $\{\theta, \phi, \psi\}$ はオイラー角と呼ばれるものである．剛体の回転運動（6 自由度のうちの 3 つ）はこの三つの角度の時間依存性がわかれば完全に記述することができる．残りの 3 自由度は支点の座標だが、今は動かないと仮定する．そこで重要なのは XYZ 座標系と xyz 座標系の対応関係である．

手始めに、 $\hat{Z}$ を $\hat{z}$ に回転する操作を考えよう．まず、 Z 軸周りに ϕ 回転すると X, Y 軸は図 16 の X', Y' 軸になる．この操作は次の行列で表される．

$$\hat{U}_Z(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 例えば, } \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (149)$$

上の例にあるように、 XYZ 座標で $(\cos \phi, \sin \phi, 0)^T$ だった位置座標は $X'Y'Z$ 座標では $(1, 0, 0)^T$ となる．次に、 Y' 軸周りに θ 回転する．これにより、 X' 軸は X'' 軸へ、 Z 軸は z 軸へ変換される．この操作は以下の行列で書ける：

$$\hat{U}_{Y'}(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \rightarrow \hat{U}_{Y'}(\theta) \hat{U}_Z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (150)$$

つまり、 XYZ 座標での $\mathbf{R}$ を $X''Y'z$ 座標で表すと、 $(0, 0, 1)^T$ となる． $\mathbf{R}$ に $\hat{U}_{Y'}(\theta) \hat{U}_Z(\phi)$ を作用させると、 $R \equiv |\mathbf{R}|$ と書いて、

$$\hat{U}_{Y'}(\theta) \hat{U}_Z(\phi) \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}, \quad (151)$$

となることが確認できる．ここまでで、独楽の中心軸の方向を z 軸とするような座標系にうつることができた．独楽の自転は、この z 軸を軸とする回転である． z 軸のまわりで ψ 回転させるには次の行列を作用させれば良い：

$$\hat{U}_z(\psi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

以上から、 XYZ 座標系でのベクトルを xyz 座標系のベクトルに変換するには次の行列を作用させれば良い：

$$\hat{U}_z(\psi) \hat{U}_{Y'}(\theta) \hat{U}_Z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & \cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ -\sin \phi \cos \psi - \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (153)$$

逆に、 xyz 座標系でのベクトルを XYZ 座標系のベクトルに変換するには上記の逆行列 $[\hat{U}_z(\psi) \hat{U}_{Y'}(\theta) \hat{U}_Z(\phi)]^{-1} = \hat{U}_Z(-\phi) \hat{U}_{Y'}(-\theta) \hat{U}_z(-\psi)$ を作用させれば良い：

$$[\hat{U}_z(\psi) \hat{U}_{Y'}(\theta) \hat{U}_Z(\phi)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \theta \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi \sin \psi + \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (154)$$

8.2.3 独楽の運動に対するオイラーの方程式 *

オイラーの方程式の右辺の力のモーメント $\mathbf{N}$ を計算するために、重力の方向 $\hat{Z}$ を xyz 座標系で表すことを考えよう。 X'' 軸方向の単位ベクトルを $\hat{X}''$ と書くと、

$$\hat{X}'' = \hat{x} \cos \psi - \hat{y} \sin \psi, \quad (155)$$

である。よって、 $\hat{Z}$ は $\hat{z}$ と $\hat{X}''$ を用いて、

$$\hat{Z} = \hat{z} \cos \theta - \hat{X}'' \sin \theta = \hat{z} \cos \theta - (\hat{x} \cos \psi - \hat{y} \sin \psi) \sin \theta, \quad (156)$$

となることがわかる。よって、 $\mathbf{N}$ は、

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times (-Mg)\hat{Z} = -MgR\hat{z} \times [\hat{z} \cos \theta - (\hat{x} \cos \psi - \hat{y} \sin \psi) \sin \theta] = MgR \sin \theta (\sin \psi \hat{x} + \cos \psi \hat{y}), \quad (157)$$

と書ける。したがって、オイラーの方程式 (135)(136)(137) は、

$$I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{xx} - I_{zz})\omega_y\omega_z = N_x = MgR \sin \theta \sin \psi, \quad (158)$$

$$I_{xx}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x = N_y = MgR \sin \theta \cos \psi, \quad (159)$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_z = N_z = 0, \quad (160)$$

である。式 (160) から直ちに、 $\omega_z = \text{一定} = \omega$ であることが確認できる。表記を簡単にするため、

$$\Gamma \equiv \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega, \quad a \equiv \frac{MgR}{I_{xx}}, \quad (161)$$

を導入すると、式 (158) と (159) は、

$$\dot{\omega}_x - \Gamma\omega_y = a \sin \theta \sin \psi, \quad (162)$$

$$\dot{\omega}_y + \Gamma\omega_x = a \sin \theta \cos \psi, \quad (163)$$

のように表される。一方、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は XYZ 座標系で、角度変数 $\theta\phi\psi$ を用いて、

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (164)$$

と表されるので、これに $\hat{U}_z(\psi)\hat{U}_{Y'}(\theta)\hat{U}_Z(\phi)$ を作用させれば xyz 座標系での角速度ベクトルが得られる：

$$\hat{U}_z(\psi)\hat{U}_{Y'}(\theta)\hat{U}_Z(\phi)\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (165)$$

式 (162) の両辺に ω_x をかけたものと式 (163) の両辺に ω_y をかけたものを足すと、

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\omega_x^2 + \omega_y^2] = a\dot{\theta} \sin \theta = -a \frac{d}{dt} \cos \theta \longrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} [\omega_x^2 + \omega_y^2] + a \cos \theta \right\} = 0. \quad (166)$$

つまり、

$$\epsilon \equiv \frac{I_{xx}}{2} [\omega_x^2 + \omega_y^2] + I_{xx} a \cos \theta = \frac{I_{xx}}{2} [\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta] + \underbrace{MgR \cos \theta}_{\text{位置エネルギー}}, \quad (167)$$

という保存量 ϵ が得られる ($\epsilon + I_{zz}\omega^2/2$ が全エネルギー). また, 式 (163) の両辺に $\sin \psi$ をかけたものから式 (162) の両辺に $\cos \psi$ をかけたものを引くと,

$$\dot{\omega}_y \sin \psi - \dot{\omega}_x \cos \psi + \Gamma(\underbrace{\omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi}_{=\dot{\theta} \leftarrow (165)}) = 0. \quad (168)$$

式 (161) を代入し, 両辺に $I_{xx} \sin \theta$ をかけると,

$$I_{xx} \sin \theta (\dot{\omega}_y \sin \psi - \dot{\omega}_x \cos \psi) - I_{zz} \omega \dot{\theta} \sin \theta + I_{xx} \omega \dot{\theta} \sin \theta = 0. \quad (169)$$

微分をまとめると (まとめたことででてくるおつりを右辺に移す),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [I_{xx} \sin \theta (\omega_y \sin \psi - \omega_x \cos \psi) + I_{zz} \omega \cos \theta] + I_{xx} \omega \dot{\theta} \sin \theta \\ = I_{xx} \dot{\theta} \cos \theta (\underbrace{\omega_y \sin \psi - \omega_x \cos \psi}_{=\dot{\phi} \sin \theta \leftarrow (165)}) + I_{xx} \dot{\psi} \sin \theta (\underbrace{\omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi}_{=\dot{\theta} \leftarrow (165)}), \\ = I_{xx} \dot{\theta} \sin \theta (\underbrace{\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}}_{=\omega \leftarrow (165)}). \end{aligned} \quad (170)$$

よって, 保存量 L_Z が存在することがわかる:

$$L_Z \equiv I_{xx} \sin \theta (\omega_y \sin \psi - \omega_x \cos \psi) + I_{zz} \omega \cos \theta = I_{xx} \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_{zz} \omega \cos \theta. \quad (171)$$

最後の表式は式 (165) を用いて $\omega_{x,y}$ を消去している. L_Z は Z 軸まわりの角運動量に他ならない. L_Z が保存することは, 独楽には $-\hat{Z}$ 方向の重力と $\hat{Z}$ 方向の垂直抗力しかはたらいていないことから直感的に理解できる. 式 (171) が Z 方向の角運動量であることは, xyz 座標系における角運動量が $(L_x, L_y, L_z)^T = (I_{xx}\omega_x, I_{xx}\omega_y, I_{zz}\omega)^T$ であることを用いて, Z 軸への射影を考えても良いし, 変換行列 (154) を $(L_x, L_y, L_z)^T$ に作用させて第三成分を計算してみても良い.

式 (171) より,

$$\dot{\phi} = \frac{L_Z - I_{zz} \omega \cos \theta}{I_{xx} \sin^2 \theta}, \quad (172)$$

なので, これをエネルギーの式 (167) に代入すると,

$$\epsilon = \frac{I_{xx}}{2} \left[\dot{\theta}^2 + \frac{(L_Z - I_{zz} \omega \cos \theta)^2}{I_{xx}^2 \sin^2 \theta} \right] + MgR \cos \theta, \quad (173)$$

が得られる. 方程式を無次元化するために, 両辺を $I_{xx}/2$ で割って, $\alpha = 2\epsilon/I_{xx}$, $A = L_Z/I_{xx}$, $B = I_{zz}\omega/I_{xx}$, $\beta = 2MgR/I_{xx}$ とおくと,

$$\alpha = \dot{\theta}^2 + \frac{(A - B \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \beta \cos \theta \longrightarrow (\dot{\theta} \sin \theta)^2 = \alpha \sin^2 \theta - (A - B \cos \theta)^2 - \beta \cos \theta \sin^2 \theta, \quad (174)$$

と書ける. さらに $u = \cos \theta$ とおけば,

$$\dot{u}^2 = \alpha(1 - u^2) - (A - Bu)^2 - \beta u(1 - u^2). \quad (175)$$

よって, 両辺の逆数のルートをとって u で積分すれば (符号は気にしないでいい加減に書くと),

$$t = \int_{u(t=0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (A - Bu)^2}}, \quad (176)$$

となる．この積分を実行するには楕円積分の知識が必要であるので詳細には立ち入らないことにする*³．式 (176) より，原理的には $\theta = \theta(t)$ が求まる．これを式 (172) に代入し，時間で積分すれば $\phi(t)$ が求まる．また， ψ に関しては，式 (165) を用いると $\dot{\psi} = \omega - \dot{\phi} \cos \theta$ なので，時間で積分すれば $\psi(t)$ が求まり，3つの角度 θ, ϕ, ψ の時間依存性がわかり，独楽の運動が記述できたことになる．特に，8.2.1 節で考えた単純な歳差運動 ($\dot{u} = 0$) に加え， θ がある範囲（この範囲は $\dot{u} = 0$ となり被積分関数が発散する点であることがわかる）で変化しながら鉛直軸まわりに歳差運動する振る舞いが解として得られる．この現象は章動と呼ばれている． θ が一定の $\dot{u} = 0$ の解についても考えてみると良い．

以上のように，複雑な問題でも保存量を上手く利用すれば問題が簡単になり，解ける場合がある．何が保存するのか？というのは現段階では物理的な考察から見当をつけるしかないが，二年生で習う解析力学の考え方（ラグランジアンやハミルトニアン）を使うと系統的に保存量を見つけ出すことが可能である．

*³楕円積分をあらわに用いない詳細な解説がゴールドスタインの古典力学・上に記載されている．

9 連成振動

9.1 ばねにつながれた2つの質点の運動

図 17 のように、質量 m の二つの質点が、ばね定数 k と K の三つのばねにつながれている。平衡位置からの質点の位置座標の変化をそれぞれ x, y と表す。このときの2つの質点の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx + K(y - x), \quad m\ddot{y} = -K(y - x) - ky, \quad (177)$$

である。この連立微分方程式の解を以下のように仮定して探してみよう：

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad y(t) = B \cos(\omega t + \phi). \quad (178)$$

ここで、 $x(t), y(t)$ とともに振動数 ω 、同じ位相 ϕ で振動するという特別な形の解であることに注意すること。このような振動のことを固有振動とか基準振動などとよび、振動数のことを固有振動数とよぶ。式 (177) に代入し、共通の因子 $\cos(\omega t + \phi)$ で両辺割ると、

$$-m\omega^2 A = -kA + K(B - A), \quad -m\omega^2 B = -K(B - A) - kB, \quad (179)$$

を得る。この二つの式は行列にまとめると見通しが良くなる：

$$\begin{pmatrix} k + K - m\omega^2 & -K \\ -K & k + K - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (180)$$

$A, B = 0$ でない非自明な解が存在するためには左辺の行列の逆行列が存在してはいけない。もし存在すれば、その逆行列を左から両辺に作用させると、 $A = B = 0$ になってしまう。逆行列が存在しない為の必要十分条件は行列式が0であることである。つまり、

$$0 = \det \begin{pmatrix} k + K - m\omega^2 & -K \\ -K & k + K - m\omega^2 \end{pmatrix} \rightarrow (k + K - m\omega^2)^2 - K^2 = (k + 2K - m\omega^2)(k - m\omega^2) = 0,$$

なので、

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega^2 = \omega_2^2 = \frac{k + 2K}{m}, \quad (181)$$

であれば、運動方程式を満たすことがわかる。 $\omega_{1,2}$ は正負どちらでもよいが、負の場合でも $\phi \rightarrow -\phi$ とすると結局正の場合の解と同じ物になるので、正の ω だけを考えれば良い。

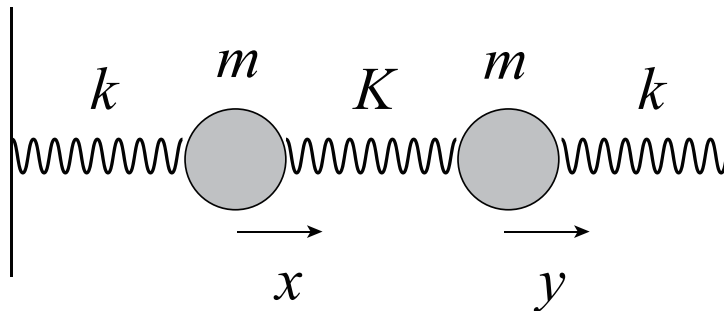


図 17 三つのばねにつながれた二つの質点.

まず, $\omega = \omega_1$ の場合を考えよう. 式 (180) に代入すると,

$$\begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A = B, \quad (182)$$

が成立しないといけない. つまり, $\omega = \omega_1$ の場合の解は,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (183)$$

である. 一方, $\omega = \omega_2$ の場合は, 式 (180) に代入すると,

$$\begin{pmatrix} -K & -K \\ -K & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A = -B, \quad (184)$$

が成立しないといけない. つまり, $\omega = \omega_2$ の場合の解は,

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (185)$$

である. 二つの基準振動の変位の相対的な方向の組み合わせを図 18 に示しておく. ω_1 が K に依らないのは, 中心のバネが伸縮していない為である. 運動方程式は二階の微分方程式なので, 一般解には自由度あたり 2 つの任意定数があればよい. よって, 一般解は式 (183) と式 (185) の重ね合わせで書くことができ,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (186)$$

となる. 一般解は二つの固有振動の線形結合で表されている. それぞれの固有振動のことをモードとよぶこともある. この例では, 一般解は二つのモードで展開されている, などというように使われる.

4 つの任意定数 $A_{1,2}$ と $\phi_{1,2}$ は, 初期条件より,

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = A_1 \cos \phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \cos \phi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (187)$$

および,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = -\omega_1 A_1 \sin \phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \omega_2 A_2 \sin \phi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (188)$$

を用いて決定される.

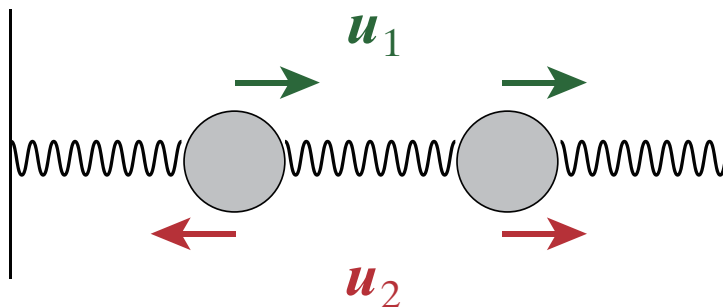


図 18 二つの固有モードの変位の方法. $\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1)^T$.

ここまでやると、勘の良い人は気づいているかもしれないが、運動方程式 (177) は行列の対角化のテクニックを使って解くことができる。逆行列が存在しない条件を使用するところなどは全く同じ作業である。実際に運動方程式 (177) を行列表示すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{k+K}{m} & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & \frac{k+K}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = -\hat{A}\mathbf{x}, \quad (189)$$

のように対称行列 $\hat{A}$ を用いて表すことができる。両辺左から適当な直交行列 $\hat{U}^T$ を作用させると、 $\hat{U}\hat{U}^T = \hat{1}$ を思い出して、

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{U}^T \mathbf{x} = -\hat{U}^T \hat{A} \hat{U} \hat{U}^T \mathbf{x} = - \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \hat{U}^T \mathbf{x}, \quad (190)$$

のように必ず対角化することができる。上記と全く同じ計算により、固有ベクトルは、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}} : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (191)$$

となるので（固有ベクトルの全体の符号（位相）は任意で構わない）、直交行列は、

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (192)$$

である。直交行列で変換された $\hat{U}^T \mathbf{x}$ を $\mathbf{x}' = (x', y')^T \equiv \hat{U}^T \mathbf{x}$ と書くと、式 (190) より、単振動の微分方程式を解いて、

$$x'(t) = \sqrt{2}A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad y'(t) = \sqrt{2}A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (193)$$

のように解が求まる。ここで、後の便宜上 $\sqrt{2}$ をくくりだしておいた。もとの表示 $\mathbf{x}$ での解は、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \hat{U} \mathbf{x}' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x'(t) + y'(t) \\ x'(t) - y'(t) \end{pmatrix}, \\ &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (194)$$

となり、確かに式 (186) と一致することが確認できる。

最後にこの系の力学的エネルギーについて考えておこう。力学的エネルギー E は、運動エネルギーと位置エネルギーの和なので、

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{y}^2 + \frac{k}{2} x^2 + \frac{K}{2} (x-y)^2 + \frac{k}{2} y^2 = \frac{m}{2} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{k}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \frac{K}{2} (x-y)^2, \quad (195)$$

のように表される。右辺第一項、第二項は速度ベクトル、変位ベクトルの長さの二乗の形になっているが、第三項は第二の固有ベクトルからの寄与しかないとわかる。式 (194) を代入すると、

$$\begin{aligned} E &= \left[m\omega_1^2 A_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi_1) + m\omega_2^2 A_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \phi_2) \right] + k \left[A_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_1) \right] \\ &\quad + 2KA_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2), \\ &= \left[kA_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi_1) + (k+2K)A_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \phi_2) \right] + k \left[A_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_1) \right] \\ &\quad + 2KA_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2), \\ &= kA_1^2 + (k+2K)A_2^2 \left(= m\omega_1^2 A_1^2 + m\omega_2^2 A_2^2 \right). \end{aligned} \quad (196)$$

よって、力学的エネルギーはそれぞれの固有モードの振幅の二乗に比例する寄与の和になっていることがわかる。

9.2 うなり

バネにつながれた二つの質点の変位の一般解 (194) を用いて, 具体的な運動の様子を調べてみよう. 簡単のため, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_1 = A_2 = A$ とおく. これは二つの質点の初速が共に 0 で, 初期変位が $x(0) = 2A$, $y(0) = 0$ に対応する. この時, 具体的に $x(t)$ と $y(t)$ を書くと,

$$x(t) = A \left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \right] = 2A \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \equiv 2A \cos(\Delta\omega t) \cos(\bar{\omega} t), \quad (197)$$

$$y(t) = A \left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) \right] = 2A \sin(\Delta\omega t) \sin(\bar{\omega} t), \quad (198)$$

と変形できる. ここで,

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k}{M}} + \sqrt{\frac{k+2K}{M}} \right), \quad \Delta\omega \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k+2K}{M}} - \sqrt{\frac{k}{M}} \right), \quad (199)$$

である. 二つの質点間のバネ定数が小さい ($K \ll k$) とき, $\Delta\omega \simeq \frac{\bar{\omega}}{2k} K$ となる. ω_1 を一定にして ω_2 を変化させていったときの $x(t)$ を図 19(a) に示す. $\omega \equiv \omega_2/\omega_1 = 1$ では $\cos(\omega_1 t)$ で振動するだけだが, 少しだけずれている場合は, 長い周期 $2\pi/\Delta\omega$ の振動と短い周期 $2\pi/\bar{\omega}$ の振動が重なって現れる. これをうなりとよぶ. $\omega \rightarrow 1$ の極限で, 長い周期 $2\pi/\Delta\omega \rightarrow \infty$ となり一つの振動数の波になることがわかる. 図 19(b) は, $\omega = 1.1$ での $x(t)$ と $y(t)$ の比較を示している. $x(t)$ の振幅と $y(t)$ の振幅が交互に変化していることが見てとれる.

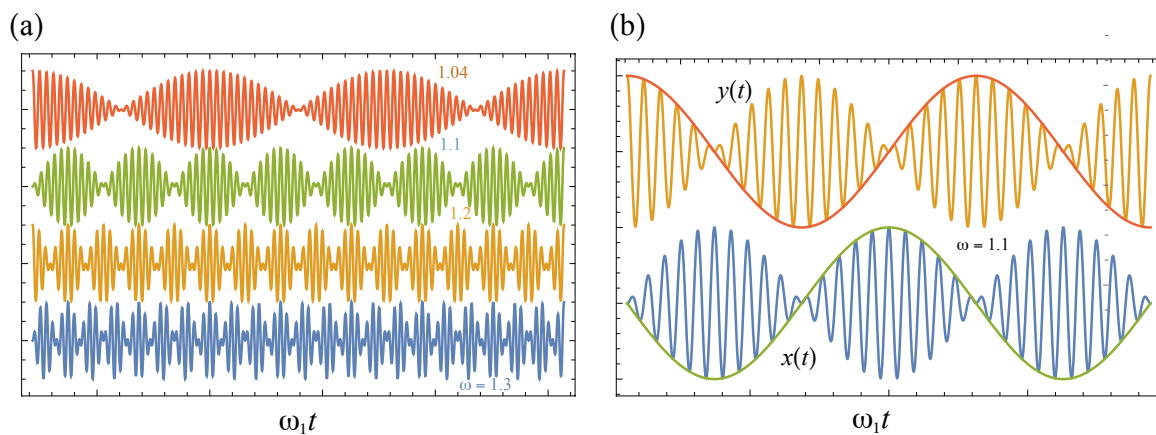


図 19 (a) $x(t)$ の時間依存性. $\omega \equiv \omega_2/\omega_1$. (b) $\omega = 1.1$ における $x(t)$ と $y(t)$ の時間依存性.

9.3 抵抗のあるばねの強制振動 *

行列の対角化を用いて解くことができる例を紹介しよう．外力 $F \cos(\Omega t)$ が作用する，抵抗のあるバネの問題の運動方程式は，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos(\Omega t), \quad (200)$$

である． $\omega^2 \equiv k/m$ として， $\omega y = \dot{x}$ とおくと，

$$\dot{x} - \omega y = 0, \quad \dot{y} + 2\gamma y + \omega x = f \cos(\Omega t), \quad (201)$$

という連立方程式になる．ただし， $2\gamma \equiv c/m$ ， $f \equiv F/(m\omega)$ である．これを行列とベクトル $\mathbf{x} \equiv (x, y)^T$ で書くと，

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 2\gamma \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \cos(\Omega t). \quad (202)$$

ここで，左辺の行列を対角化しよう．固有値を λ とおいて，

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & 2\gamma - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^2 - 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \lambda_{\pm} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}. \quad (203)$$

固有ベクトルはそれぞれ，

$$\mathbf{u}_- = \begin{pmatrix} -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_+/\omega \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_+ = \begin{pmatrix} -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_-/\omega \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \frac{\gamma}{\omega}, \quad (204)$$

となる（規格化はしていない）．対称行列の対角化と異なり，固有ベクトルを並べた変換行列 $\hat{U}$ の転置行列は必ずしも逆行列 $\hat{U}^{-1}$ というわけではない． $\hat{U}$ の逆行列を直接求めると，

$$\hat{U} = (\mathbf{u}_- \quad \mathbf{u}_+) = \begin{pmatrix} -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} & -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_+}{\omega} & -\frac{\lambda_-}{\omega} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} & 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} & 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \end{pmatrix},$$

である．式 (202) の両辺に左から $\hat{U}^{-1}$ をかけ， $\hat{U}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}' = (x_-, x_+)^T$ とかくと，

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}' + \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 2\gamma \end{pmatrix} \hat{U} \mathbf{x}' = \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \cos(\Omega t) \rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{x}' + \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \mathbf{x}' = \frac{f \cos(\Omega t)}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \\ 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \end{pmatrix},$$

となる．この微分方程式はもはや連立微分方程式ではなく，右辺を定数 $f_{-,+}$ と表記すると，

$$\frac{dx_-}{dt} + \lambda_- x_- = f_- \cos(\Omega t), \quad \frac{dx_+}{dt} + \lambda_+ x_+ = f_+ \cos(\Omega t), \quad (205)$$

という二つの独立な一階の微分方程式であるので，定数変化法を用いれば簡単に，

$$x_{\pm}(t) = C_{\pm}(t)e^{-\lambda_{\pm}t} \rightarrow \frac{dC_{\pm}(t)}{dt} = f_{\pm} \cos(\Omega t)e^{\lambda_{\pm}t}, \quad (206)$$

という係数 $C_{\pm}(t)$ についての微分方程式が得られる． $t = 0$ から t まで積分すると，

$$C_{\pm}(t) = C_{\pm}(0) + f_{\pm} \int_0^t dt' \frac{e^{(\lambda_{\pm} + i\Omega)t'} + e^{(\lambda_{\pm} - i\Omega)t'}}{2} = C_{\pm}(0) + \frac{f_{\pm}}{2} \left[\frac{e^{(\lambda_{\pm} + i\Omega)t} - 1}{\lambda_{\pm} + i\Omega} + \frac{e^{(\lambda_{\pm} - i\Omega)t} - 1}{\lambda_{\pm} - i\Omega} \right].$$

よって,

$$x_{\pm}(t) = D_{\pm}(0)e^{-\lambda_{\pm}t} + \frac{f_{\pm}}{2} \left[\frac{e^{i\Omega t}}{\lambda_{\pm} + i\Omega} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\lambda_{\pm} - i\Omega} \right], \quad (207)$$

となることがわかる. ここで, 特解とそうでない部分に分けて, 新たに係数 $D_{\pm}$ を導入した. 以下では $\lambda_{\pm}$ が虚部を含む (減衰振動) の場合を解析してみよう. このとき,

$$f_{\pm} = \pm \frac{f\lambda_{\pm}}{2i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}, \quad (208)$$

である. また, もとの変数 $x(t)$ は $\mathbf{x} = \hat{U}\mathbf{x}'$ より, 特解部分だけ抜き出すと (それを x^* と書こう)

$$x(t) = -\frac{\lambda_+}{\omega}x_- - \frac{\lambda_-}{\omega}x_+, \quad (209)$$

より,

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \frac{f\lambda_+\lambda_-}{4i\omega\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \left[\frac{e^{i\Omega t}}{\lambda_- + i\Omega} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\lambda_- - i\Omega} \right] - \frac{f\lambda_+\lambda_-}{4i\omega\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \left[\frac{e^{i\Omega t}}{\lambda_+ + i\Omega} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\lambda_+ - i\Omega} \right], \\ &= \frac{f\lambda_+\lambda_-}{4i\omega\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \left\{ e^{i\Omega t} \left[\frac{1}{\lambda_- + i\Omega} - \frac{1}{\lambda_+ + i\Omega} \right] + e^{-i\Omega t} \left[\frac{1}{\lambda_- - i\Omega} - \frac{1}{\lambda_+ - i\Omega} \right] \right\}, \\ &= \frac{f\lambda_+\lambda_-}{4i\omega\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \left\{ e^{i\Omega t} \left[\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+\lambda_- - \Omega^2 + i\Omega(\lambda_+ + \lambda_-)} \right] + e^{-i\Omega t} \left[\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+\lambda_- - \Omega^2 - i\Omega(\lambda_+ + \lambda_-)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (210)$$

ここで,

$$\lambda_+\lambda_- = \omega^2, \quad \lambda_+ + \lambda_- = 2\gamma, \quad \lambda_+ - \lambda_- = 2i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}, \quad (211)$$

を用いて整理すると,

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \frac{f\omega^2}{4i\omega\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \left\{ e^{i\Omega t} \left[\frac{2i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}{\omega^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\gamma} \right] + e^{-i\Omega t} \left[\frac{2i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}{\omega^2 - \Omega^2 - 2i\Omega\gamma} \right] \right\}, \\ &= \frac{F}{m} \left[\frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \cos(\Omega t) + \frac{2\gamma\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \sin(\Omega t) \right], \end{aligned} \quad (212)$$

のように特解が求まる. 運動方程式 (200) に代入して確認してみよ. $\Omega \simeq \omega$ で共鳴が起きることが図 20 から確認できる. 式 (212) は位相 ϕ を用いて,

$$x^*(t) = \frac{F}{m} \frac{\cos(\Omega t - \phi)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}, \quad \tan \phi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (213)$$

のように書くことができる. 特解を行列の対角化を用いて求めることができたが, 計算はかなり煩雑になっており, 「力技」という感じは否めない. とにかく色んな技術を駆使すれば解ける場合がある, というのを感じてほしい. 式 (212) の形のように, $\cos(\Omega t)$ と $\sin(\Omega t)$ の線形結合で書けることを直感的に思いつければ良いが...

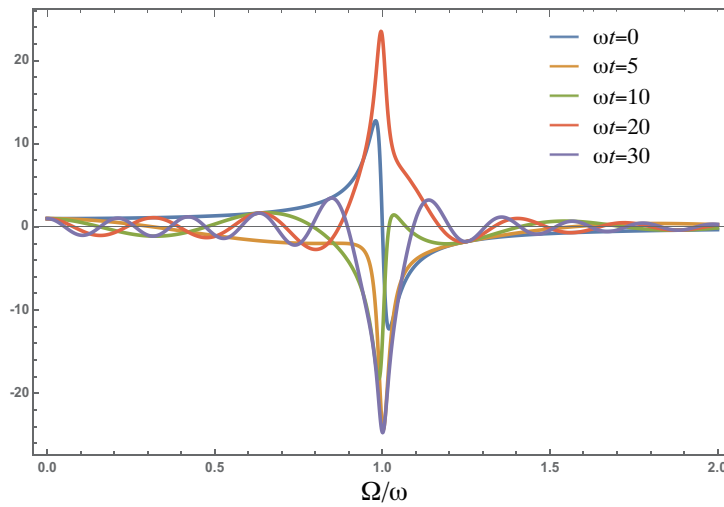


図 20 強制振動の特解 (212). $\gamma = 0.02\omega$ のときの $m\omega^2 x^*/F$ の Ω/ω 依存性.

9.4 ばねにつながれた3つの質点の運動

図 21 のように, 質量 m の三つの質点が, ばね定数 k の四つのばねにつながれている. 平衡位置からの質点の位置座標の変化をそれぞれ x , y , z と表す. このとき三つの質点の運動方程式は,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + k(y - x), \\ m\ddot{y} &= -k(y - x) + k(z - y), \\ m\ddot{z} &= -k(z - y) - kz, \end{aligned}$$

である. 9.1 節と同様に, ベクトル $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ と 3×3 の実対称行列 $\hat{A}$ を用いて, 運動方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = -\frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \equiv -\omega^2 \hat{A} \mathbf{x}, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (214)$$

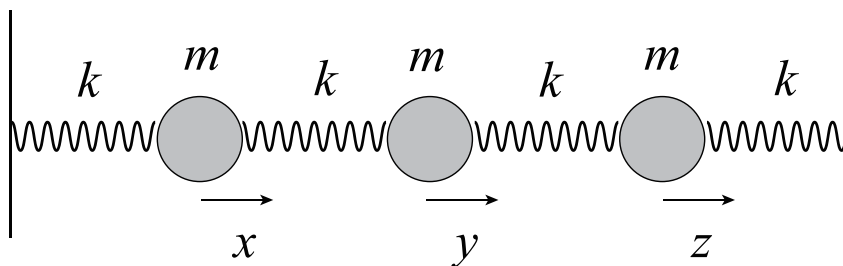


図 21 四つのばねにつながれた三つの質点.

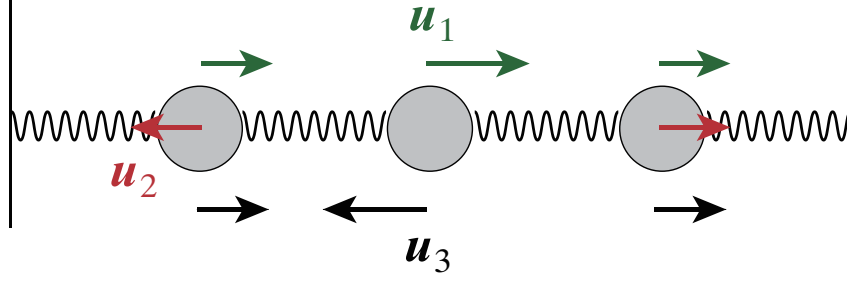


図 22 三つの固有振動.

と書ける．よって， $\hat{A}$ を対角化して固有振動と固有振動数を求めればよいことになる．行列 $\hat{A}$ の固有値を λ とおくと，

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}. \quad (215)$$

それぞれの固有ベクトルを求めると，

$$\lambda = \lambda_1 = 2 - \sqrt{2}: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (216)$$

$$\lambda = \lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (217)$$

$$\lambda = \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (218)$$

となる．異なる固有値の固有ベクトルは直交していることに注意すること．これらの固有振動の相対的な方向の組み合わせを図 22 に示しておく．3つの質点の変位を固有ベクトルに比例するように $\mathbf{x}(t) = \alpha_i(t)\mathbf{u}_i$ とおけば，

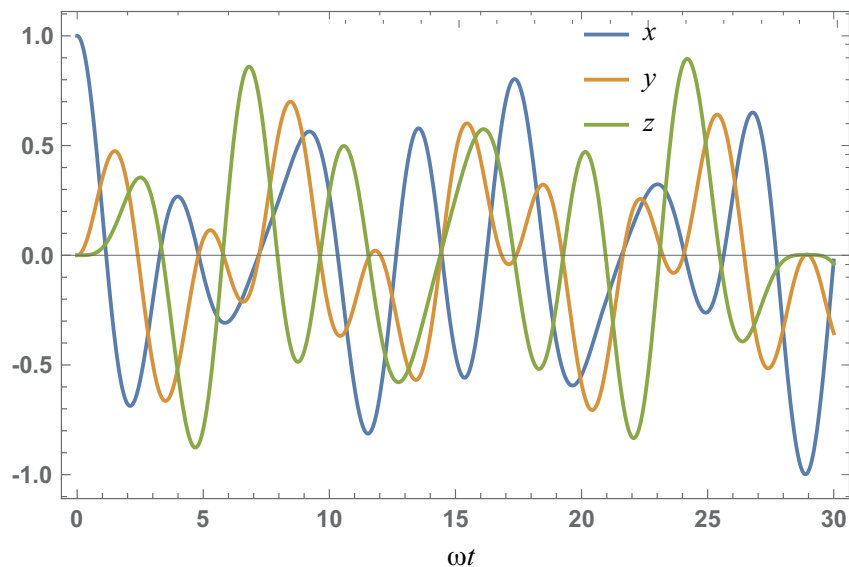
$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\alpha}_i(t)\mathbf{u}_i = -\omega^2 \lambda_i \alpha_i(t)\mathbf{u}_i \rightarrow \ddot{\alpha}_i(t) = -\omega^2 \lambda_i \alpha_i(t) \rightarrow \alpha_i(t) = C_i \cos(\omega\sqrt{\lambda_i}t) + D_i \sin(\omega\sqrt{\lambda_i}t),$$

のように解が求まる．固有ベクトル $\mathbf{u}_i$ は時間に依存しないことに注意すること．一般解はこれら三つの固有振動の線形結合で書けるので，6つの定数 $C_{1,2,3}$, $D_{1,2,3}$ を用いて，

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1,2,3} \left[C_i \cos(\omega\sqrt{\lambda_i}t) + D_i \sin(\omega\sqrt{\lambda_i}t) \right] \mathbf{u}_i, \quad (219)$$

のように表すことができる．初期条件を例えば $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ とすると，

$$\sum_{i=1,2,3} D_i \omega \sqrt{\lambda_i} \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad (220)$$

図 23 式 (223) の $x(t)/x_0$, $y(t)/x_0$, $z(t)/x_0$ の時間依存性.

となる. $\mathbf{u}_i$ は互いに直交しているので, $\mathbf{u}_{1,2,3}$ との内積をとれば, $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ となるのが容易にわかる. 一例として, 質点の変位の初期値を $\mathbf{x} = (x_0, 0, 0)^T$ と仮定すると,

$$\sum_{i=1,2,3} C_i \mathbf{u}_i = \frac{C_1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{C_3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (221)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (222)$$

連立方程式を解くと,

$$C_1 = \frac{x_0}{2}, \quad C_2 = \frac{x_0}{\sqrt{2}}, \quad C_3 = \frac{x_0}{2},$$

を得る. よって,

$$\mathbf{x}(t) = \frac{x_0}{2} \cos \left[\sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega t \right] \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_0}{\sqrt{2}} \cos \left[\sqrt{2} \omega t \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x_0}{2} \cos \left[\sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega t \right] \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (223)$$

のように, $\mathbf{x}$ の時間依存性が求まる. 時間依存性を図示すると図 23 のようになり, 3つの質点の変位が複雑に (ただし, 基準振動の振動数に従って) 変化していくことがわかる.

9.5 4種のばねにつながれた質量の異なる3つの質点の運動 *

9.4節の3つの質点の質量が左から m_1, m_2, m_3 , ばね定数も左から k_1, k_2, k_3, k_4 の場合の運動方程式は,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -k_1 x + k_2 (y - x), \\ m_2 \ddot{y} &= -k_2 (y - x) + k_3 (z - y), \\ m_3 \ddot{z} &= -k_3 (z - y) - k_4 z, \end{aligned}$$

である。行列で書くと,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = - \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)/m_1 & -k_2/m_1 & 0 \\ -k_2/m_2 & (k_2 + k_3)/m_2 & -k_3/m_2 \\ 0 & -k_3/m_3 & (k_3 + k_4)/m_3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (224)$$

のように表すことができるが、ここに現れた 3×3 行列は対称行列ではない。この行列を対称行列に変換するには、以下のような、重み付けした座標 $\tilde{\mathbf{x}}$ を用いると良い:

$$\tilde{\mathbf{x}} \equiv (\sqrt{m_1}x, \sqrt{m_2}y, \sqrt{m_3}z)^T. \quad (225)$$

$\tilde{\mathbf{x}}$ についての運動方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{\mathbf{x}} = - \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & 0 \\ -\frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{k_3}{\sqrt{m_2 m_3}} \\ 0 & -\frac{k_3}{\sqrt{m_2 m_3}} & \frac{k_3+k_4}{m_3} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \equiv -\hat{A} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (226)$$

のように、対称行列 $\hat{A}$ で表される。 $\hat{A}$ の固有値を $\lambda_{1,2,3}$, その固有ベクトルを $\mathbf{v}_{1,2,3}$ と書くと、対称行列の固有ベクトルは直交しているので、 $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$ である。 $\tilde{\mathbf{x}}$ の一般解は,

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1,2,3} \left[C_i \cos(\sqrt{\lambda_i} t) + D_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t) \right] \mathbf{v}_i, \quad (227)$$

なので、もとの質点の変位 $\mathbf{x}(t)$ は,

$$[\mathbf{x}(t)]_j = \frac{1}{\sqrt{m_j}} \sum_{i=1,2,3} \left[C_i \cos(\sqrt{\lambda_i} t) + D_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t) \right] [\mathbf{v}_i]_j, \quad [\mathbf{x}(t)]_1 = x(t), \quad [\mathbf{x}(t)]_2 = y(t), \quad [\mathbf{x}(t)]_3 = z(t),$$

と表すことができる。 $\sqrt{m_j}$ が分母に表れているので、大きな質量の質点の変位は小さくなることが読み取れる。これは慣性を考えると自然である。 C_i, D_i は $\sqrt{\text{質量}} \times \text{長さ}$ の次元をもつ係数である。行列を対称行列に変換してから計算すると、固有ベクトルが直交するので、計算の確認がしやすいが、もとの非対称な行列を直接対角化しても結果は同じである。対称行列に変換する際は $\tilde{\mathbf{x}}$ から $\mathbf{x}$ に再変換するのが手間であり、忘れやすいので注意すること。複数の元素を含む固体中の原子振動の固有モードは、このように対称行列に変換して計算すると見通しがよくなる。詳しくは物性物理学もしくは統計力学の講義で習う。

♠ 例 26 : $m_1 = m_3 = 8m_2 \equiv m$, $k_1 = k_4 = 9k_2 = 9k_3 \equiv 9k$ の場合 :

$$\hat{A} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 10 & -\sqrt{8} & 0 \\ -\sqrt{8} & 16 & -\sqrt{8} \\ 0 & -\sqrt{8} & 10 \end{pmatrix} = \frac{10k}{m} \hat{\mathbf{1}} + \underbrace{\frac{2k}{m} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 3 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{B}}, \quad (228)$$

と書けるので ($\hat{\mathbf{1}}$ は単位行列), $\hat{B}$ を対角化すればよい.

$$0 = \det(\hat{B} - \lambda \hat{\mathbf{1}}) \longrightarrow \lambda^2(3 - \lambda) + 4\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = -1, 0, 4, \quad (229)$$

と, 固有値 λ が求まる. 固有ベクトルは,

$$\lambda = \lambda_1 = -1: \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \lambda_2 = 0: \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \lambda_3 = 4: \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{8} \\ 1 \end{pmatrix},$$

のように互いに直交するベクトルが得られる. よって, $C_i = c_i\sqrt{m}$, $D_i = d_i\sqrt{m}$ と書き直すと,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(t)]_j &= \sqrt{\frac{m}{m_j}} \sum_{i=1,2,3} [c_i \cos(\omega_i t) + d_i \sin(\omega_i t)] [\mathbf{v}_i]_j, \quad \omega_i \equiv \sqrt{10 + 2\lambda_i} \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ &= \sqrt{\frac{m}{m_j}} \sum_{i=1,2,3} \beta_i \cos(\omega_i t - \phi_i) [\mathbf{v}_i]_j, \quad \tan \phi_i \equiv \frac{d_i}{c_i}, \quad \beta_i \equiv \sqrt{c_i^2 + d_i^2}, \end{aligned} \quad (230)$$

なので, 結局,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}\beta_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\beta_3 \cos(\omega_3 t - \phi_3)}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

となる. この表式に現れている3つの縦ベクトルは必ずしも互いに直交していないことに注意すること.

10 多数の質点の連成振動

図 24 のような N 個の質量 M の質点がバネ係数 k のバネで繋がった連成振動を考える．バネの自然長を a とする．

10.1 連続極限と波動方程式：固定端

n 番目の質点の運動方程式は、

$$M\ddot{x}_n = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n), \quad (2 \leq n \leq N-1), \quad (231)$$

$$M\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1), \quad (232)$$

$$M\ddot{x}_N = -k(x_N - x_{N-1}) - kx_N, \quad (233)$$

であるが、 $n = 1$ と N の運動方程式がその他と少し異なっているので扱いが面倒である．そこで、図 24 の両端に示したように仮想的な質量 M の質点を考え、それらの変位を x_0, x_{N+1} とかく．ただし、固定端条件: $x_0 = x_{N+1} = 0$ である解を探すことにする．従って、質点の運動方程式は、式 (231) で一括に表すことが可能で、

$$M\ddot{x}_n = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n), \quad (1 \leq n \leq N), \quad (234)$$

である．次に、 n 番目の質点の変位を $x_n = f(na)$ のように、「左から n 番目の平衡位置 $u = na$ 」の「関数」として表しておく． $(N+1)a \equiv l$ を一定に保ちつつ、質点の数をどんどん増やしていく ($N \rightarrow \infty$) 極限 (つまり $a \rightarrow 0$) では $f(u)$ は $[0, l]$ の間で滑らかに変化する関数とみなせるので、運動方程式 (234) の右辺は近似的に、

$$\rightarrow ka \left[\frac{f(na+a) - f(na)}{a} - \frac{f(na) - f(na-a)}{a} \right] \sim ka^2 \frac{f'(na+a/2) - f'(na-a/2)}{a} \sim ka^2 f''(na),$$

と表すことができる．ここで、 $\prime$ は u による (偏) 微分である．よって、運動方程式は、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, u) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} f(t, u), \quad c^2 \equiv \frac{ka^2}{M}, \quad f(t, u)|_{u=0, l} = 0, \quad \text{固定端}, \quad (235)$$

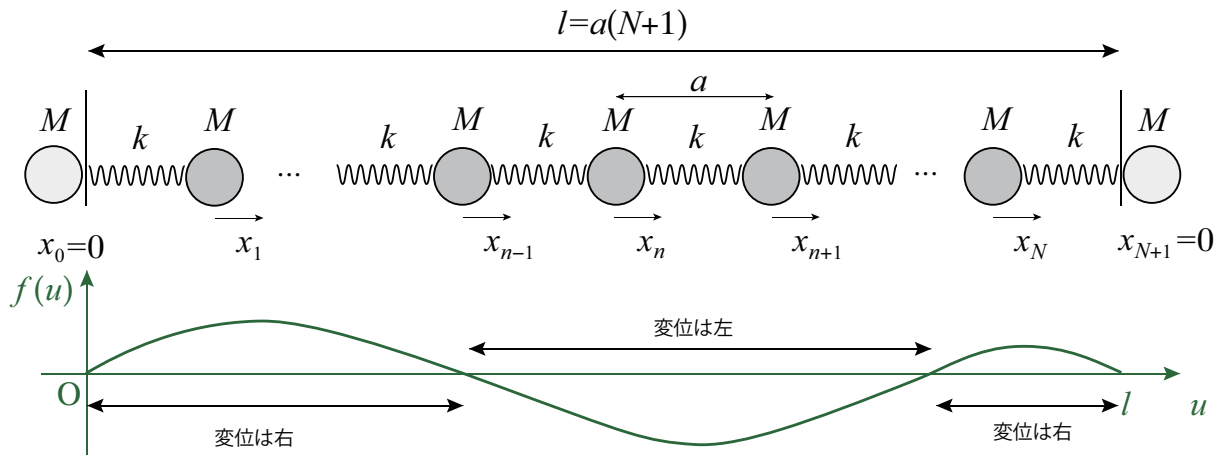


図 24 N 個の質点の連成振動.

と等価になる．この微分方程式は一次元の波動方程式と呼ばれているものである．ここで， c は速度の次元をもつ定数であり， f の時間 t 依存性を明記しておいた． u は変位ではなく質点の平衡位置を表す「ただの座標」なので t に依存しない．

式 (235) は変数分離 $f(t, u) = A(t)B(u)$ の形を仮定すれば解を求めることができる．式 (235) に代入すると，

$$\frac{1}{c^2 A(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(t) = \frac{1}{B(u)} \frac{\partial^2}{\partial u^2} B(u), \quad (236)$$

が成立しなければならない．式 (236) の左辺は t のみの関数であるが，右辺は u のみの関数になっている．両辺が等しいためには両辺が t にも u にも依らない定数である必要がある．この定数を $-q^2$ とおくと，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(t) = -(cq)^2 A(t), \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} B(u) = -q^2 B(u), \quad (237)$$

となる．解は与えられた (仮定した) q について，

$$A_q(t) = C_{1q} \cos(cqt) + C_{2q} \sin(cqt), \quad B_q(u) = D_{1q} \cos(qu) + D_{2q} \sin(qu), \quad (238)$$

となることは容易に導出できる．ここまで， q の値については何の制限もつけていなかったが，もし q が実数でなければ $q = a + ib$ と書くと，

$$\cos(cqt) = \frac{e^{icqt} + e^{-icqt}}{2} = \frac{e^{icat}e^{-cbt} + e^{-icat}e^{cbt}}{2}, \quad \sin(cqt) = \frac{e^{icqt} - e^{-icqt}}{2i} = \frac{e^{icat}e^{-cbt} - e^{-icat}e^{cbt}}{2i},$$

などとなり， $t \rightarrow \pm\infty$ で発散してしまう項を含んでしまう．このような解は物理的におかしいので排除することにすれば， q は実数に制限される．また，境界条件は $f(t, 0) = f(t, l) = 0$ という固定端条件なので， $B_q(0) = B_q(l) = 0$ でなければならない：

$$B_q(0) = D_{1q} = 0, \quad B_q(l) = D_{2q} \sin(ql) = 0 \rightarrow q = \frac{m\pi}{l} = \frac{m\pi}{(N+1)a}, \quad (m = 1, 2, \dots, N).$$

$m = 0, N+1$ は全ての変位が $f = 0$ となるので不適（というか考慮する必要がない）．また， $m = N+2, N+3, \dots$ は $m = 1, 2, \dots$ と等価な解になるので， $1 \leq m \leq N$ として良い．式 (235) は線形同次微分方程式なので，一般解は全ての q についての線型結合として，

$$f(t, u) = \sum_{m=1}^{N \sim \infty} \left\{ a_m \cos \left[\frac{m\pi ct}{l} \right] + b_m \sin \left[\frac{m\pi ct}{l} \right] \right\} \sin \left[\frac{m\pi u}{l} \right],$$

となる．ここで， $C_{1q}D_{2q} = a_m$ ， $C_{2q}D_{2q} = b_m$ と書いた．

$N \rightarrow \infty$ 個の質点の運動を考えているわけなので，初期条件は $f(0, u)$ と $\partial f(t, u)/\partial t|_{t=0}$ の二つの u についての「関数形として与える」必要がある．これは，式 (235) が t に関して二階の微分方程式であるためであり， N 個の質点の初期変位と初期速度を与える必要がある．ここでは $\partial f(t, u)/\partial t|_{t=0} = 0$ として話を進めよう．この条件より， $b_m = 0$ であり， $f(0, u)$ の条件は，

$$f(0, u) = \sum_{m=1}^{N \sim \infty} a_m \sin \left[\frac{m\pi}{l} u \right], \quad (239)$$

となる．連成振動という物理の問題をニュートンの運動方程式に従って解いたわけであるから，任意の初期条件が作れなければおかしいが，式 (239) で本当に任意の初期条件が表現できるのだろうか？実は（驚く

べきことに！）実際に任意の初期条件を a_m を適当に選ぶことで再現できるのである．式 (239) の両辺に $\frac{2}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}u\right)$ ($n \geq 1$) をかけて $u = 0$ から l まで積分すると、

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(0, u) \sin\left(\frac{n\pi}{l}u\right) du = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{2}{l} \int_0^l du \sin\left[\frac{m\pi}{l}u\right] \sin\left[\frac{n\pi}{l}u\right] = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dw \sin(mw) \sin(nw), \quad (240)$$

となるが、最後の積分は、

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dw \sin(mw) \sin(nw) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dw \left\{ \cos[(m-n)w] - \cos[(m+n)w] \right\} = \delta_{mn} \equiv \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 1 & (m = n), \end{cases} \quad (241)$$

と書けるので、クロネッカーのデルタ δ_{mn} になる．この結果を用いると、

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(0, u) \sin\left(\frac{n\pi}{l}u\right) du = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \delta_{mn} = a_n, \quad (\text{和の中で } m = n \text{ しか残らない}), \quad (242)$$

となり、 a_n ($n \geq 1$) が求まることがわかる．式 (239) と式 (242) は数学のフーリエ正弦級数と関係している（そのまま、と言っても良いが...）． a_n のことをフーリエ係数とよぶ．上記の議論は式 (239) を仮定したときの場合なので、任意の初期条件が表現できる証明にはなっていないことに注意せよ．証明が気になる人はフーリエ級数の一般論を参照すること．

まとめると、固定端条件でかつ初速度が 0 の $N \rightarrow \infty$ の連成振動の解 $f(t, u)$ は、

$$f(t, u) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi}{l}ct\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}u\right), \quad a_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(0, u) \sin\left(\frac{m\pi}{l}u\right) du, \quad (243)$$

となる．

10.2 N 個の質点の連成振動：固定端

$N \rightarrow \infty$ でない場合の運動方程式 (234) の解は $B_q(u)$ から構成することができる．実際に、左から n 番目の質点の変位を $N \rightarrow \infty$ の解の形と同型：

$$x_n^{(m)}(t) = \alpha_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}u\right) = \alpha_m(t) \sin\left(\frac{\pi m}{N+1}n\right), \quad (\leftarrow u = na \text{ だったのを思い出せ}), \quad (244)$$

とおくと、運動方程式 (234) より、

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n^{(m)}(t) &= \ddot{\alpha}_m(t) \sin\left[\frac{\pi m}{N+1}n\right] = \frac{k}{M} \alpha_m(t) \left\{ -2 \sin\left[\frac{\pi m}{N+1}n\right] + \sin\left[\frac{\pi m}{N+1}(n+1)\right] + \sin\left[\frac{\pi m}{N+1}(n-1)\right] \right\}, \\ &= \frac{k}{M} \alpha_m(t) \sin\left[\frac{\pi m}{N+1}n\right] \left\{ -2 + 2 \cos\left[\frac{\pi m}{N+1}\right] \right\}, \\ &\rightarrow \ddot{\alpha}_m(t) = - \underbrace{\left\{ \frac{4k}{M} \sin^2\left[\frac{\pi m}{2(N+1)}\right] \right\}}_{\equiv \omega_m^2} \alpha_m(t). \end{aligned} \quad (245)$$

つまり、

$$\alpha_m(t) = a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t),$$

となる．一般解は m について線形結合をとれば良いので，

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^N \left[a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t) \right] \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right). \quad (246)$$

上記と同様に， $t = 0$ で $\dot{x}_n^{(m)} = 0$ の初期条件のときは $b_m = 0$ なので， a_m の項のみを残して，

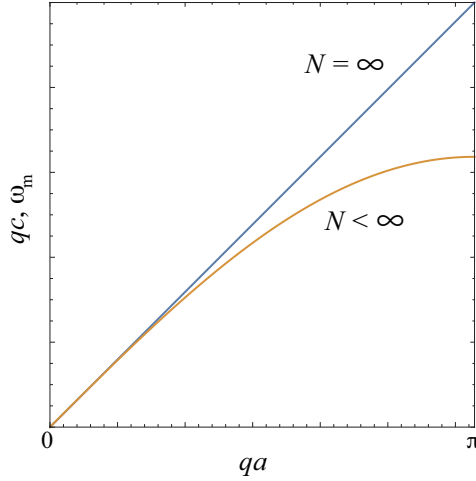


図 25 $N = \infty$ と $N < \infty$ の場合の分散関係． $N < \infty$ の場合は大きい波数の領域で系が有限個のバネでできている事が効いてくる．

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^N a_m \cos(\omega_m t) \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right), \quad \omega_m = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left[\frac{\pi m}{2(N+1)}\right], \quad (247)$$

である．角振動数 ω_m と波数 $q = \frac{\pi m}{(N+1)a}$ の関係を分散関係とよぶことがある．波数は波長の逆数である．10.1 節の $N \rightarrow \infty$ の連成振動では分散関係は式 (237) より， $\omega = qc$ であることがわかる． $N < \infty$ の場合 [式 (247)] と比較したものを図 25 に示しておく．波数 q が小さい領域では両者は一致することがわかる．

式 (247) のフーリエ係数 a_m は，

$$x_n(0) = \sum_{m=1}^N a_m \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right), \quad (248)$$

が成立するように決めなければいけない．

$$I_m \equiv \sum_{n=0}^N \exp\left[\frac{i\pi m}{N+1}n\right] = \begin{cases} N+1, & (m=0), \\ \frac{1 - e^{i\pi m}}{1 - \exp\left[\frac{i\pi m}{N+1}\right]}, & (m \neq 0) \end{cases} = \begin{cases} 0, & (m=2j > 0), \\ \frac{2}{1 - \exp\left[\frac{i\pi m}{N+1}\right]}, & (m=2j-1 > 0), \end{cases}$$

となることを用いると，

$$\sum_{n=0}^N \cos\left[\frac{\pi m}{N+1}n\right] = \frac{I_m + I_{-m}}{2} = \begin{cases} N+1, & (m=0), \\ 0, & (m=2j \neq 0), \\ 1, & (m=2j-1 \neq 0), \end{cases} \quad (249)$$

が成立するので、 $m, m' > 0$ として

$$\frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N \sin \left[\frac{\pi m n}{N+1} \right] \sin \left[\frac{\pi m' n}{N+1} \right] = \frac{1}{(N+1)} \sum_{n=0}^N \left\{ \cos \left[\frac{\pi(m-m')}{N+1} n \right] - \cos \left[\frac{\pi(m+m')}{N+1} n \right] \right\} = \delta_{mm'},$$

という関係が成り立つ。式 (248) に適用すると、

$$\frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N x_n(0) \sin \left(\frac{\pi m' n}{N+1} \right) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^N a_m \sin \left(\frac{\pi m n}{N+1} \right) \sin \left(\frac{\pi m' n}{N+1} \right) = a_{m'},$$

のように $a_{m'}$ が得られ、

$$x_n(0) = \sum_{m=1}^N a_m \sin \left(\frac{\pi m n}{N+1} \right), \quad a_m = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N x_n(0) \sin \left(\frac{\pi m n}{N+1} \right), \quad (250)$$

と表される。以上から、時刻 t における固定端条件でかつ初速度が 0 の場合の N 個の質点の連成振動の解は、

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^N a_m \cos(\omega_m t) \sin \left(\frac{\pi m n}{N+1} \right), \quad \omega_m = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \sin \left[\frac{\pi m}{2(N+1)} \right], \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (251)$$

である。ここでも任意の初期条件が作れる証明は「離散フーリエ級数」の一般論を参照すること。

10.3 自由端

これまでは端の質点の変異が 0 の固定端条件を調べてきたが、ここではもう一つの代表的な境界条件である自由端条件における解を求める。

まずは波動方程式 (235) から出発しよう。自由端とは、仮想的に導入された端の質点の変位が、 $N \rightarrow \infty$ において $x_0 = x_1$, $x_{N+1} = x_N$ となるような条件である。連続極限をとった関数 $f(t, u)$ の言葉で表すと、

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} f(t, u) \right|_{u=0, l} = 0, \quad \text{自由端},$$

となる。波動方程式の変数分離の形の解 (238) の中で自由端の条件を満たすものは、

$$\frac{\partial}{\partial u} B_k(u) = -k D_{1k} \sin(ku) + k D_{2k} \cos(ku), \quad (252)$$

なので、

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} B_k(u) \right|_{u=0} = k D_{2k} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial u} B_k(u) \right|_{u=l} = -k D_{1k} \sin(kl) = 0 \longrightarrow k = \frac{m\pi}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (253)$$

である必要がある。固定端の場合と異なり、 $m = 0$ も意味のある解（一様な解）になることに注意すること。

以上から、 $C_{1k} D_{1k} = a_m$, $C_{2k} D_{1k} = b_m$ と書いて、一般解は、

$$f(t, u) = \sum_{m=0}^{N \sim \infty} \left\{ a_m \cos \left[\frac{m\pi c t}{l} \right] + b_m \sin \left[\frac{m\pi c t}{l} \right] \right\} \cos \left[\frac{m\pi u}{l} \right],$$

となる。初速度を 0 とすると、 $b_m = 0$ なので、

$$f(t, u) = \sum_{m=0}^{N \sim \infty} a_m \cos \left(\frac{m\pi c t}{l} \right) \cos \left(\frac{m\pi u}{l} \right).$$

初期条件より,

$$f(0, u) = \sum_{m=0}^{N \sim \infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi u}{l}\right),$$

が成立するように a_m を決める必要がある. これを, フーリエ余弦級数とよぶ. 式 (242) のときと同様に, 両辺に $\frac{2}{l} \cos\left(\frac{n\pi u}{l}\right)$ ($n \geq 0$) をかけて $u = 0$ から l まで積分すると,

$$\frac{2}{l} \int_0^l du f(0, u) \cos\left(\frac{n\pi u}{l}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{2}{l} \int_0^l du \cos\left(\frac{m\pi u}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi u}{l}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dw \cos(mw) \cos(nw).$$

最後の積分は,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dw \cos(mw) \cos(nw) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dw \left\{ \cos[(m-n)w] + \cos[(m+n)w] \right\} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n \geq 1) \\ 2 & (m = n = 0) \end{cases},$$

となるので,

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l du f(0, u), \quad a_m = \frac{2}{l} \int_0^l du f(0, u) \cos\left(\frac{m\pi u}{l}\right) \quad (m \geq 1), \quad (254)$$

のように係数 a_m が求まる. 式 (254) は $m = 0$ とそれ以外で積分の前にかかっている係数が異なっているので, それを揃えて以下のように $a_0 \rightarrow a_0/2$ と再定義するのが標準的である:

$$f(0, u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi u}{l}\right), \quad a_m = \frac{2}{l} \int_0^l du f(0, u) \cos\left(\frac{m\pi u}{l}\right), \quad (m \geq 0). \quad (255)$$

よって, 時刻 t の解は,

$$f(t, u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi ct}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi u}{l}\right), \quad (256)$$

となる.

次に, 有限の N の場合の自由端境界条件の解を調べてみよう (議論はほとんど固定端の場合と同じである). 式 (244) に対応する表式は,

$$x_n^{(m)}(t) = \alpha_m(t) \cos\left(\frac{m\pi}{l}u\right) = \alpha_m(t) \cos\left(\frac{m\pi}{(N+1)}n\right), \quad (257)$$

である. 運動方程式 (234) に代入すると,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n^{(m)}(t) &= \ddot{\alpha}_m(t) \cos\left[\frac{\pi m}{N+1}n\right] = \frac{k}{M} \alpha_m(t) \left\{ -2 \cos\left[\frac{\pi m}{N+1}n\right] + \cos\left[\frac{\pi m}{N+1}(n+1)\right] + \cos\left[\frac{\pi m}{N+1}(n-1)\right] \right\}, \\ &= \frac{k}{M} \alpha_m(t) \cos\left[\frac{\pi m}{N+1}n\right] \left\{ -2 + 2 \cos\left[\frac{\pi m}{N+1}\right] \right\}, \\ \ddot{\alpha}_m(t) &= - \underbrace{\left\{ \frac{4k}{M} \sin^2\left[\frac{\pi m}{2(N+1)}\right] \right\}}_{\equiv \omega_m^2} \alpha_m(t). \end{aligned} \quad (258)$$

これは, 固定端の場合の式 (245) と全く同じ表式である. よって,

$$\alpha_m(t) = a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t),$$

となる．一般解は m について線形結合をとれば良いので，

$$x_n(t) = \sum_{m=0}^N \left[a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t) \right] \cos\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right). \quad (259)$$

以前と同様に， $t=0$ で $\dot{x}_n^{(m)} = 0$ の初期条件のときは $b_m = 0$ なので， a_m の項のみを残して，

$$x_n(t) = \sum_{m=0}^N a_m \cos(\omega_m t) \cos\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right), \quad (260)$$

である．フーリエ係数 a_m は，

$$x_n(0) = \sum_{m=0}^N a_m \cos\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right), \quad (261)$$

が成立するように決めなければいけない．和の公式 (249) を用いると， $m, m' \geq 0$ として，

$$\begin{aligned} \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N \cos\left[\frac{\pi m n}{N+1}\right] \cos\left[\frac{\pi m' n}{N+1}\right] &= \frac{1}{(N+1)} \sum_{n=0}^N \left\{ \cos\left[\frac{\pi(m-m')n}{N+1}\right] + \cos\left[\frac{\pi(m+m')n}{N+1}\right] \right\}, \\ &= \begin{cases} 0 & (m \neq m') \\ 1 & (m = m' \geq 1) \\ 2 & (m = m' = 0) \end{cases}, \end{aligned} \quad (262)$$

が成立する．よって，式 (261) の両辺に $\cos\left(\frac{\pi m' n}{N+1}\right)$ をかけて n で和をとると，

$$\begin{aligned} \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N x_n(0) \cos\left(\frac{\pi m' n}{N+1}\right) &= \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N a_m \cos\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right) \cos\left(\frac{\pi m' n}{N+1}\right), \\ &= \sum_{m=0}^N a_m \delta_{mm'} (1 + \delta_{m'0}) = \begin{cases} a_{m'} & (m' \geq 1) \\ 2a_0 & (m' = 0) \end{cases}, \end{aligned} \quad (263)$$

のように $a_{m'}$ が得られる． $N \rightarrow \infty$ のときに式 (255) で a_0 を再定義したように，ここでも $a_0 \rightarrow a_0/2$ とすると都合がよく，

$$x_n(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^N a_m \cos\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right), \quad a_m = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N x_n(0) \cos\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right) \quad (m \geq 0). \quad (264)$$

よって，時刻 t の解は，

$$x_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^N a_m \cos(\omega_m t) \cos\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right), \quad (265)$$

となる．

11 フーリエ級数・フーリエ変換

11.1 フーリエ級数

10 節で見たように、固定端、自由端境界条件における初期状態 $t = 0$ での変位は $m = 0, 1, 2, \dots$ の $\sin(m\pi u/l)$, $\cos(m\pi u/l)$ の線型結合で表される。以下、この節では位置座標を u ではなく x で表すこととする。また、 $N \rightarrow \infty$ の連続極限の場合のみを扱うこととするので、有限の N についての議論は参考書等を調べてほしい。 $t = 0$ における位置座標 x における質点の変位を単に $f(x)$, $g(x)$ と書くことにすると、10 節の結果は以下のように書ける：

$$\text{固定端： } f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right), \quad b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx, \quad (266)$$

$$\text{自由端： } g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right), \quad a_m = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx. \quad (267)$$

ここで、 x の変域を $[-l, l]$ に拡張することを考えよう。 $\sin(m\pi x/l)$, $\cos(m\pi x/l)$ は x についてそれぞれ奇関数、偶関数なので、 $f(x)$ を奇関数、 $g(x)$ を偶関数として、 a_m , b_m を求める表式は、

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx, \quad a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx, \quad (268)$$

と書き直すことができる。つまり、 x が $[-l, l]$ の範囲で考えると、固定端の場合は奇関数を、自由端の場合は偶関数を三角関数の線型結合で表していたと解釈することができる。図 26 のように、一般の関数は偶関数と奇関数の和で書けるので、このことは、関数 $\phi(x)$ が a_m , b_m を用いて、

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right), \quad (269)$$

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx, \quad b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx, \quad (270)$$

と表されることを示唆する。これをフーリエ級数とよんでいる。 $\phi(x)$ を式 (269) で表すことを、 $\phi(x)$ をフーリエ級数で展開する、と言う。フーリエ級数の計算の際に有用な積分公式を付録付録 B にあげておいた。

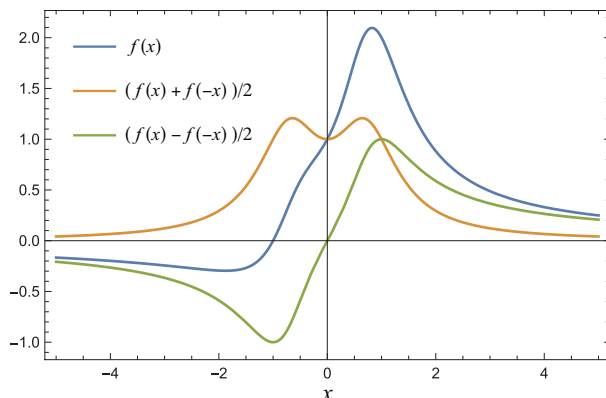


図 26 任意の関数 $f(x)$ の偶関数部分と奇関数部分への分離。

$\phi(x)$ の素性については少し注意が必要である (任意というわけではない). 三角関数の性質上, $x = -l$ と $x = l$ では $\phi(l) = \phi(-l)$ となっていなければならない. また, $\phi(x)$ は有界である必要がある ($a_n \rightarrow \infty$ になると困る). 証明は省略するが, $\phi(x)$ に有限個の “飛び” があってもフーリエ級数展開 (269) は, その点を,

$$\phi(x) \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \epsilon) + \phi(x - \epsilon)}{2},$$

として再現する. 特に, $x = l$ と $-l$ はフーリエ級数で表すときには同一の点とみなされることに注意すること. 数学の教科書等では, 表記の簡単化のために $l = \pi$ としたものが記載されていることが多い:

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx), \quad (271)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \cos(mx) dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin(mx) dx. \quad (272)$$

♠ 例 27: $\phi(x) = x^2$ ($-\pi < x < \pi$) 図 27 参照:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

$n_{\max}$ を大きくとると x^2 とフーリエ級数展開が区別できないほど一致する. 導出は部分積分すればよい.

♠ 例 28: $\phi(x) = x$ ($-\pi < x < \pi$) 図 28 参照:

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

導出は上記の例と同じく部分積分すればよい. フーリエ級数の表示では, $\phi(\pi) = \phi(-\pi)$ にもかかわらず $\phi(x) = x$ という関数は $\phi(\pi) = -\phi(-\pi)$ である. 上述したように $x = \pi$ と $-\pi$ は同一点とみなされるので,

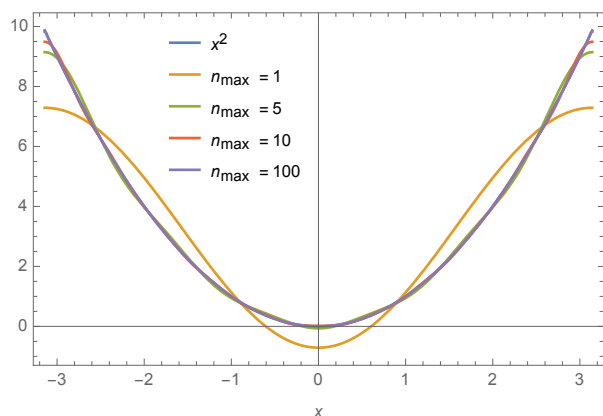


図 27 x^2 のフーリエ級数展開. $n_{\max}$ は和の上限.

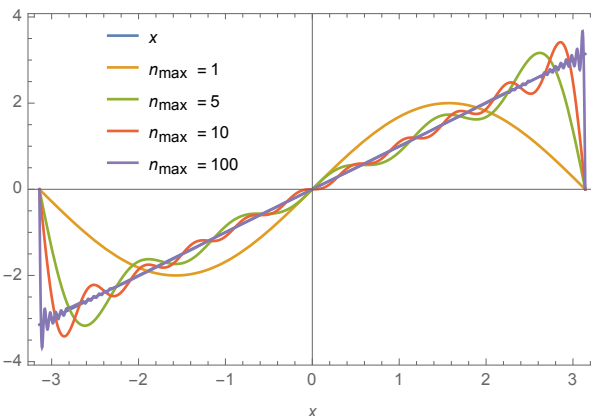


図 28 x のフーリエ級数展開. $n_{\max}$ は和の上限.

$\phi(x)$ に飛びがあることになる．よって，フーリエ級数展開では $x = \pm\pi$ での値が $\frac{1}{2}[\phi(\pi) + \phi(-\pi)] = 0$ になっている．実はこのために振動が $n_{\max}$ を大きくとっても取り除けないことが知られている（ギブスの振動）．

♠ 例 29 : $N \rightarrow \infty$ の連成振動の力学的エネルギー *

10.1 節で議論した固定端条件での連成振動の力学的エネルギーを考察してみよう．質点の運動エネルギーとバネのエネルギーを加えると，式 (243) や式 (235) を用いて，

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_{n=0}^{N \rightarrow \infty} \left[\frac{M}{2} \dot{x}_n^2 + \frac{k}{2} (x_n - x_{n+1})^2 \right] \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{M}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t, u) \right]^2 + \frac{ka^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} f(t, u) \right]^2 \right\}_{x=na}, \\
 &\rightarrow \int_0^l du \left\{ \frac{M}{2a} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t, u) \right]^2 + \frac{ka}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} f(t, u) \right]^2 \right\} = \frac{ka}{2} \int_0^l du \left\{ \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t, u) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial u} f(t, u) \right]^2 \right\}, \\
 &= \frac{ka}{2} \int_0^l du \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\frac{m\pi}{l} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{l} ct \right) \sin \left(\frac{m\pi}{l} u \right) \right]^2 + \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\frac{m\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{m\pi}{l} ct \right) \cos \left(\frac{m\pi}{l} u \right) \right]^2 \right\}, \\
 &= \frac{ka}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} a_m a_{m'} \left(\frac{m\pi}{l} \right) \left(\frac{m'\pi}{l} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{l} ct \right) \sin \left(\frac{m'\pi}{l} ct \right) \int_0^l du \sin \left(\frac{m\pi}{l} u \right) \sin \left(\frac{m'\pi}{l} u \right) \\
 &\quad + \frac{ka}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} a_m a_{m'} \left(\frac{m\pi}{l} \right) \left(\frac{m'\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{m\pi}{l} ct \right) \cos \left(\frac{m'\pi}{l} ct \right) \int_0^l du \cos \left(\frac{m\pi}{l} u \right) \cos \left(\frac{m'\pi}{l} u \right), \quad (273)
 \end{aligned}$$

となることがわかる．積分は $m = m'$ の時しか残らないことはすぐに確認できるので，和の中で $m = m'$ だけ残すと，

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{ka}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \sin^2 \left(\frac{m\pi}{l} ct \right) \int_0^l du \frac{1 - \cos \left(\frac{2m\pi}{l} u \right)}{2} + \cos^2 \left(\frac{m\pi}{l} ct \right) \int_0^l du \frac{1 + \cos \left(\frac{2m\pi}{l} u \right)}{2} \right\}, \\
 &= \frac{k a l}{4} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 = \frac{M}{4} \left(\frac{l}{a} \right) \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \left[c \left(\frac{m\pi}{l} \right) \right]^2, \quad (274)
 \end{aligned}$$

となる．最後は式 (235) を用いた．つまり，力学的エネルギーは m 番目の固有モード $q = \frac{m\pi}{l}$ の固有振動数 cq の二乗をその振幅 a_m の二乗で重み付けした和で表される．

11.2 フーリエ変換

オイラーの公式を用いると，フーリエ級数展開 (269) と (270) は，

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i} \right], \\
 &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{c_n} e^{in\pi x/l} + \underbrace{\frac{a_n + ib_n}{2}}_{c_{-n}} e^{-in\pi x/l} \right] \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left(i \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (275)
 \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx \phi(x) \left[\cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) - i \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right] = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi(x) \exp \left(-i \frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad (276)$$

と単純な表式（複素フーリエ級数）で表すことができる．式 (276) は $n = 0$ の時も成立する．

ここで, $l \rightarrow \infty$ の極限をとると, $\frac{n\pi}{l}$ は,

$$k \equiv \frac{n\pi}{l} = n\Delta k, \quad \Delta k \equiv \frac{\pi}{l} \leftarrow \text{隣り合う } k \text{ の間隔}, \quad (277)$$

のように連続変数となり, その変域は $[-\infty, \infty]$ である. 式 (275) と式 (276) は,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \underbrace{\left(\sqrt{2\pi} \frac{c_n}{\Delta k} \right)}_{\equiv c(k)} e^{ikx} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk c(k) e^{ikx}, \quad (278)$$

$$c(k) = \sqrt{2\pi} \frac{c_n}{\Delta k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) e^{-ikx}, \quad (279)$$

のように表すことができる. 式 (278) をフーリエ逆変換, 式 (279) をフーリエ変換とよぶ. $1/\sqrt{2\pi}$ の因子は $c(k)$ と $\phi(x)$ が対称になるようにくくりだしている. 教科書によっては式 (278) に $1/\sqrt{2\pi}$ の因子がなく, 式 (279) に $1/(2\pi)$ の因子がついていたりする. 具体的にフーリエ変換を用いた計算は 12 節と 13 節で紹介する.

x の次元 $[x]$ を長さとする, k の次元 $[k]$ は $1/\text{長さ}$ であり, すなわち波数である. また, x の次元 $[x]$ を時間とすると, k の次元 $[k]$ は $1/\text{時間}$ であるので, 振動数 (角振動数) になる場合もある. 例えば, 光の強度 I などある程度長い間観測したとすると, $I = \phi(t)$ のように時間の関数としてデータが得られる. これをフーリエ変換すると, 角振動数 ω の関数として $c(\omega)$ が得られる. この $c(\omega)$ を調べると非常に有用である. 物質から発せられている光は物質の特徴的な状態間の遷移に起因している. 詳細は量子力学によって説明されるが, それらの特徴的な状態のエネルギー差に対応する角振動数 ω に大きな強度 (つまり $c(\omega)$ が大きい) が検出される.

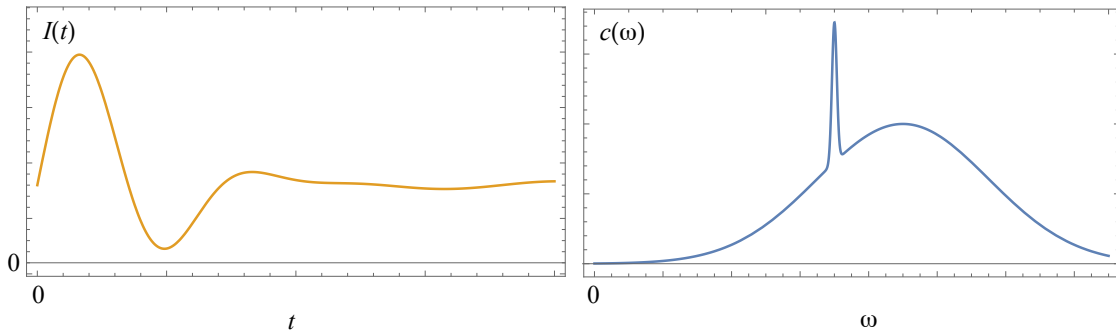


図 29 時間の関数 $I(t)$ とそのフーリエ変換 $c(\omega)$ (の虚部) の例. $I(t)$ が t について奇関数としてフーリエ変換したものを $c(\omega)$ として描いている. この場合 $c(\omega)$ は ω について奇関数になる. 右図の鋭いピーク位置の ω が特徴的な遷移のエネルギーに対応する.

12 波動方程式

12.1 弦の振動

波動方程式 (235) は $N \rightarrow \infty$ における連成振動の運動方程式として 10 節で現れた．ここでは，弦の振動を記述する方程式として波動方程式を導出する．

静止しているときの弦の位置を x 軸として，図 30 のように時刻 t ，一次元方向の位置座標 x における振動する弦の変位を $u(t, x)$ と表す．微少区間 $[x, x + \Delta x]$ を考え，図に示したように x 軸方向と点 $x, x + \Delta x$ における弦の接線のなす角度を θ', θ と書く．微小区間の両端には張力 T' と T が図の方向にはたらいており，重力は無視する．弦の振動の振幅は小さいものとする，この微小区間の質量は線密度 λ を用いて $\lambda \Delta x$ と表される．

x 方向のつり合いより，

$$T' \cos \theta' = T \cos \theta. \quad (280)$$

振動方向の運動方程式は，

$$(\lambda \Delta x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = T \sin \theta - T' \sin \theta', \quad (281)$$

となる． $\Delta x \ll 1$ のとき， $\theta, \theta' \ll 1$ であるので，

$$T' \simeq T, \quad \lambda \Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) \simeq T(\theta - \theta'), \quad (282)$$

と近似できる．ここから， $\theta - \theta' \simeq \Delta x$ であることがわかる．また，

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = \tan \theta' \simeq \theta', \quad \frac{\partial}{\partial x} u(t, x + \Delta x) = \tan \theta \simeq \theta, \quad (283)$$

と書けるので，

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) \simeq T \left(\frac{\partial}{\partial x} u(t, x + \Delta x) - \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\lambda}{T} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u(t, x) = 0, \quad (284)$$

が得られる．これは波の速さ $c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$ の一次元の波動方程式 (235) である．

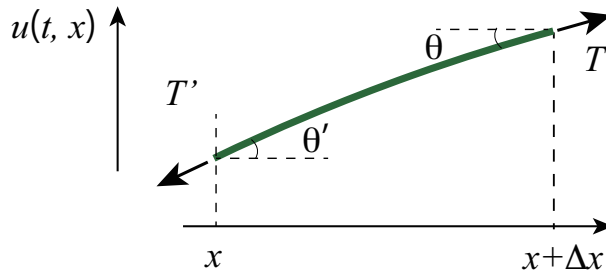


図 30 弦の振動

12.2 波のエネルギー

波の運動エネルギーを考えてみよう．微小区間 Δx の弦の変位が持つ運動エネルギー $\Delta K(t, x)$ は,

$$\Delta K(t, x) = \frac{\lambda \Delta x}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right]^2, \quad (285)$$

なので, 積分すると全運動エネルギー K は,

$$K(t) = \frac{\lambda}{2} \int dx \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right]^2, \quad (286)$$

と書ける．時間で偏微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K(t) &= \lambda \int dx \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right], \\ &= T \int dx \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right], \quad (\text{波動方程式を用いた}), \\ &= T \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right] \right\}_{x=\text{端}} - T \int dx \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right], \quad (\text{部分積分}), \\ &= -\frac{T}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int dx \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right]^2 \equiv -\frac{\partial}{\partial t} V(t), \quad (\text{端の寄与は0とする: 自由端, 固定端など}), \end{aligned} \quad (287)$$

という関係式が得られる．つまり,

$$\frac{\partial}{\partial t} [K(t) + V(t)] = 0 \rightarrow K(t) + V(t) = \int dx \frac{T}{2} \left\{ \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right]^2 \right\} = E = \text{一定}, \quad (288)$$

という力学的エネルギーの保存則を導くことができる． $V(t)$ は張力による位置エネルギーに対応する． x 微分になっているのは, 局所的な弦の微小要素の変位が隣の微小要素の変位と同じであれば「伸びてない」ことから直感的にも理解できる．9.1 節の最後の議論や, 11.1 節の最後の例も参考にするといよい．端の寄与は境界条件で 0 としたが, 一般の境界条件の場合でも上記の結果に比べて相対的に l^{-1} の因子に比例した寄与しかない．ここで l は弦の長さである．よって, 弦が十分に長ければ端の寄与は無視できることになる．

12.3 一次元波動方程式の解

一次元の波動方程式 (235) は以下のように書き直すことができる:

$$0 = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \phi(t, x) = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi(t, x) = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi(t, x).$$

よって, 解 $\phi(t, x)$ は,

$$\phi(t, x) = f(x \pm ct), \quad (289)$$

であればどのようなものでも構わない．関数 $f(x + ct)$ は負の x 方向に進む波 (進行波), 関数 $f(x - ct)$ は正の x 方向に進行波を表している．

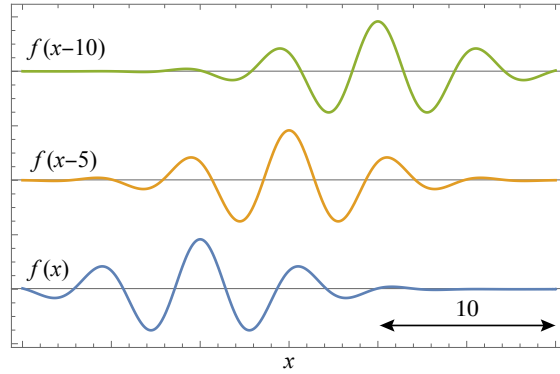


図 31 波（波束）の時間変化. $c = 1$ として 3 つの時間での波を描いている.

以下で、解 (289) をフーリエ変換を用いて導出してみよう. x と t それぞれについてフーリエ逆変換を用いる. まずは t を定数だと思って、 x についてフーリエ逆変換を考えると、

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} a(t, k), \quad (290)$$

である. 次に、 $a(t, k)$ について、 k を定数だと思って t についてのフーリエ逆変換を考える. 通常、時間に関するフーリエ変換は指数関数の指数の符号を座標に関する物と逆に定義するので、

$$a(t, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} c(\omega, k), \quad (291)$$

となる. よって、二つをまとめると、

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx - i\omega t} c(\omega, k), \quad (292)$$

のようにフーリエ逆変換を定義できる. これに対応して、フーリエ係数 $c(\omega, k)$ は、

$$c(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx + i\omega t} \phi(t, x), \quad (293)$$

である. 式 (292) を波動方程式に代入すると、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right] e^{ikx - i\omega t} c(\omega, k) = 0. \quad (294)$$

よって、これが恒等的に成立するためには、 $\omega = \pm kc$ である必要がある. よって、それぞれについて、

$$c(\omega, k) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} c_{\pm}(k) & (\omega = \pm kc) \\ 0 & (\omega \neq \pm kc) \end{cases}, \quad (295)$$

を定義する. これを式 (292) に代入すると、 $\omega = \pm kc$ のみ残るので^{*4}、最終的に、

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[e^{ik(x+ct)} c_{+}(k) + e^{ik(x-ct)} c_{-}(k) \right], \quad (296)$$

^{*4}実はフーリエ変換の ω の積分は必要なかったということになる. ちゃんとやるとすると $c(\omega, k) = \sqrt{2\pi} c_{\pm}(k) \delta(\omega \pm kc)$ のようにデルタ関数を用いるべきだが、この講義ではデルタ関数は使用しないことにする. デルタ関数については物理数学 II で.

となる．よって，確かに $f(x \pm ct)$ の形のフーリエ逆変換になっている． $c_{\pm}(k)$ については任意のものでも波動方程式を満たしているのだから， $f(x \pm ct)$ の関数型についてはどのようなものでも良いことが導かれる．すなわち，式 (296) は，任意の「波」を平面波 $e^{ik(x \pm ct)}$ の重ね合わせで表した形となっていることがわかる．

♠ 例 30：全エネルギーのフーリエ表示 *

全エネルギー (288) をフーリエ変換を用いて評価してみよう． $\phi(t, x) = \phi(x - ct)$ と仮定して

$$E = \int dx \frac{T}{2} \left\{ \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi(x - ct) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi(x - ct) \right]^2 \right\} = T \int dx \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi(x - ct) \right]^2 \quad (297)$$

と表せるので，2 つの $\partial\phi/\partial x$ を必ず k, p と別の文字でフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} E &= T \int dx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ik(x-ct)} c_{-}(k) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{ip(x-ct)} c_{-}(p) \right] \\ &= T \frac{i^2}{2\pi} \int dx \left[\int dk k e^{ik(x-ct)} c_{-}(k) \right] \left[\int dp p e^{ip(x-ct)} c_{-}(p) \right] \\ &= -T \int dk k e^{-ikct} c_{-}(k) \int dp p e^{-ipct} c_{-}(p) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dx e^{i(k+p)x}}_{\delta(k+p)} dx. \end{aligned} \quad (298)$$

最後の $\delta(k+p)$ はデルタ関数で，詳しくは物理数学 II で学習する．デルタ関数 $\delta(k - k_0)$ は $k = k_0$ でのみ値をもち， $k = k_0$ を含む領域での積分，例えば $\int_{-\infty}^{\infty} dk \delta(k - k_0) = 1$ ， $\int_{-\infty}^{\infty} dk f(k) \delta(k - k_0) = f(k_0)$ という性質をもつ．この性質を用いて p 積分を実行すると，

$$E = T \int dk k^2 c_{-}(k) c_{-}(-k) = \lambda \int dk (kc)^2 |c_{-}(k)|^2, \quad (299)$$

となる．最後に ϕ が実数の場合フーリエ係数は $c_{-}(k) = [c_{-}(-k)]^*$ の関係にあることを用いた．

12.4 定在波

フーリエモードの波数 k と $-k$ の進行波（平面波）を同じ重み，同じ位相で足しあわせることを考えよう：

$$\phi(t, x) = e^{i\phi} e^{i(kx + kct)} + e^{i\phi} e^{i(-kx + kct)} = 2e^{i(kct + \phi)} \cos(kx). \quad (300)$$

実部と虚部はそれぞれ波動方程式の解になっており，

$$\operatorname{Re} \phi(t, x) = 2 \cos(kct + \phi) \cos(kx), \quad \operatorname{Im} \phi(t, x) = 2 \sin(kct + \phi) \cos(kx), \quad (301)$$

と書き表される．どの位置でも波の時間依存性が $\cos(kct + \phi)$ か $\sin(kct + \phi)$ なので，これらの波は進んでいるようには見えない．このような波を定在波とよぶ． $\cos(kx) = 0$ である位置では，時刻 t によらず常に波の変位が 0 になっている（これを節とよぶ）．一方， $\cos(kx) = \pm 1$ の位置は振幅が最大となる点であり腹とよぶ．位相を π ずらして足しあわせると，

$$\phi(t, x) = e^{i\phi} e^{ik(x+ct)} + e^{i\phi + i\pi} e^{-ik(x-ct)} = 2ie^{i(kct + \phi)} \sin(kx). \quad (302)$$

この場合は，

$$\operatorname{Re} \phi(t, x) = -2 \sin(kct + \phi) \sin(kx), \quad \operatorname{Im} \phi(t, x) = 2 \cos(kct + \phi) \sin(kx), \quad (303)$$

となる．定在波の腹と節は $\sin(kx)$ の値によって決まる．

12.5 波束

x 軸の正の方向に進む波の解として、式 (296) の $c_-(k)$ が、

$$c_-(k) = \begin{cases} 1 & k_{\min} \leq k \leq k_{\max} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}, \quad (304)$$

である場合を考えよう。^{*5} このとき、式 (296) により $\phi(t, x)$ を計算すると、 $z = x - ct$ として、

$$\phi(t, x) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk e^{ikz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik_{\max}z} - e^{ik_{\min}z}}{iz}, \quad (305)$$

である。実部をとると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin[k_{\max}z] - \sin[k_{\min}z]}{z} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{z} \sin \left[\frac{k_{\max} - k_{\min}}{2} z \right] \cos \left[\frac{k_{\max} + k_{\min}}{2} z \right], \\ &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\Delta k z)}{z} \cos(\bar{k} z), \end{aligned} \quad (306)$$

となる。 $t = 0$ として $\operatorname{Re} \phi(x)$ を図 32 に示しておく。このように、有限の範囲のフーリエモードを足した波は空間的に局在したものになる。これを波束とよぶ。この波の場合、波束の形は $\frac{\sin(\Delta k z)}{z}$ で表され、細かい振動部分は平均波数 $\bar{k}$ による振動で表現される。ただし、 $\bar{k} \gg \Delta k$ とする。この振る舞いは 9.2 節でみた、うなりとよく似ている。この波束は、図 31 のように、時間経過とともに速さ c で平行移動していくことになる。

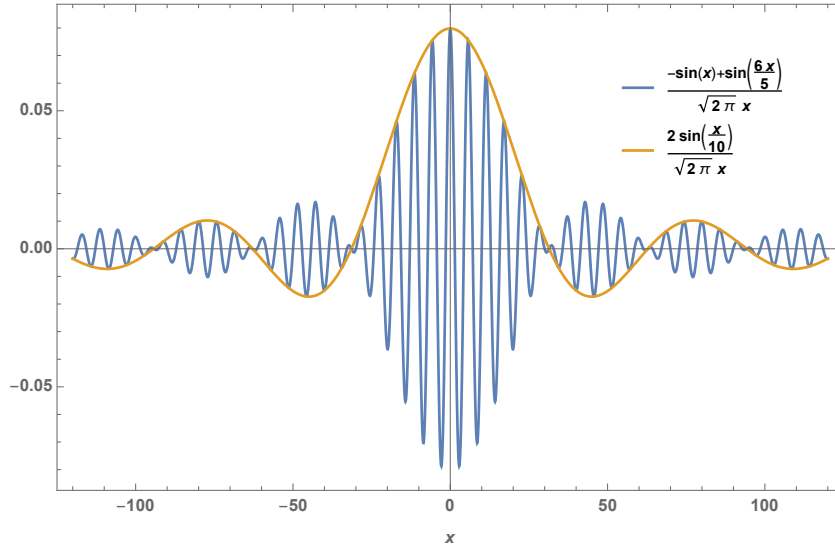


図 32 波束。波束の振幅は $\frac{\sin(\Delta k x)}{x}$ で記述され、細かい振動部分が $\cos(\bar{k} x)$ で表される。適当な長さの単位を用いて、 $k_{\min} = 1$, $k_{\max} = 1.2$ としている。

同じような波束を、今度は離散的なバネの変位 $u(t, na)$ として、十分に広いが有限の区間 $[0, l] = [0, (N+1)a]$ に閉じ込められている場合にどうなるかを調べてみよう。簡単のため、自由端の場合を考えると、変位

^{*5}必ずしも同じ重み（ここでは全て 1）である必要はない。

$u(t, x = na)$ は式 (265) で与えられ,

$$u(t, x = na) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^N a_m \cos(\omega_m t) \cos\left(\frac{\pi m}{(N+1)a} na\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^N a_m \cos(\omega_m t) \cos\left(\frac{\pi m}{l} x\right), \quad (307)$$

である. ただし, 角振動数 ω_m は式 (251) にあるように,

$$\omega_m = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left[\frac{\pi m}{2(N+1)}\right] = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(\frac{\pi m}{2l} a\right), \quad (308)$$

で与えられる. 離散的な波数 $q \equiv \frac{\pi m}{l}$ を導入すれば,

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=\pi/l}^{N\pi/l} a_q \cos(\omega_q t) \cos(qx), \quad \omega_q = 2\omega_0 \sin\left(\frac{qa}{2}\right), \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad (309)$$

のように書ける. 上記と同様に a_q は, ある有限の領域 $q_{\min}, \dots, q_{\max}$ でだけ 1 であるとする, と

$$u(t, x) = \sum_{q=q_{\min}}^{q_{\max}} \cos(\omega_q t) \cos(qx) = \sum_{q=q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{\cos(qx + \omega_q t) + \cos(qx - \omega_q t)}{2} = \operatorname{Re} \sum_{q=q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{e^{i(qx + \omega_q t)} + e^{i(qx - \omega_q t)}}{2}, \quad (310)$$

である. ここで, $\Delta q \equiv (q_{\max} - q_{\min})/2 \ll \bar{q} \equiv (q_{\max} + q_{\min})/2$ として,

$$\omega_q \simeq \omega_{\bar{q}} + \left. \frac{\partial \omega_q}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}} (q - \bar{q}) + \dots \equiv \omega_{\bar{q}} + v_g (q - \bar{q}) + \dots, \quad (311)$$

と近似すると, $s = \pm 1$ として,

$$\sum_{q=q_{\min}}^{q_{\max}} e^{i(qx + s\omega_q t)} \simeq e^{is(\omega_{\bar{q}} - v_g \bar{q})t} \sum_{q=q_{\min}}^{q_{\max}} e^{iq(x + sv_g t)}, \quad (312)$$

となる. 和は,

$$\sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} e^{iAm} = \frac{e^{iAm_{\min}} - e^{iA(m_{\max}+1)}}{1 - e^{iA}} = e^{iA\bar{m}} \frac{\sin\left[A\left(\Delta m + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}, \quad \bar{m} \equiv \frac{m_{\max} + m_{\min}}{2}, \quad \Delta m \equiv \frac{m_{\max} - m_{\min}}{2},$$

と表せるので, $A = \frac{\pi}{l}(x + sv_g t)$ として,

$$u(t, x) = \operatorname{Re} \sum_{s=\pm 1} e^{is(\omega_{\bar{q}} - v_g \bar{q})t} e^{i\bar{q}(x + sv_g t)} \frac{\sin\left[(\Delta q + \frac{\pi}{2l})(x + sv_g t)\right]}{2 \sin\left(\frac{\pi(x + sv_g t)}{2l}\right)} = \sum_{s=\pm 1} \cos(\bar{q}x + s\omega_{\bar{q}}t) \frac{\sin\left[(\Delta q + \frac{\pi}{2l})(x + sv_g t)\right]}{2 \sin\left[\frac{\pi(x + sv_g t)}{2l}\right]}, \quad (313)$$

と変形される. 明らかに $s = 1(-1)$ は負の向き (正の向き) に進む波を表している. それぞれを $u_{\pm}(t, x)$ で表すことにして, 式 (313) の u_- と式 (306) を比較してみよう. 今, $\Delta q \gg \pi/l$ であり, 端は十分に遠いところにあるものとする, $\pi(x - v_g t)/l \ll 1$ であるので,

$$u_-(t, x) \simeq \frac{\sin[\Delta q(x - v_g t)]}{2\pi(x - v_g t)/l} \cos\left[\bar{q}\left(x - \frac{\omega_{\bar{q}}}{\bar{q}}t\right)\right] \leftrightarrow \text{式 (306)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin[\Delta k(x - ct)]}{(x - ct)} \cos\left[\bar{k}(x - ct)\right], \quad (314)$$

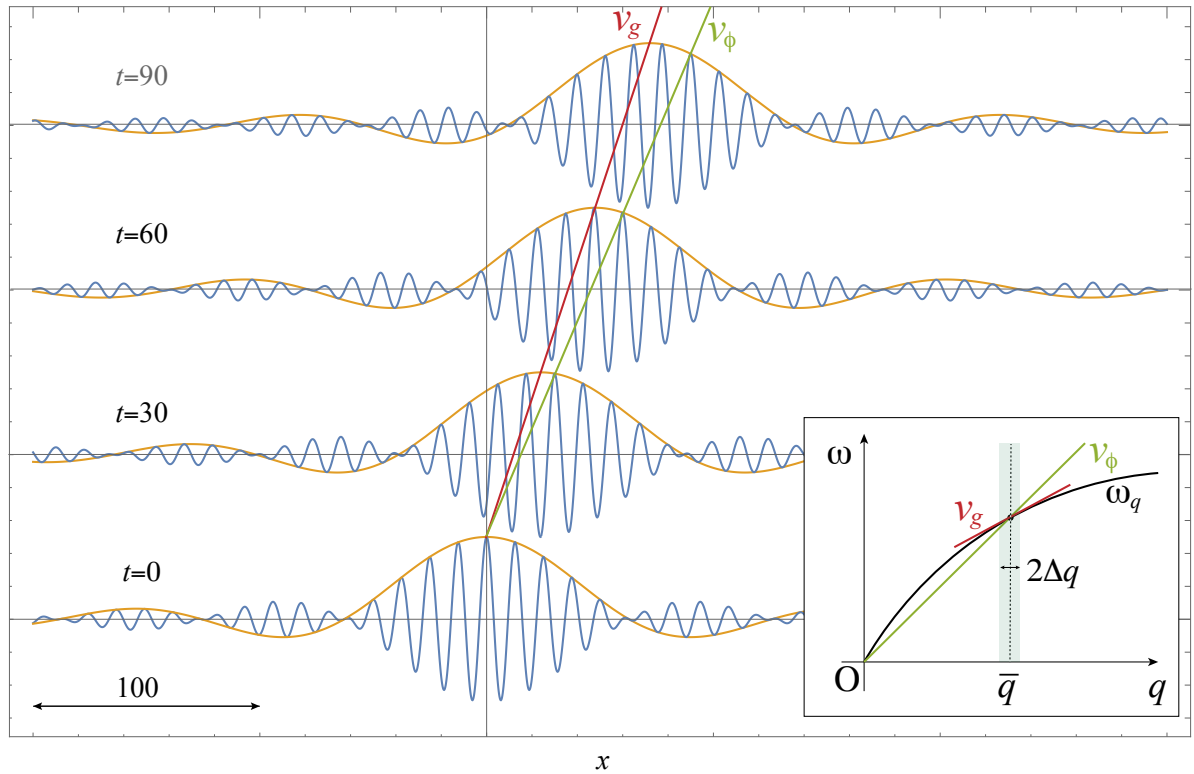


図 33 群速度と位相速度が異なる場合の波束の時間変化. 適当な単位で $q = 0.5$, $\Delta q = 0.05$, $v_g = 0.8$, $v_\phi = 1$ として $t = 0, 30, 60, 90$ の波束を等間隔に上にずらして描いている. 波束が全体として右に動く速さ (v_g) は波束の最も高い位置 (オレンジの曲線の最高点) の変化 (赤の直線) であるが, 位相速度 v_ϕ は細かい振動が右に進む速さであり, 緑の直線で表される. 挿入図: 分散関係と v_g , v_ϕ の関係.

のように似た形になる. ただし重要な相違点は, u_- においては, 全体としての波束の形は群速度 $v_g = \left. \frac{\partial \omega_q}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}}$ で伝わるのに対して, 細かい振動が伝わる速さは位相速度 $v_\phi \equiv \frac{\omega_{\bar{q}}}{\bar{q}}$ である. 連続極限の式 (306) では $v_g = v_\phi = c$ であるのでこの違いは存在しない. つまり, 波の分散関係—角振動数と波数の関係—が一定 $\omega = ck$ でないことが群速度と位相速度の違いにおいて本質的である.

12.6 波束の減衰

群速度と位相速度の違いは元を辿れば, 式 (309) のように, 各フーリエモードの振動数 ω_q が $q = m\pi/l$ に比例していないことに起因していた. 近似式 (311) が成立しない一般の場合の波束については, それぞれのフーリエモードは異なる速さで動いていく. よって, 初期状態 ($t = 0$) においてある程度局在していた波束は時間とともに, 広がっていくことになる. 波束として, フーリエ係数を全て同じ値にした式 (310) の和の中の x 軸の正の方向に進む成分の和を $u_-(t, x)$ と表すと,

$$u_-(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{q=q_{\min}}^{q_{\max}} \cos(qx + \omega_q t), \quad (315)$$

と書ける． $l = 500a$ ， $q_{\min} = \frac{\pi}{5a}$ ， $q_{\max} = \frac{2\pi}{5a}$ として， $\omega_0 t = 100 - 400$ までを図 34 に示した．時間とともに波束中心から測った波束の幅が広がっていることがわかる．また，よく目を凝らしてみると，波束中心より前方の振動は後方の振動に比べて波長が長いことがわかる．このことは， ω_q [式 (309)] の q が大きい（つまり波長が短い）フーリエモードの位相速度が q が小さい（波長が長い）ものの位相速度より遅いため，時間が経つと q が大きいモードは置いてきぼりをくらっているためである．

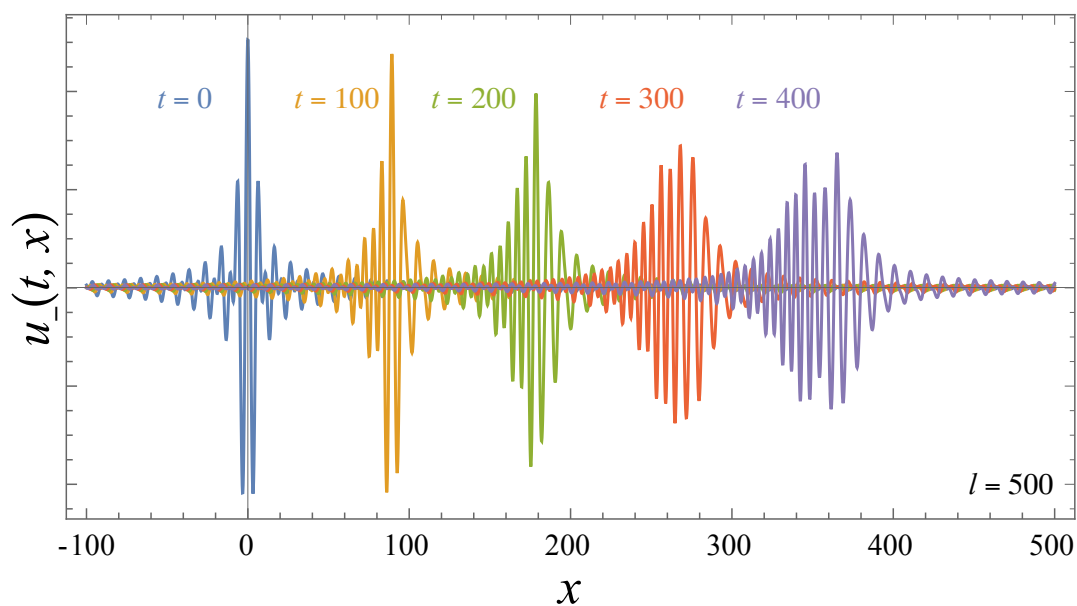


図 34 波束が減衰していく様子．バネの自然長 a を単位として $l = 500$ ， $1/\omega_0$ を単位として時刻 $t = 100, 200, 300, 400$ について波束 u_- [式 (315)] の x 依存性を示している．波束はフーリエ和を $q_{\min} = \frac{\pi}{5a}$ から $q_{\max} = \frac{2\pi}{5a}$ の間で同じ係数 $= 1$ としてとったもの．

13 一次元の波

13.1 固定端での反射

図のように、 $x > 0$ の壁に向かって $x < 0$ 側から変位が $f(x - ct) = \sqrt{a^2 - (x - ct)^2}$ で表される波束（パルス波）が進行している。（パルス波とは変位が有限の（狭い）領域のみ 0 でないような波のことである。）波が連成振動のときのように変位の方法と振動方法が同じ縦波の場合、壁 $x = 0$ では固定端（変位はいつでも 0）になる。この場合に、波が壁で反射される様子を考えよう。

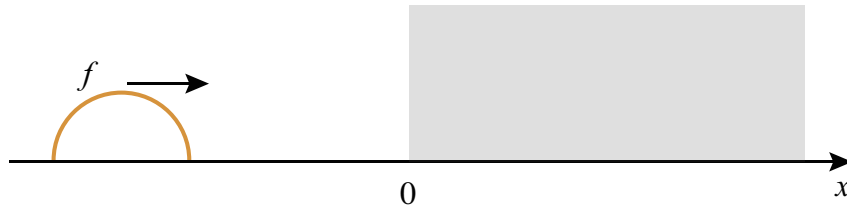


図 35 半円型の波束の反射．波束が連成振動のときのように変位の方法と振動方法が同じ縦波の場合は壁（ $x = 0$ ）では波の変位は 0 なので固定端条件になる．

まず、波動方程式： $[c^{-2}\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2]u(t, x) = 0$ の一般解を $u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$ として、 $u(t, 0) = 0$ となる条件を求めると、

$$u(t, 0) = f(-ct) + g(ct) = 0 \longrightarrow g(ct) = -f(-ct), \quad (316)$$

となる．この条件は任意の t について成り立たないといけなないので、変数を u として、 g の関数型そのものが、 $g(u) = -f(-u)$ である必要がある．よって、一般解 $u(t, x)$ は、

$$u(t, x) = f(x - ct) - f(-x - ct) = \sqrt{a^2 - (x - ct)^2} - \sqrt{a^2 - (x + ct)^2}. \quad (317)$$

ただし、ルートの中が負になる場合は 0 とする． g はパルス波が $x = 0$ に到達するまでは壁の中の $x > 0$ の部分を仮想的に $x < 0$ の側に進行している．逆に f は $x = 0$ に到達後は仮想的に壁の中を進行することになる． $u(t, x)$ は確かに波動方程式の解になっており、固定端境界条件を満たしているので、壁の内側の仮想的な波を無視して $x \leq 0$ のみを考えればこれが反射の振る舞いを表すことになる．この様子を図 36 に示しておく．破線は仮想的な部分であり、実際のパルス波は実線で表されている．二つの寄与がちょうど重なったときに変位は完全に消え、その後、変位の符号が逆になり（ π だけ位相がずれる）反射されることがわかる．

13.2 自由端での反射

次に壁が自由端の場合を考えてみよう．この場合は変位と進行方法が垂直の横波の反射と思えば良く、海の波が堤防にぶつかるようなものである． $x = l$ に自由端の壁があると思うと、変位に対する条件は、

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \Big|_{x=l} = \frac{\partial}{\partial x} f(x - ct) \Big|_{x=l} + \frac{\partial}{\partial x} g(x + ct) \Big|_{x=l},$$

となる．任意の t について成立しないといけなないので、 g の関数形は、

$$\frac{\partial}{\partial u} g(l + u) = \frac{\partial}{\partial u} f(l - u),$$

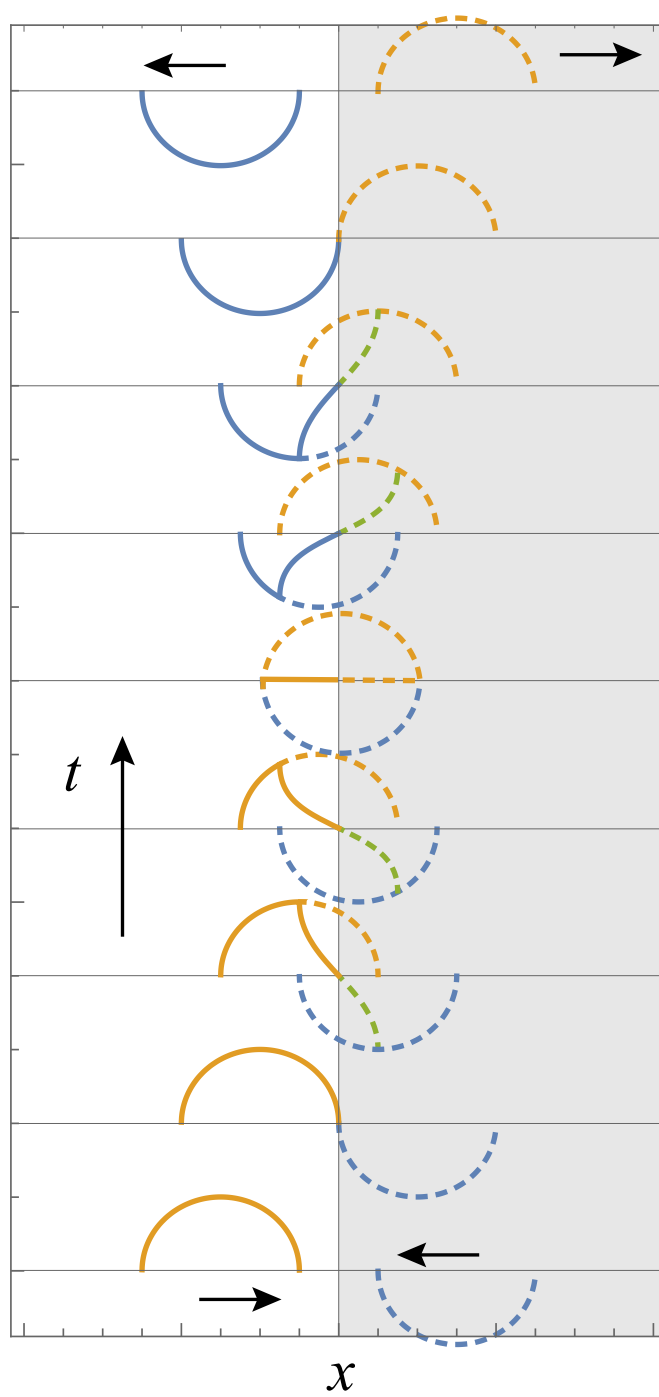


図 36 固定端の壁における半円型の波束の反射の時間経過の様子．壁の内側 ($x > 0$) を仮想的に負の向きに符号が逆向きの波束が進行していると考えれば、固定端条件を満たし、反射波の位相が π ずれることがわかる．

のように, g は f に対して, 壁を挟んで対称な形でなければいけないことになる. u で積分すると,

$$g(l+u) = f(l-u) + C, \quad C \text{ は定数}, \quad (318)$$

となる. 反射の前後での波束のエネルギー保存より $C = 0$ となる必要があるので*6, 固定端の場合と符号が逆になることに注意してほしい. 固定端の時と同様に波束の反射を考えても良いが, ここでは以下のように, フーリエ級数の表式 (256) を用いて, 議論しよう. 式 (310) の変形と同様に, 右向きに進む波束と左向きに進む波束に分解する:

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi ct}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left\{ \cos\left[\frac{m\pi(x+ct)}{l}\right] + \cos\left[\frac{m\pi(x-ct)}{l}\right] \right\}.$$

a_0 は一定であり今は重要ではないので,

$$u_{\pm}(t, x) \equiv \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left[\frac{m\pi(x \pm ct)}{l}\right], \quad (319)$$

を定義すると, $t = 0$ では図 37 (a) のように, 全体の波束 $u(0, x)$ は $u_+(0, x) + u_-(0, x)$ で表される ($u_+(0, x) = u_-(0, x)$ である). 時間が経過すると ($t > 0$), 二つの波束は反対向きに動いていくので, 右に進む $u_-(t, x)$ に注目しよう (オレンジ). 二つの波束が重ならないような時刻をスタートとして ($t = 30$), ちょうど $t = 50$ のときに壁に到達する ($c = 1$ としている). 図 37 (b) に, 壁に到達する前後の $u_-(t, x)$, $u(t, x)$ (ブルー), および, 壁内を仮想的に左向きに進んできた $u_+(t, x)$ (グリーン) が描かれている. フーリエ級数の性質上, 周期性から自動的に仮想的な波束が存在していることに注意してほしい. 壁で反射されると波は $u(t, x) = u_+(0, x) + u_-(0, x)$ (ブルー) で表される変位を示し, 反射されて左向き (グリーン) に進むことになる. 反射後も, 反対側で反射された波束と重なる以前の時刻位 ($t = 70$) までは考えることにすれば, 最初 $t = 30$ において右に進む波束が壁で反射される様子が理解できる.

13.3 媒質が異なる境界での透過と反射

この節では壁による反射ではなく, 二つの異なる媒質の境界での反射および透過を考えよう. 異なる媒質ではその媒質中を伝わる波の速さが異なることを考慮して, 波動方程式を解けば良い. 今, $x < 0$ は媒質 1 で占められており, そこでの波の速さを c_1 としよう. $x > 0$ では媒質 2 になっており, その波の速さを c_2 とする. 最初, 波 (波束) は $x = -\infty$ から媒質 1 内を原点に向かってその変位 $u_0(t, x) = u_0(x - c_1 t)$ で進行するものとする. 境界 ($x = 0$) で反射され $x = -\infty$ に戻っていく反射波を $v_1(t, x) = v_1(x + c_1 t)$, 媒質 2 の中を $x = \infty$ へ向かって進行する波の変位を $v_2(t, x) = v_2(x - c_2 t)$ とおく (透過波). ここで設定した関数形であれば, それぞれの領域の波動方程式を満たすことは式 (289) でみた通りである. 重要な問題は, $x = 0$ における境界条件である. そのうちの一つは, 変位が + 側と - 側で等しいことである:

$$u_0(t, 0) + v_1(t, 0) = v_2(t, 0) \longrightarrow u_0(-c_1 t) + v_1(c_1 t) = v_2(-c_2 t). \quad (320)$$

*6 $C \neq 0$ だと g の先端に不連続な部分が生じてしまうので, 位置エネルギー $\sim (\partial g / \partial x)^2$ に余計な寄与が現れてしまう. また, 反射波の変位がどの位置でも C だけ持ち上がってしまうので直感的にも $C = 0$ であることがわかる.

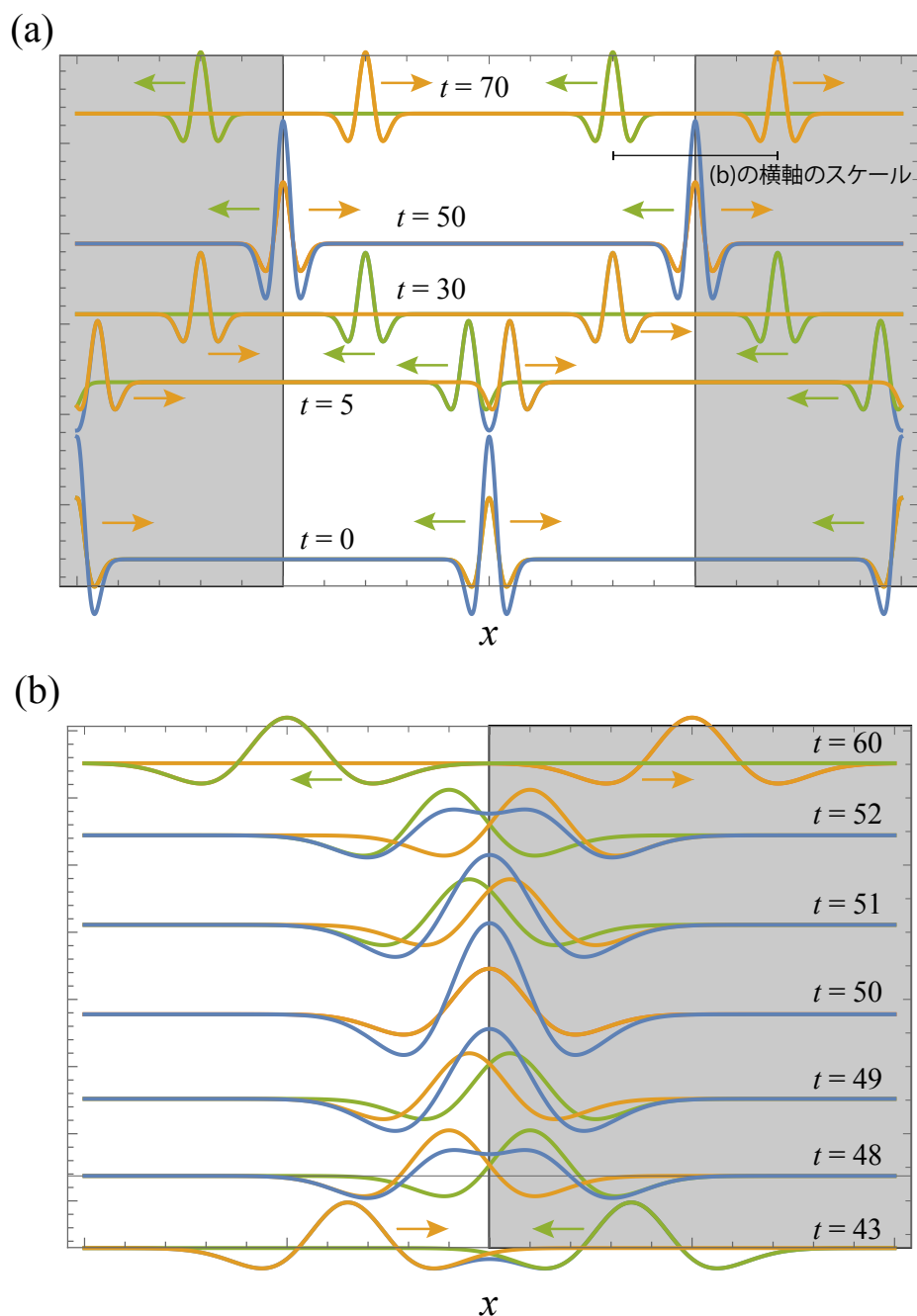


図 37 (a) フーリエ級数展開による波束の反射の様子. $c = 1, l = 50$ としている. 壁の内側はグレーで塗られている領域. (b) 反射の前後における u_- (進行波; オレンジ), u_+ (反射波; グリーン), および u (実際に観測される波束 = 進行波 + 反射波; ブルー). 常に壁において自由端条件が満たされている. 注意: $t = 43$ ではブルーの曲線は壁の近傍に少ししかみえないように描いている, また $t = 60$ においてはグリーンとブルーは壁より左側の図の範囲では同じ曲線である (ブルーは描いていない).

もう一つの条件として、 $x = 0$ における張力が等しいことから、変位の位置座標微分が + 側と - 側で等しいことである*7：

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} [u_0(t, x) + v_1(t, 0)] \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x} v_2(t, x) \right|_{x=0} \longrightarrow \left. \frac{\partial}{\partial x} [u_0(x - c_1 t) + v_1(x + c_1 t)] \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x} v_2(x - c_2 t) \right|_{x=0}, \quad (321)$$

この条件により、境界においても変位が滑らかにつながる。境界条件 (320) と (321) は任意の時刻 t について成立するので、

$$u_0(-c_1 t) + v_1(c_1 t) = v_2(-c_2 t), \quad \frac{1}{c_1} \frac{\partial}{\partial t} [-u_0(-c_1 t) + v_1(c_1 t)] = -\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} v_2(-c_2 t). \quad (322)$$

第二式を t で積分すると、 C を任意定数として、

$$\frac{1}{c_1} [-u_0(-c_1 t) + v_1(c_1 t)] = -\frac{1}{c_2} v_2(-c_2 t) + C, \quad (323)$$

を得る。 $t = 0$ では入射波は境界に到達しておらず、反射波も透過波も存在しない。よって $u_0(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$ なので、結局 $C = 0$ となる。まとめると、

$$u_0(-c_1 t) + v_1(c_1 t) = v_2(-c_2 t), \quad (324)$$

$$u_0(-c_1 t) - v_1(c_1 t) = \frac{c_1}{c_2} v_2(-c_2 t), \quad (325)$$

となるので、この連立方程式を解くと、

$$v_1(c_1 t) = -\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} u_0(-c_1 t), \quad v_2(-c_2 t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} u_0(-c_1 t). \quad (326)$$

よって、 $c_1 t$ を $x + c_1 t$ で、 $c_2 t$ を $x - c_2 t$ で置き換えることにより、

$$v_1(x + c_1 t) = -\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} u_0(-x - c_1 t), \quad v_2(x - c_2 t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} u_0\left(\frac{c_1}{c_2}(x - c_2 t)\right), \quad (327)$$

なる解を得ることができる。反射波 v_1 の係数は正にも負にもなることに注意したい。これは2つの媒質内の波の速さが $c_1 > c_2$ であれば反射波は固定端条件で反射されたように振る舞い（位相が π ずれる）、 $c_1 < c_2$ であれば自由端条件における反射になることを表している。*8 これに対して透過波の位相はどのような媒質であっても入射波のものから変化しない。高校物理で習う気持ちが悪い位相のズレはこの結果から来ているのである。

♠ 例 31：半径 a の半円形の波束の反射と透過

$u_0(x - c_1 t) = \sqrt{a^2 - (x - c_1 t)^2}$ の場合、 $v_{1,2}$ は、

$$v_1(x + c_1 t) = -\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{a^2 - (x + c_1 t)^2}, \quad v_2(x - c_2 t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 (x - c_2 t)^2}, \quad (328)$$

となる。 $c_2/c_1 = 0.5, 1.4$ の二つの場合について示したものが、図 38 である。 $c_1 > c_2$ のとき固定端反射、 $c_1 < c_2$ のとき自由端反射になっているのが確認できる。波束の振幅の変化と速さに注意してほしい。

*7ここは少しわかりにくいですが、式 (281) と式 (283) を思い出せば、弦の振動方向の張力の大きさは変位 $T \partial u(t, x) / \partial x$ であることがわかる。また、この境界条件はエネルギー流の保存からも導かれる [式 (338) を参照]

*8固定端反射といっても端での変位は0ではない。その意味で単に固定端反射と言ってしまうと不正確である。

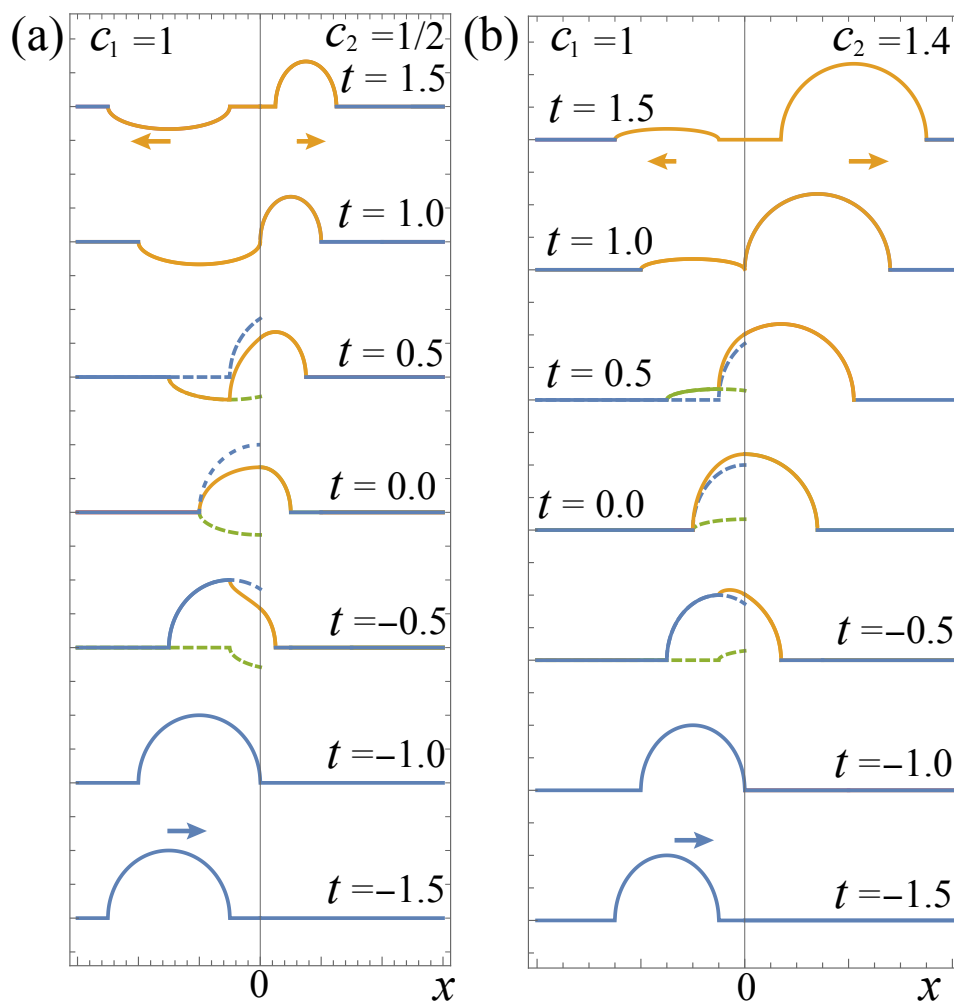


図 38 二つの媒質の境界 ($x = 0$) における反射と透過．実線が実際の波束の振幅を表している．(a) 固定端反射になる条件： $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, (b) 自由端反射になる条件： $c_1 = 1$, $c_2 = 1.4$. (b) の $t = \pm 1.0$ においては $x = 0$ で微分の値が $x > 0$ と $x < 0$ で異なるように見えるが，これは円形の波束の特殊性であるので気にしない...

13.4 エネルギーの流れ：連続の方程式*

12.2 節で議論したように，波のエネルギーは式 (288) で表される．式 (288) の被積分関数は位置 x におけるエネルギー密度であると解釈できるので (x で積分してエネルギーになるから)，それを，

$$\epsilon(t, x) \equiv \frac{T}{2} \left\{ \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right]^2 \right\}, \quad (329)$$

のように定義しておこう． $\epsilon(t, x)$ を t で偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon(t, x)}{\partial t} \frac{1}{T} &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} u(t, x) \right], \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} u(t, x) \right], \quad (\text{波動方程式}), \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right] \right\} \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \frac{j_\epsilon(t, x)}{T},\end{aligned}\tag{330}$$

により，エネルギー流 $j_\epsilon(t, x)$ が定義できる：

$$j_\epsilon(t, x) \equiv -T \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right].\tag{331}$$

$j_\epsilon(t, x)$ は単位時間あたり位置 x に左から右に流れているエネルギーである．式 (330) は連続の方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} j_\epsilon(t, x) = 0,\tag{332}$$

の形をしている．連続の方程式は物理学の中で種々の保存則を表す超重要な方程式なので覚えておいて損はないはずである．以下のように， x 微分を差分に置き換えると物理描像が理解しやすい．微小区間 $[x, x + \Delta x]$ を考えると，その区間のエネルギーは $\epsilon(t, x)\Delta x$ である．微小時間 Δt の間にその区間のエネルギーが変化したとすると，その変化量 $\Delta\epsilon$ は

$$\Delta\epsilon = \Delta x [\epsilon(t + \Delta t, x) - \epsilon(t, x)],\tag{333}$$

と表される．一方， Δt の間に x の左側から流れ込んできたエネルギーは $j_\epsilon(t, x)\Delta t$ ， $x + \Delta x$ の右側に逃げていったエネルギーは $j_\epsilon(t, x + \Delta x)\Delta t$ なので，差し引き溜まったエネルギー $\Delta\epsilon'$ は

$$\Delta\epsilon' = \Delta t [j_\epsilon(t, x) - j_\epsilon(t, x + \Delta x)],\tag{334}$$

である．エネルギーが保存されていれば二つの見積もり $\Delta\epsilon$ と $\Delta\epsilon'$ は等しくなければいけない．つまり，

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon' \longrightarrow \frac{\epsilon(t + \Delta t, x) - \epsilon(t, x)}{\Delta t} = \frac{j_\epsilon(t, x) - j_\epsilon(t, x + \Delta x)}{\Delta x},\tag{335}$$

が成立しなければならない．式 (335) において， $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ の極限をとれば，連続の方程式 (332) が導かれることがわかる．この様子を図 39 に示しておく．

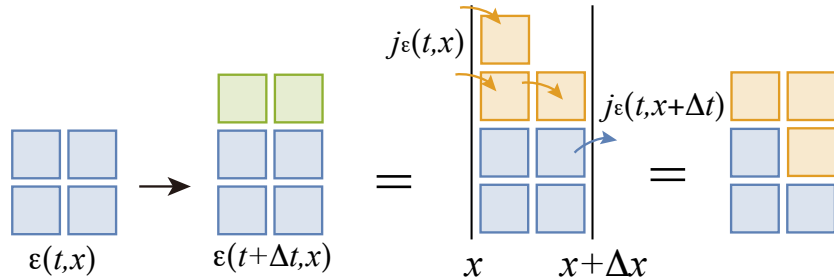


図 39 連続の方程式の概念図． $\epsilon(t, x)$ の増分は流れ込んできたエネルギーと出て行ったエネルギーの差に等しい．

♠ 例 32 : $u(t, x) = A \cos(kx - kct)$ の波

簡単な例として, $u(t, x) = A \cos(kx - kct)$ の波を考えよう. 定義に従って, $\epsilon(t, x)$ と $j_\epsilon(t, x)$ を計算すると,

$$\epsilon(t, x) = \frac{T}{2} A^2 \left[k^2 \sin^2(kx - kct) + k^2 \sin^2(kx - kct) \right] = T A^2 k^2 \sin^2(kx - kct),$$

$$j_\epsilon(t, x) = -T A^2 \left[-kc \sin(kx - kct) \right] \left[-k \cos(kx - kct) \right] = -T A^2 k^2 c \cos^2(kx - kct),$$

であることがわかる. それぞれ微分して,

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon(t, x) = -2T A^2 k^3 c \sin(kx - kct) \cos(kx - kct),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} j_\epsilon(t, x) = 2T A^2 k^3 c \cos(kx - kct) \sin(kx - kct),$$

を得る. 両辺をたすと, 確かに連続の方程式 (332) が成立していることが確認できる.

♠ 例 33 : 二つの媒質境界における境界条件

13.3 節で扱った, 二つの媒質境界における境界条件 (321) とエネルギー流 j_ϵ の関係を調べてみよう. 境界 $x = 0$ では, 入射波 u_0 が運んできたエネルギーの一部が $x > 0$ の透過波 v_2 に渡されている (残りは反射波 v_1 にいく). この流量 $j_\epsilon(t, 0)$ は両側で同じ値になる必要がある.

$$j_\epsilon(t, -0) = - \left\{ T_- \frac{\partial}{\partial t} [u_0(t, -0) + v_1(t, -0)] \right\} \frac{\partial}{\partial x} [u_0(t, x) + v_1(t, x)]_{x=-0}, \quad (336)$$

$$j_\epsilon(t, +0) = - \left\{ T_+ \frac{\partial}{\partial t} v_2(t, +0) \right\} \frac{\partial}{\partial x} v_2(t, x) \Big|_{x=+0}, \quad (337)$$

であり, 張力が両側で等しい ($T_+ = T_-$) こと, および変位が任意の時刻で等しい条件 (320) を用いると $\{ \}$ は両側で等しいことがわかる. よって, 両側で流量が等しいという条件は,

$$j_\epsilon(t, -0) = j_\epsilon(t, +0) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} [u_0(t, x) + v_1(t, x)]_{x=-0} = \frac{\partial}{\partial x} v_2(t, x) \Big|_{x=+0}, \quad (338)$$

という二つ目の境界条件 (321) と等価であることがわかる.

♠ 例 34 : 二つの媒質境界における反射波と透過波のエネルギー

再び 13.3 節で扱った, 二つの媒質境界における反射と透過の問題を考える. 時間が十分に経過した後, 系には $x > 0$ に透過波 v_2 , $x < 0$ に反射波 v_1 が存在するだけである. この時の全エネルギーは式 (327) を用いると以下に示すように計算できる. まず, v_1 , v_2 によるエネルギー密度 ϵ_1 , ϵ_2 は,

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_1(t, x)}{T} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{c_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} v_1(x + c_1 t) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x} v_1(x + c_1 t) \right]^2 \right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} v_1(x + c_1 t) \right]^2 = \left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} u_0(-x - c_1 t) \right]^2, \\ \frac{\epsilon_2(t, x)}{T} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{c_2^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} v_2(x - c_2 t) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x} v_2(x - c_2 t) \right]^2 \right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} v_2(x - c_2 t) \right]^2 = \left(\frac{2c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} u_0 \left(\frac{c_1}{c_2} (x - c_2 t) \right) \right]^2, \end{aligned}$$

のように u_0 を用いて書き表される．最後の等号は式 (327) を用いた． t が十分に大きいという仮定より， $\epsilon_1(t, x)$ を $-\infty < x < 0$ で積分すれば，反射波の持つエネルギーが得られる．同様に， $\epsilon_2(t, x)$ を $0 < x < \infty$ で積分すれば，透過波の持つエネルギーが得られる．前者は，

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\epsilon_1(t, x)}{T} dx = \left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \int_{-\infty}^0 dx \left[\frac{\partial}{\partial x} u_0(-x - c_1 t) \right]^2 = \left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \int_0^{\infty} dx' \left[\frac{\partial}{\partial x'} u_0(x' - c_1 t) \right]^2, \quad (339)$$

であり（最後の等号は $x' = -x$ と変数変換），後者は，

$$\int_0^{\infty} \frac{\epsilon_2(t, x)}{T} dx = \left(\frac{2c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \int_0^{\infty} dx \left[\frac{\partial}{\partial x} u_0 \left(\frac{c_1}{c_2} (x - c_2 t) \right) \right]^2 = \left(\frac{2c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \frac{c_1}{c_2} \int_0^{\infty} dx' \left[\frac{\partial}{\partial x'} u_0(x' - c_1 t) \right]^2, \quad (340)$$

と変形できる（最後の等号は $x' = c_1 x / c_2$ と変数変換）．よって，二つをたすと，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{\epsilon_1(t, x)}{T} dx + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_2(t, x)}{T} dx &= \left[\left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 + \frac{4c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \right] \int_0^{\infty} dx' \left[\frac{\partial}{\partial x'} u_0(x' - c_1 t) \right]^2, \\ &= \int_0^{\infty} dx' \left[\frac{\partial}{\partial x'} u_0(x' - c_1 t) \right]^2 = \int_{-c_1 t}^{\infty} dx \left[\frac{\partial}{\partial x} u_0(x) \right]^2, \end{aligned} \quad (341)$$

となる．最後の表式は初期状態 $t = 0$ における進行波のエネルギー（を T でわったもの）に他ならない． $t = 0$ では，問題の設定より $x > 0$ の積分領域は進行波の変位が 0 なので寄与しない．また， $-c_1 t$ から 0 までの積分は進行波の振幅が有限になる範囲を十分に含んでいることも明らかである（ $c_1 t$ という量は境界がなければ u_0 が動いた距離に等しい）．以上から，初期状態の進行波の持っていたエネルギーは過不足なく反射波と透過波に受け渡っていることが確認できる．

最後に，十分に時間が経過した後（ $t = \infty$ ）において透過波の持つエネルギーは，境界 $x = 0$ を左から右に流れたエネルギー流 $j_\epsilon(t, x = 0)$ を $t = -\infty$ から ∞ で積分したものであることを確認しよう．式 (336) と (337) のどちらを用いても良いが，式 (337) を用いるほうが簡単だろう（項が少ないから）．式 (327) を用いると，

$$j_\epsilon(t, +0) = -T \frac{\partial v_2(-c_2 t)}{\partial t} \frac{\partial v_2(x - c_2 t)}{\partial x} \Big|_{x=+0} = -T \left(\frac{2c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \frac{\partial u_0(-c_1 t)}{\partial t} \frac{\partial u_0 \left(\frac{c_1}{c_2} (x - c_2 t) \right)}{\partial x} \Big|_{x=+0} \quad (342)$$

以下の関係に注意すると．

$$\frac{\partial u_0 \left(\frac{c_1}{c_2} x - c_1 t \right)}{\partial x} \Big|_{x=+0} = -\frac{1}{c_2} \frac{\partial u_0 \left(\frac{c_1}{c_2} x - c_1 t \right)}{\partial t} \Big|_{x=+0} = -\frac{1}{c_2} \frac{\partial u_0(-c_1 t)}{\partial t}, \quad (343)$$

t で積分して，以下を得る：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt j_\epsilon(t, +0) = \frac{T}{c_2} \left(\frac{2c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\partial u_0(-c_1 t)}{\partial t} \right)^2 \xrightarrow{-c_1 t = y} T \frac{4c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} \right)^2. \quad (344)$$

式 (341) を見れば， y 積分は初期エネルギーに等しく，因子 $4c_1 c_2 / (c_1 + c_2)^2$ かけたものは透過波のエネルギー (340) に等しいので，確かに

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt j_\epsilon(t, +0) = T \frac{4c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} \right)^2 = \int_0^{\infty} \epsilon_2(t \rightarrow \infty, x) dx, \quad (345)$$

となっていることが確認できる．

付録 A 実対称行列の対角化

6 節ででてきた様に、任意の実対称行列は実直交行列 $\hat{U}$ を用いて対角化可能であり、その対角成分の値（固有値）は実数である。^{*9} 剛体における「主軸」の概念は線型代数学におけるこの実対称行列の性質から保証されている。つまり、必ず慣性モーメントテンソルの非対角成分が 0 になる様な座標系が存在するのである。この付録では実対称行列 $\hat{I}$ の固有値、固有ベクトルについて説明する。

A.1 固有方程式と固有値

対角化とは具体的には、固有値 λ に対する固有方程式：

$$\hat{I}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (346)$$

を満たす λ と固有ベクトル $\mathbf{v}$ を求めることである。

まず、実対称行列の固有値 λ が実数であることを示そう。 $\hat{I}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ であるとき $\mathbf{x}^*$ との内積をとると、

$$\sum_{\mu\nu} (\mathbf{x}^*)_{\mu} (\hat{I})_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\nu} = \lambda \sum_{\mu} (\mathbf{x}^*)_{\mu} (\mathbf{x})_{\mu} = \lambda |\mathbf{x}|^2, \quad (347)$$

となる。ここで、 $(\mathbf{x})_{\mu}$ はベクトル $\mathbf{x}$ の μ 成分である。両辺の複素共役をとると、

$$\lambda^* |\mathbf{x}|^2 = \sum_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\mu} (\hat{I})_{\mu\nu}^* (\mathbf{x}^*)_{\nu} \xrightarrow{\hat{I} \text{ は実対称}} \sum_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\mu} (\hat{I})_{\nu\mu} (\mathbf{x}^*)_{\nu} \xrightarrow{\mu \leftrightarrow \nu} \sum_{\mu\nu} (\mathbf{x}^*)_{\mu} (\hat{I})_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\nu} \xrightarrow{\text{式 (347)}} \lambda |\mathbf{x}|^2.$$

よって、 $\lambda = \lambda^*$ となり、 λ は実数であることがわかる。成分の掛け算の和として書いておけば、「成分」は行列やベクトルではなくただの数なのだから、 $\sum_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\mu} (\hat{I})_{\nu\mu} (\mathbf{x}^*)_{\nu} = \sum_{\mu\nu} (\mathbf{x}^*)_{\nu} (\hat{I})_{\nu\mu} (\mathbf{x})_{\mu}$ の様に順番を入れ替えても良いことに注意する。

A.2 固有ベクトルの直交性

もうひとつの重要な性質として、実対称行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交する、というものがある。^{*10} 今、二つの異なる固有値の固有ベクトルが以下のように求まったとする：

$$\hat{I}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \hat{I}\mathbf{x}' = \lambda'\mathbf{x}'. \quad (348)$$

式 (348) の第一式の両辺それぞれと $\mathbf{x}'^*$ の内積、第二式の両辺それぞれと $\mathbf{x}^*$ の内積をとると、

$$\sum_{\mu\nu} (\mathbf{x}')_{\mu}^* (\hat{I})_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\nu} = \lambda \sum_{\mu} (\mathbf{x}')_{\mu}^* (\mathbf{x})_{\mu}, \quad \sum_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\mu}^* (\hat{I})_{\mu\nu} (\mathbf{x}')_{\nu} = \lambda' \sum_{\mu} (\mathbf{x})_{\mu}^* (\mathbf{x}')_{\mu}, \quad (349)$$

となる。式 (349) の第二式の複素共役は、 λ' が実数で $\hat{I}$ が実対称行列であることを思い出すと、

$$\lambda' \sum_{\mu} (\mathbf{x})_{\mu} (\mathbf{x}')_{\mu}^* = \sum_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\mu} (\hat{I})_{\mu\nu} (\mathbf{x}')_{\nu}^* \xrightarrow{\mu \leftrightarrow \nu} \sum_{\mu\nu} (\mathbf{x})_{\nu} (\hat{I})_{\mu\nu} (\mathbf{x}')_{\mu}^* = \lambda \sum_{\mu} (\mathbf{x}')_{\mu}^* (\mathbf{x})_{\mu}, \quad (350)$$

^{*9} 量子力学ではエルミート行列 $H = H^{\dagger}$ は実固有値をもち、ユニタリ行列 $U^{-1} = U^{\dagger}$ で対角化できる、という性質を専ら使用する。証明はほとんどここでの流れと同じである。最近では非エルミート量子力学というものもある。

^{*10} 一般の行列では直交までは言えないが一次独立である。

である。最後の等号は式 (348) の第一式を用いた。よって、

$$\lambda' \sum_{\mu} (\mathbf{x})_{\mu} (\mathbf{x}')_{\mu}^* = \lambda \sum_{\mu} (\mathbf{x}')_{\mu}^* (\mathbf{x})_{\mu} \longrightarrow (\lambda - \lambda') \sum_{\mu} (\mathbf{x}')_{\mu}^* (\mathbf{x})_{\mu} = 0 \longrightarrow \mathbf{x}'^* \cdot \mathbf{x} = 0, \quad (351)$$

となり、二つの異なる固有値 ($\lambda \neq \lambda'$) に対応する固有ベクトルが直交することがわかる。

ちなみに、 $\hat{I}$ が実対称行列であれば、固有ベクトルは常に実数にとることができる。これは、もし $\mathbf{x}$ が虚部を含んでいるとき、

$$\hat{I}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \xrightarrow{\text{複素共役}} \hat{I}\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}^*, \quad (352)$$

なので、 $\mathbf{x}^*$ の固有値も λ である。よって、新しい固有ベクトルを、

$$\mathbf{y}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{x}^*), \quad \mathbf{y}_- \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \quad (353)$$

と定義すれば、 $\mathbf{y}_{\pm}$ は互いに直交する実ベクトルであり、固有値はともに λ である。

A.3 実直交行列

次に実直交行列を説明しておこう。実直交行列とは、行列 $\hat{U}$ を互いに直交する実数を成分とする縦ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ を並べて作ることができる行列で、 $m \times m$ 行列とすると、

$$\hat{U} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m), \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad (354)$$

と書ける。 $\hat{U}$ の行と列を入れ替えた転置行列 $\hat{U}^T$ は、

$$\hat{U}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{pmatrix}, \quad (355)$$

となるので、 $\hat{U}^T \hat{U}$ は、

$$\hat{U}^T \hat{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{1}}, \quad (356)$$

のように単位行列 $\hat{\mathbf{1}}$ になる。 $\hat{U} = \hat{U}(\hat{U}^T \hat{U}) = (\hat{U} \hat{U}^T) \hat{U}$ なので、 $\hat{U} \hat{U}^T = \hat{\mathbf{1}}$ も成立する。よって、 $\hat{U}^T = \hat{U}^{-1}$ となることがわかる。

A.4 対角化の計算の流れ

実際の対角化はルーチン作業で、以下のようにすれば良い、式 (346) より、

$$(\hat{I} - \lambda \hat{\mathbf{1}})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (357)$$

が成立しているので、 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ の解が存在するためには、式 (357) の左辺の $(\hat{I} - \lambda \hat{\mathbf{1}})$ は逆行列をもたない。逆行列が存在しないための必要十分条件はその行列の行列式が 0 であることである。つまり、

$$\Delta = \det(\hat{I} - \lambda \hat{\mathbf{1}}) = 0, \quad (358)$$

である．式 (358) は λ に関する m 次方程式になっているから，原理的には $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ のように m 個の固有値が求まる．得られた固有値 λ_i それぞれについて，式 (346) に代入し，連立方程式：

$$\hat{I}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad (359)$$

を解いて，固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ を求めれば良い．ここで，固有方程式である連立方程式 (359) は両辺に同じ定数をかけても成立するので，固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ は定数倍を除いてしか決まらない．後々の為に， $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ にしておくとし便利であり，これを規格化とよぶ．また，異なる固有値の固有ベクトルは直交することから， $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$ となる．この関係は計算の確認に用いることができる．もし，複数の固有値が同じ値になっている場合（これを縮退とよぶ）も必ず直交するように $\mathbf{v}_i$ を作るようにしないといけない（実対称行列の場合はこれが常に可能である）．

以上が，対角化のルーチンであり，よほどのことがない限り，初学者でもこの作業は理解できると思う．

A.5 基底変換

次に，実対称行列は実直交行列 $\hat{U}$ を用いて対角化できる，というところの実直交行列 $\hat{U}$ は何なのかを説明しよう．式 (346) に左から $\hat{U}^{-1}$ をかけ，上記の直交行列の性質 $\hat{U}\hat{U}^{-1} = \hat{U}\hat{U}^T = \hat{\mathbf{1}}$ を用いると，

$$\hat{U}^{-1}\hat{I}\hat{U}\hat{U}^{-1}\mathbf{v} = \lambda\hat{U}^{-1}\mathbf{v}, \quad (360)$$

となる．ここで， $\hat{U}$ を先ほど求めた規格化された固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ で構成する：

$$\hat{U} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_m), \quad \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}. \quad (361)$$

$\hat{I}\hat{U}$ を計算すると，

$$\hat{I}\hat{U} = (\hat{I}\mathbf{v}_1 \quad \hat{I}\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \hat{I}\mathbf{v}_m) = (\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_m\mathbf{v}_m), \quad (362)$$

となる．ここで，(359) を用いている．左から $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^T$ をかけると，

$$\hat{U}^T\hat{I}\hat{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{pmatrix} (\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_m\mathbf{v}_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_m\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_m \\ \lambda_1\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_m\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_m\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_m \end{pmatrix}. \quad (363)$$

よって，

$$\hat{U}^T\hat{I}\hat{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad (364)$$

を得る．式 (360) で，

$$\mathbf{v}' = \hat{U}^{-1}\mathbf{v} = \hat{U}^T\mathbf{v}, \quad (365)$$

とおくと，

$$\hat{U}^T\hat{I}\hat{U}\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \mathbf{v}', \quad (366)$$

である．固有値 λ_1 に対する固有ベクトルは $\mathbf{v}' = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$ ，固有値 λ_2 に対する固有ベクトルは $\mathbf{v}' = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$ ， $\dots$ ，固有値 λ_m に対する固有ベクトルは $\mathbf{v}' = (0, 0, \dots, 1)^T$ ，となる．ここで混乱することが多いが，元々の固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ とこれらの $\mathbf{v}'$ はどう関係するのか？定義式 (365) より，

$$\mathbf{v} = \hat{U} \mathbf{v}' = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_m) \mathbf{v}', \quad (367)$$

であることを思い出せば，例えば， $\mathbf{v}' = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$ を式 (367) に代入すると，

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1, \quad (368)$$

となり，確かに， $\mathbf{v}' = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$ のときは，固有ベクトル $\mathbf{v}_1$ になり，固有値が λ_1 になることも合致している．同様にすると， $\mathbf{v}' = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$ のときは $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ ， $\dots$ ， $\mathbf{v}' = (0, 0, \dots, 1)^T$ のとき $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m$ となることが示される．

これはどういうことか？実は $\mathbf{v}$ と $\mathbf{v}'$ の世界は座標系が異なっているのである．以下では少し回りくどいが，座標系を回転する，という立場でもう一度考えてみよう．簡単のため，一般論はやめて，慣性モーメントテンソルの場合の 3 成分のベクトルを考えよう． $\mathbf{v} \rightarrow \boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ， $\mathbf{v}' \rightarrow \boldsymbol{\omega}' = (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ ，とおく．最初，勝手にとった 3 次元の直交座標の単位ベクトルを $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ とおくと，

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}, \quad (369)$$

であり，慣性モーメントテンソル $\hat{I}$ は非対角項が有限になっているとする（つまり， $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ の方向は主軸になっていない）．簡単のために $\hat{I}$ を具体的に，

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I & I' & 0 \\ I' & I & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \quad (370)$$

であると仮定しよう．ここで， z 軸まわりに座標系を角度 θ だけ回転し，新しい直交座標系の単位ベクトルを $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ とかくと，

$$\hat{x}' = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}' = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z}' = \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (371)$$

と関係していることがわかる．式 (371) を逆に解けば，

$$\hat{x} = \cos \theta \hat{x}' - \sin \theta \hat{y}', \quad \hat{y} = \sin \theta \hat{x}' + \cos \theta \hat{y}', \quad \hat{z} = \hat{z}', \quad (372)$$

となる．式 (372) を式 (369) の $\boldsymbol{\omega}$ に代入して，

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x \cos \theta + \omega_y \sin \theta) \hat{x}' + (-\omega_x \sin \theta + \omega_y \cos \theta) \hat{y}' + \omega_z \hat{z}' \equiv \omega'_x \hat{x}' + \omega'_y \hat{y}' + \omega'_z \hat{z}'. \quad (373)$$

ここで， $\omega'_{x,y,z}$ は新しい座標系での $\boldsymbol{\omega}$ のそれぞれの軸に対応する成分である． $\hat{I} \boldsymbol{\omega}$ を計算すると，

$$\hat{I} \boldsymbol{\omega} = \omega'_x \hat{I} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \omega'_y \hat{I} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \omega'_z \hat{I} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (374)$$

であり, $\theta = \pi/4$ (もしくは $3\pi/4$ でも同じ) の時, $\hat{x}'$ と $\hat{y}'$ は固有ベクトルになる:

$$\begin{pmatrix} I & I' & 0 \\ I' & I & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (I + I') \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I & I' & 0 \\ I' & I & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (I - I') \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (375)$$

よって, $\theta = \pi/4$ のとき,

$$\hat{I}\omega = (I + I') \frac{\omega'_x}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (I - I') \frac{\omega'_y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + I_z \omega'_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (I + I') \omega'_x \hat{x}' + (I - I') \omega'_y \hat{y}' + I_z \omega'_z \hat{z}', \quad (376)$$

となることがわかる. ここで, $\hat{x}'$, $\hat{y}'$, $\hat{z}'$ が,

$$\hat{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (377)$$

と見えるような座標系をとれば, $\hat{I}$ は対角的に見える:

$$\begin{pmatrix} I + I' & 0 & 0 \\ 0 & I - I' & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}. \quad (378)$$

ただし, この行列 $\hat{I}$ の基底は元の行列 (370) の基底 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ と全く異なることに注意すること. 以降, 基底が $\hat{x}'$, $\hat{y}'$, $\hat{z}'$ で書かれている量を赤で表示するようにする^{*11}. もし,

$$\hat{y}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (379)$$

の様に新しい座標系をとった場合 (青で表示しよう), $\hat{I}$ は,

$$\begin{pmatrix} I - I' & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & I + I' \end{pmatrix}, \quad (380)$$

となる (“ x ” だからと言って最初に来る必要はない). 式 (377) に対応する直交行列 $\hat{U}$ は元の座標で固有ベクトルを並べた形:

$$\hat{U} = (\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}') = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\leftarrow \text{赤字ではないので } \hat{x}' \text{ 等は式 (371) で与えられる}), \quad (381)$$

であり, 以下のように座標系を z 軸まわりに ($z = \infty$ からみて時計回りに) 角度 θ だけ回転する作用がある:

$$\hat{U} \hat{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{この計算は色が赤だろうがなんだろうが同じ}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{x}', \quad \hat{U} \hat{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{この計算も色が赤だろうがなんだろうが同じ}} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{y}', \quad (382)$$

^{*11} 色をつけるというのはもちろんこのノートでの特別な表記である.

式 (382) は、 $\hat{U}$ を赤いベクトルに作用させると元の座標系でのベクトルに変換する、ということを意味する。^{*12} $\hat{I}\boldsymbol{\omega}$ もベクトルには変わらないので、 $\hat{U}$ の作用によって元の座標のベクトル $\hat{I}\boldsymbol{\omega}$ に変換される：

$$\begin{aligned}\hat{U}\hat{I}\boldsymbol{\omega} &= \hat{U} \begin{pmatrix} I + I' & 0 & 0 \\ 0 & I - I' & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \hat{U}^T \hat{U}(\omega'_x \hat{x}' + \omega'_y \hat{y}' + \omega'_z \hat{z}'), \\ &= \begin{pmatrix} I & I' & 0 \\ I' & I & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} (\omega'_x \hat{x}' + \omega'_y \hat{y}' + \omega'_z \hat{z}'), \\ &= \hat{I}(\omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}), \\ &= \hat{I}\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\tag{384}$$

$\omega'_x \hat{x}' + \omega'_y \hat{y}' + \omega'_z \hat{z}' = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z} = \boldsymbol{\omega}$ であることに留意すること [式 (373)]. 式 (384) に左から $\hat{U}^T = \hat{U}^{-1}$ をかけると $(\hat{U}^T \hat{I} \hat{U})(\hat{U}^T \boldsymbol{\omega}) = \hat{I}\boldsymbol{\omega}$ のように対角化されることがわかる。

以上から、対角化は座標系を新しいものにとって、基底（ここでは単位ベクトル）を変換することであることがわかる。数学的には 3×3 の任意の実直交行列は 3 次元空間での回転（反転や鏡映を含む）を表す。このような行列の「集まり」は「群」をなし、 $O(3)$ 群 (O は “orthogonal”) と呼ばれる。行列式が 1 の直交行列は純粋な回転を表し、 $SO(3)$ 群と呼ばれる (S は “special”). 群を記述する数学を群論とよび、素粒子から物性まで幅広い分野で用いられる重要な概念になっている。

♠ 例 35 : 式 (379) の場合の $\hat{U}$

赤の単位ベクトルの「順番」を変えただけだが³、理解できない人が多いので確認してほしい。 $\hat{U}$ は $(\hat{y}' \ \hat{z}' \ \hat{x}')$ の順に並べないといけない：

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{385}$$

こうしておかないと、 $\hat{U}^T \hat{I} \hat{U} = \hat{I}$ とした時の I_{11} , I_{22} , I_{33} がそれぞれ $\hat{y}'$, $\hat{z}'$, $\hat{x}'$ 方向の慣性モーメントに対応しないことになってしまう (確認せよ)。

♠ 例 36 : もう少し直感的な見方

対角化をもう少し直感的に理解するために、 xy 面上の任意の形状の薄い板の慣性モーメントテンソルを考えよう。 $I_{zx} = I_{yz} = 0$ となるので、以下の 2×2 行列を考えれば十分である。

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix} = \int dx dy \rho(x, y) \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \int dx dy \rho(x, y) (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \int dx dy \rho(x, y) \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & -x^2 + y^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{386}$$

のように分解できるので、2 次元極座標を用いると、 $r^2 = x^2 + y^2$ より

$$\hat{I} = \frac{1}{2} \int dr r^3 \int d\theta \rho(r, \theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \int dr r^3 \int d\theta \rho(r, \theta) \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}\tag{387}$$

^{*12} 式 (382) の関係は、色を無視して、座標軸の回転ではなくベクトルそのものを回転させる、という風に解釈することもできる：

$$\hat{U}\hat{x} = \hat{x}', \quad \hat{U}\hat{y} = \hat{y}', \quad \hat{U}\hat{z} = \hat{z}'.\tag{383}$$

r 積分を実行した「密度もどき」の量

$$g(\theta) \equiv \frac{1}{2} \int dr r^3 \rho(r, \theta) \quad (388)$$

を用いると,

$$\hat{I} = \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (389)$$

のように表すことができる. ここで非対角項の積分について考える. $\sin(2\theta)$ は $\pi/2$ 毎に符号を変える関数であることを考慮すると,

$$\begin{aligned} -I_{xy} &= \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \sin(2\theta) \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta g(\theta) |\sin(2\theta)| - \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta g(\theta) |\sin(2\theta)| + \int_{\pi}^{3\pi/2} d\theta g(\theta) |\sin(2\theta)| - \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\theta g(\theta) |\sin(2\theta)| \end{aligned} \quad (391)$$

と書ける. 第一項と第三項 (第一, 三象限の積分) は正, 第二項, 第四項 (第二, 四象限の積分) は負の寄与を与えることがわかる. これらがちょうどキャンセルする場合は慣性乗積の消失する場合になる. 対角化は座標の回転だということを学んだので, xy 面内に角度 $\pi/2$ 回転したとき, つまり $x' = y$, $y' = -x$ としたときにこの積分がどうなるかを見てみよう. 新しい極座標 (x' 軸からの角度を θ' とする) を用いると,

$$-I'_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta' g'(\theta') \sin(2\theta') = \left[\int_0^{\pi/2} d\theta' - \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' + \int_{\pi}^{3\pi/2} d\theta' - \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\theta' \right] g'(\theta') |\sin(2\theta')| \quad (392)$$

となるが, $g'(\theta') = g(\theta' + \pi/2)$ を考慮して, 積分変数を $\theta'' = \theta' + \pi/2$ で書くと,

$$-I'_{xy} = \left[\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta'' - \int_{\pi}^{3\pi/2} d\theta'' + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\theta'' - \int_{2\pi}^{5\pi/2} d\theta'' \right] g(\theta'') |\sin(2\theta'')| \quad (393)$$

であり, 最後の項の積分範囲は $0 \sim \pi/2$ と書けるので結局

$$-I'_{xy} = - \left[\int_0^{\pi/2} d\theta'' + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta'' - \int_{\pi}^{3\pi/2} d\theta'' + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\theta'' \right] g(\theta'') |\sin(2\theta'')| = I_{xy} \quad (394)$$

であることがわかる. つまり, $\pi/2$ 回転した座標系で慣性乗積を計算すると元のものと符号が異なるということになる. このことは図 40 を見れば明らかである. よって, 回転角が $\pi/2$ までのどこかで必ず慣性乗積が消失する角度が存在するといえる.

角度 φ の回転を表す直交行列 $\hat{U}_\varphi$ を用いると回転後の新しい座標系での慣性モーメントテンソルは

$$\hat{I}' = {}^T \hat{U}_\varphi \hat{I} \hat{U}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \hat{I} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (395)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \begin{pmatrix} \cos(2\theta - 2\varphi) & \sin(2\theta - 2\varphi) \\ \sin(2\theta - 2\varphi) & -\cos(2\theta - 2\varphi) \end{pmatrix} \quad (396)$$

となるので, 慣性乗積が消失する条件は

$$0 = \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \sin(2\theta - 2\varphi) \rightarrow \tan(2\varphi) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \sin(2\theta)}{\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \cos(2\theta)} \quad (397)$$

である． $\tan(2\varphi)$ の関数形から，確かに φ の解が $0 \leq |\varphi| \leq \pi/4$ に一つ存在することがわかる．また， $|\varphi| \geq \pi/4$ の領域は考える必要はない．これは主軸を決めた時にどちらを正にとるかの自由度に対応している．またこの時，式 (397) の右辺の分母分子各々が正の場合であれば， $0 < \varphi < \pi/4$ であり，

$$\cos(2\varphi) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \cos(2\theta)}{\sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \cos(2\theta)\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \sin(2\theta)\right)^2}}, \quad (398)$$

$$\sin(2\varphi) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \sin(2\theta)}{\sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \cos(2\theta)\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \sin(2\theta)\right)^2}}. \quad (399)$$

となるので，

$$\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \cos(2\theta - 2\varphi) = \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) [\cos(2\theta) \cos(2\varphi) + \sin(2\theta) \sin(2\varphi)] \quad (400)$$

$$= \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \cos(2\theta)\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \sin(2\theta)\right)^2} \quad (401)$$

を得る．この結果から得られる固有値は直接対角化したものと当然一致している．式 (397) の右辺の分母分子の符号の組み合わせによって，全体に負符号が付く場合もある．これは，式 (396) の右辺第二項の 2 種の対角成分に符号が反対のものが存在することに対応している．

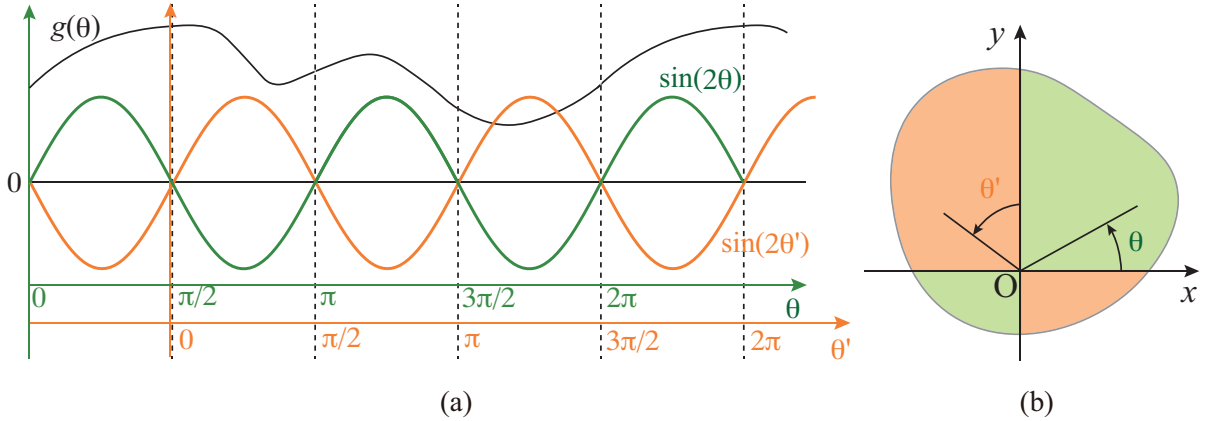


図 40 (a) $g(\theta)$, $\sin(2\theta)$ (緑) と $\sin(2\theta')$ (オレンジ) の $\theta(\theta')$ 依存性. (b) 剛体の各領域で $\sin(2\theta)$ の正負を色分けした図. 緑: $\sin(2\theta) > 0$, オレンジ: $\sin(2\theta) < 0$. $\sin(2\theta')$ の場合は逆になる.

付録 B 積分公式

B.1 ガウス積分

次の積分をガウス積分とよび、物理での応用上重要な積分である：

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (a > 0). \quad (402)$$

証明には $I^2(a)$ を考えれば良い：

$$I^2(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ay^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2+y^2)}. \quad (403)$$

二次元の極座標を用いて積分すると、

$$\begin{aligned} I^2(a) &= \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ar^2} = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr = -\frac{\pi}{a} \int_0^{\infty} \frac{d}{dr} e^{-ar^2} dr, \\ &= -\frac{\pi}{a} \left[e^{-ar^2} \right]_0^{\infty} = -\frac{\pi}{a} (0 - 1) = \frac{\pi}{a}. \end{aligned} \quad (404)$$

明らかに $I(a) > 0$ なので $I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ が示された。

応用として、 n, k が正の整数の時、

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n e^{-ax^2} = \begin{cases} 0 & (n = 2k - 1), \\ \sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}} \frac{(2k-1)!!}{2^k} & (n = 2k), \end{cases} \quad (405)$$

という関係も示すことができる。ここで、 $(2k-1)!! \equiv (2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$ である。 n が奇数の時は被積分関数が奇関数になるので明らかに 0 になる。 $n = 2k$ (k : 正の整数) の場合、式 (402) を a で k 回微分すれば良い：

$$(-1)^k \frac{d^k}{da^k} I(a) = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d^k}{da^k} e^{-ax^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k} e^{-ax^2} = I_{2k}(a) \quad (406)$$

である。一方、式 (402) の右辺を用いると、

$$\begin{aligned} (-1)^k \frac{d^k I(a)}{da^k} &= (-1)^k \frac{d^k}{da^k} \sqrt{\pi} a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} (-1)^k \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-1}{2}\right) a^{-\frac{2k+1}{2}}, \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}} \frac{(2k-1)!!}{2^k}. \end{aligned}$$

よって、式 (405) が示された。

B.2 フーリエ積分

以下の積分はフーリエ級数の計算に有用である：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \pi \delta_{mn}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \pi \delta_{mn}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx &= 2\pi \delta_{n0}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx &= 0.\end{aligned}$$

例えば、式 (272) の両辺に $\cos(nx)$ をかけて $x = -\pi$ から $x = \pi$ まで積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx \right], \\ &= \pi a_0 \delta_{n0} + \pi \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \delta_{mn} + b_m \cdot 0) = \pi a_n,\end{aligned}$$

となる。 $x \rightarrow \frac{\pi}{l}x$ と変数変換すれば、

$$\begin{aligned}\int_{-l}^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= 0, \\ \int_{-l}^l \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= 2 \int_0^l \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = l \delta_{mn}, \\ \int_{-l}^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= 2 \int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = l \delta_{mn}, \\ \int_{-l}^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= 2 \int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 2l \delta_{n0}, \\ \int_{-l}^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= 0.\end{aligned}$$

などの関係式が得られる。