

9 構成子クォーク模型

9.1 クォークによるハドロンの記述

- **構成子クォーク模型**：クォークの複合系としてハドロンを記述
メソン：クォーク反クォーク ($q\bar{q}$)、バリオン：3 クォーク (qqq)

- 2 粒子系の波動関数

2 電子系 (空間 ϕ_ℓ 、スピン Ψ)

$$|e^-e^-\rangle = |\phi_\ell(\mathbf{r})\rangle \otimes |\Psi\rangle \quad (203)$$

2 核子系 (空間 ϕ_ℓ 、スピン Ψ 、アイソスピン χ)

$$|NN\rangle = |\phi_\ell(\mathbf{r})\rangle \otimes |\Psi\rangle \otimes |\chi\rangle \quad (204)$$

2 クォーク系 (空間 ϕ_ℓ 、スピン Ψ 、フレーバー f 、カラー c)

$$|qq\rangle = |\phi_\ell(\mathbf{r})\rangle \otimes |\Psi\rangle \otimes |f\rangle \otimes |c\rangle \quad (205)$$

フェルミオンの反対称性が内部自由度の表現を制限する (§3 の核力参照)

- uds からなるハドロン：スピン $|\Psi\rangle$ は $SU(2)$ の表現、フレーバー $|f\rangle$ とカラー $|c\rangle$ は $SU(3)$ の表現
- メソン ($q\bar{q}$ 状態) の波動関数

$$|q\bar{q}\rangle = |\phi_\ell(\mathbf{r})\rangle \otimes |\Psi\rangle \otimes |f\rangle \otimes |c\rangle \quad (206)$$

q と $\bar{q}$ は別のフェルミオンであるため、入れ替えに対する対称性を考慮する必要はない
($c\bar{c}$ など同じフレーバーのクォーク対のメソンの荷電共役変換の固有値は反対称性で決まる)

- バリオン (qqq 状態) の波動関数

$$|qqq\rangle = |\phi_\ell(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{3,12})\rangle \otimes |\Psi\rangle \otimes |f\rangle \otimes |c\rangle \quad (207)$$

ヤコビ座標 $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{3,12}$ ：3 体系の相対座標、クォーク 1, 2, 3 の位置座標を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ とする (図 26)

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_{3,12} = \mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \quad (208)$$

重心系では $\mathbf{r}_{12}$ と $\mathbf{r}_{3,12}$ で 3 粒子の空間状態を指定することができる

軌道角運動量 ℓ ：各ヤコビ座標に関する軌道角運動量 ℓ_1 と ℓ_2 の合成

3 つの q の入れ替えに対して **完全反対称** (どの 2 つを入れ替えても符号が出る) でなければならない

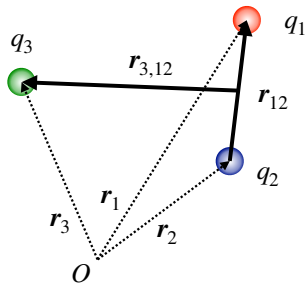


図 26: 3 クォーク系のヤコビ座標。

9.2 スピン・パリティ

- ハドロンの**スピン J** ：クォークの複合系としての重心系での全角運動量 ℓ （空間波動関数の軌道角運動量）と S ($|\Psi\rangle$ のスピン) の合成
- ハドロンの**パリティ P** ：それぞれの粒子の固有パリティと軌道角運動量からくる因子の積
クォークの固有パリティは $P_q = +1$ 、反クォークは $P_{\bar{q}} = -1$
軌道角運動量：式 (65) の変換はパリティ変換 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ と同じ

$$P_\ell \phi_\ell(\mathbf{r}) = \phi_\ell(-\mathbf{r}) = (-1)^\ell \phi_\ell(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad P_\ell = \begin{cases} +1 & \ell = \text{even} \\ -1 & \ell = \text{odd} \end{cases} \quad (209)$$

- $q\bar{q}$ のスピン J
 $q, \bar{q}$ はそれぞれスピン $S = 1/2 \Rightarrow |\Psi\rangle$ は $S = 0$ または $S = 1$
 J は ℓ と $S = 0, 1$ の合成：

$$J = \begin{cases} 0, 1 & \ell = 0 \\ \ell - 1, \ell, \ell + 1 & \ell \geq 1 \end{cases} \quad (210)$$

- $q\bar{q}$ のパリティ P

$$P_{\text{meson}} = \underbrace{P_q P_{\bar{q}}}_{-1} P_\ell = \begin{cases} -1 & \ell = \text{even} \\ +1 & \ell = \text{odd} \end{cases} \quad (211)$$

まとめると表 9 のスピン・パリティが可能

基底状態は $\ell = 0$ と仮定すると $J^P = 0^-$ (**擬スカラー**, pseudoscalar) と 1^- (**ベクトル**, vector)

- qqq のスピン J
 q はスピン $S = 1/2 \Rightarrow |\Psi\rangle$ は $S = 1/2$ または $S = 3/2$
 J は ℓ と $S = 1/2, 3/2$ の合成：

$$J = \begin{cases} 1/2, 3/2 & \ell = 0 \\ 1/2, 3/2, 5/2 & \ell = 1 \\ \ell - 3/2, \ell - 1/2, \ell + 1/2, \ell + 3/2 & \ell \geq 2 \end{cases} \quad (212)$$

- qqq のパリティ P

$$P_{\text{meson}} = \underbrace{P_q P_q P_q}_{+1} P_\ell = \begin{cases} +1 & \ell = \text{even} \\ -1 & \ell = \text{odd} \end{cases} \quad (213)$$

まとめると表 9 のスピン・パリティが可能

基底状態は $\ell = 0$ と仮定すると $J^P = 1/2^+$ と $3/2^+$

表 9: 起動角運動量 ℓ ごとの $q\bar{q}$ メソンと qqq バリオンのスピン・パリティ J^P 。

軌道角運動量 ℓ		0	1	2	...
スピン・パリティ J^P	$q\bar{q}$ メソン	$0^-, 1^-$	$0^+, 1^+, 2^+$	$1^-, 2^-, 3^-$	...
	qqq バリオン	$1/2^+, 3/2^+$	$1/2^-, 3/2^-, 5/2^-$	$1/2^+, 3/2^+, 5/2^+, 7/2^+$	...

9.3 カラー

- クォークのカラーは **3** 表現、反クォークは $\bar{\mathbf{3}}$ 表現

$$|q\rangle = \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}, \quad \langle \bar{q}| = (\bar{r} \quad \bar{g} \quad \bar{b}) \quad (214)$$

- メソン $q\bar{q}$ のカラー表現

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (215)$$

カラー波動関数は **1** 表現になっている（これ以外の 8 通りが **8** 表現）

$$|c\rangle = |\mathbf{1}\rangle = \frac{|r\bar{r}\rangle + |g\bar{g}\rangle + |b\bar{b}\rangle}{\sqrt{3}} \quad (216)$$

- バリオン qqq のカラー表現

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$$

カラー波動関数は **1** 表現になっている（これ以外の 26 通りが **8, 8, 10** 表現）

$$|c\rangle = |\mathbf{1}\rangle = \frac{|rgb\rangle + |brg\rangle + |gbr\rangle - |grb\rangle - |bgr\rangle - |rbg\rangle}{\sqrt{6}} \quad (217)$$

完全反対称、どの 2 つのクォークを入れ替えても符号が出る

- メソンとバリオン以外のクォークの組み合わせ

- クォーク単体 q : **3** 表現、バリオン数 $B = 1/3$
- クォーク 2 つの状態（ダイクォーク） qq : $\bar{\mathbf{3}}$ 表現か **6** 表現、バリオン数 $B = 2/3$

これらは観測されていない（カラー自由度は測定できないが、バリオン数は観測可能）

⇒ 観測されるハドロンのカラーは **1** 表現になっている：**カラーの閉じ込め**

実験的に検証された事実だが、理論的になぜ **8** 表現や **3** 表現は観測できないかは解明されていない

- よりクォーク数が多い状態：

- クォーク 4 つの状態 $qqqq$: バリオン数 $B = 4/3$
- クォーク 5 つの状態 $qqqqq$: バリオン数 $B = 5/3$

これらの状態は $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ などが **1** 表現を含まないためカラー閉じ込めで**禁止される**

- メソンとバリオンを単位として複数組み合わせた状態

- メソン 2 つ $q\bar{q}q\bar{q}$: バリオン数 $B = 0$
- メソン+バリオン $q\bar{q}qqq$: バリオン数 $B = 1$

1 重項 2 つのテンソル積は 1 重項 ($\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}$) なので、これらの状態はカラー閉じ込めでは**禁止されない**

9.4 基底状態のメソン

- クォークのフレーバーは $\mathbf{3}$ 表現、反クォークは $\bar{\mathbf{3}}$ 表現：式 (197),(198)

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (218)$$

メソンのフレーバー波動関数には制限がないので、 $\mathbf{1}$ と $\mathbf{8}$ 両方の状態が可能

- 擬スカラーメソン 8 重項 (図 27 左)

$$|\pi^+\rangle = -|u\bar{d}\rangle, \quad |\pi^0\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle, \quad (219)$$

$$|K^+\rangle = |u\bar{s}\rangle, \quad |K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle, \quad (220)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = -|s\bar{d}\rangle, \quad |K^-\rangle = |s\bar{u}\rangle, \quad (221)$$

$$|\eta_8\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle}{\sqrt{6}} \quad (222)$$

π^+, π^0, π^- : ストレンジネス $S = 0$ 、アイソスピン $I = 1$ (アイソスピン 3 重項)

K^+, K^0 : $S = +1$ 、 $I = 1/2$ (アイソスピン 2 重項)

$\bar{K}^0, K^-$: $S = -1$ 、 $I = 1/2$ (アイソスピン 2 重項)

η_8 : $S = 0$ 、 $I = 0$ (アイソスピン 1 重項)

- 擬スカラーメソン 1 重項 (図 27 右)

$$|\eta_1\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (223)$$

η_1 : $S = 0$ 、 $I = 0$ (アイソスピン 1 重項)

- ベクトルメソン 8 重項

$$|\rho^+\rangle = -|u\bar{d}\rangle, \quad |\rho^0\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\rho^-\rangle = |d\bar{u}\rangle, \quad (224)$$

$$|K^{*+}\rangle = |u\bar{s}\rangle, \quad |K^{*0}\rangle = |d\bar{s}\rangle, \quad (225)$$

$$|\bar{K}^{*0}\rangle = -|s\bar{d}\rangle, \quad |K^{*-}\rangle = |s\bar{u}\rangle, \quad (226)$$

$$|\omega_8\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle}{\sqrt{6}} \quad (227)$$

- ベクトルメソン 1 重項

$$|\omega_1\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} \quad (228)$$

- ベクトルメソンは擬スカラーメソンより重い

クォーク模型ではスピン・スピン相互作用の性質でベクトルメソンが重い

擬スカラーメソンはカイラル対称性 (§13 で少し説明) の南部・ゴールドストーンボソンであり軽い

- 中間子混合** : 物理的な状態が $SU(3)$ の分類の重ね合わせで実現される

- フレーバー $SU(3)$ 対称性の破れ (s クォークが u, d クォークより重い) に起因する混合
強い相互作用による (同じフレーバー量子数の状態の混合)

- CP の固有状態を実現する混合
弱い相互作用による (異なるフレーバー量子数の状態の混合)

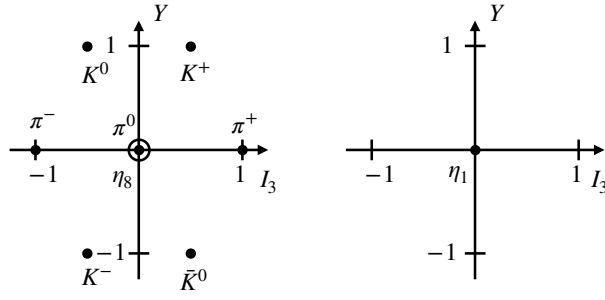


図 27: 擬スカラーメソンのウェイト図。左：8 表現のメソン、右：1 表現のメソン。

- 擬スカラーメソン： $S = 0$ 、 $I = 0$ の η_1 と η_8 が混合し η と η' が実現

$$|\eta\rangle = \cos \theta_P |\eta_8\rangle - \sin \theta_P |\eta_1\rangle, \quad (229)$$

$$|\eta'\rangle = \sin \theta_P |\eta_8\rangle + \cos \theta_P |\eta_1\rangle \quad (230)$$

混合角 θ_P はおよそ $\theta_P \sim -20^\circ$ と見積もられている

- ベクトルメソン： $S = 0$ 、 $I = 0$ の ω_1 と ω_8 が混合し ω と ϕ が実現

$$|\omega\rangle = \cos \theta_V |\omega_8\rangle - \sin \theta_V |\omega_1\rangle, \quad (231)$$

$$|\phi\rangle = \sin \theta_V |\omega_8\rangle + \cos \theta_V |\omega_1\rangle \quad (232)$$

混合角 θ_V は $\sin \theta_V = -\sqrt{2/3}$ 、 $\cos \theta_V = \sqrt{1/3}$ と理想混合に近く、このとき

$$|\omega\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\phi\rangle = |s\bar{s}\rangle \quad (233)$$

$\Rightarrow \phi$ はほぼ s クォーク、 ω はほぼ u, d クォークで構成される

- 電荷中性の K 中間子： K^0 (ストレンジネス $S = +1$)、 $\bar{K}^0$ ($S = -1$)
崩壊で観測される中性 K 中間子

$$K_S^0 \rightarrow 2\pi \quad (\tau \sim 10^{-11} \text{ s}), \quad K_L^0 \rightarrow 3\pi \quad (\tau \sim 10^{-8} \text{ s}) \quad (234)$$

- 中性 K 中間子混合： 2π 状態は $CP = +1$ 、 3π 状態は $CP = -1$ なので、

$$|K_S^0\rangle \approx |K_+^0\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (CP = +1), \quad (235)$$

$$|K_L^0\rangle \approx |K_-^0\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (CP = -1) \quad (236)$$

と対応していれば、 CP の保存により崩壊様式の違いが説明できる

- CP 非保存：クローニン、フィッチ (1980 年ノーベル物理学賞)
小さな確率で $K_L^0 \rightarrow 2\pi$ 崩壊が起きている： CP 対称性は少し破れている

問題 9.1

- 1) ベクトルメソンが理想混合 ($\sin \theta_V = -\sqrt{2/3}$ 、 $\cos \theta_V = \sqrt{1/3}$) であるとき、式 (233) になることを示せ。
- 2) あるメソン $|M\rangle$ の $s\bar{s}$ 成分の割合は $|\langle s\bar{s}|M\rangle|^2$ で与えられる。 $\theta_P = -20^\circ$ の場合に η と η' における $s\bar{s}$ 成分の割合を計算せよ。ただし $\langle s\bar{s}|s\bar{s}\rangle = 1$ で、 $\langle s\bar{s}|u\bar{u}\rangle = \langle s\bar{s}|d\bar{d}\rangle = 0$ である。

9.5 基底状態のバリオン

- クォークのフレーバーは **3** 表現

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \quad (237)$$

バリオンのフレーバー波動関数は対称性の制限から自由に選ぶことができない

- 3 粒子の波動関数の対称性

完全反対称 A ：どの粒子の入れ替えに対しても符号が出る、式 (217)

完全対称 S ：どの粒子の入れ替えに対しても符号が出ない

$$|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, \quad \frac{|rgb\rangle + |brg\rangle + |gbr\rangle + |grb\rangle + |bgr\rangle + |rbg\rangle}{\sqrt{6}}, \quad \dots \quad (238)$$

混合対称 MS ：それ以外

$$|S\rangle \otimes |S\rangle = |S\rangle, \quad |S\rangle \otimes |A\rangle = |A\rangle, \quad |A\rangle \otimes |A\rangle = |S\rangle, \quad \dots \quad (239)$$

- 基底状態のバリオン： $\ell = 0$ は完全対称なので

$$\underbrace{|qqq\rangle}_A = \underbrace{|\phi_{\ell=0}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{3,12})\rangle}_S \otimes \underbrace{|\Psi\rangle}_{MS} \otimes \underbrace{|f\rangle}_{MS} \otimes \underbrace{|c\rangle}_A \quad (240)$$

$\Rightarrow$ スピン・フレーバーの積 $|\Psi\rangle \otimes |f\rangle$ は完全対称 S でなければならない

- 基底状態で可能な組み合わせは

$$|\Psi\rangle \otimes |f\rangle = \begin{cases} \underbrace{|S=1/2\rangle}_{MS} \otimes \underbrace{|\mathbf{8}\rangle}_{MS} \\ \underbrace{|S=3/2\rangle}_S \otimes \underbrace{|\mathbf{10}\rangle}_S \end{cases} \quad (241)$$

基底状態のバリオンは $J^P = 1/2^+$ のバリオン 8 重項と $J^P = 3/2^+$ のバリオン 10 重項

- $J^P = 1/2^+$ バリオン 8 重項 (図 28 左)

$$|p\rangle \sim |uud\rangle, \quad |n\rangle \sim |udd\rangle, \quad (242)$$

$$|\Lambda\rangle \sim |uds\rangle, \quad (243)$$

$$|\Sigma^+\rangle \sim |uus\rangle, \quad |\Sigma^0\rangle \sim |uds\rangle, \quad |\Sigma^-\rangle \sim |dds\rangle, \quad (244)$$

$$|\Xi^0\rangle \sim |ssu\rangle, \quad |\Xi^-\rangle \sim |ssd\rangle \quad (245)$$

- $J^P = 3/2^+$ バリオン 10 重項 (図 28 右)

$$|\Delta^{++}\rangle \sim |uuu\rangle, \quad |\Delta^+\rangle \sim |uud\rangle, \quad |\Delta^0\rangle \sim |udd\rangle, \quad |\Delta^-\rangle \sim |ddd\rangle, \quad (246)$$

$$|\Sigma^{*+}\rangle \sim |uus\rangle, \quad |\Sigma^{*0}\rangle \sim |uds\rangle, \quad |\Sigma^{*-}\rangle \sim |dds\rangle, \quad (247)$$

$$|\Xi^{*0}\rangle \sim |ssu\rangle, \quad |\Xi^{*-}\rangle \sim |ssd\rangle, \quad (248)$$

$$|\Omega^-\rangle \sim |sss\rangle \quad (249)$$

スピンが異なるので Σ^* と Σ の混合などはない

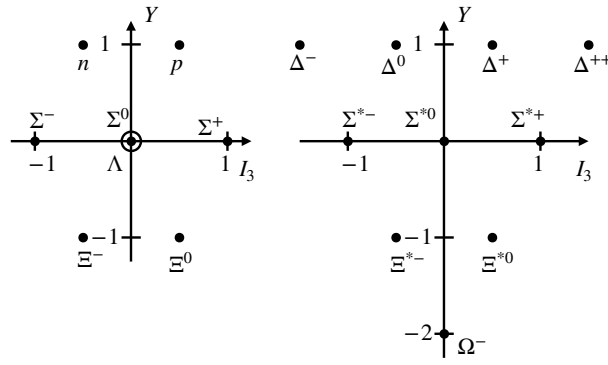


図 28: 基底状態のバリオンのウェイト図。左：バリオン 8 重項、右：バリオン 10 重項。

- バリオン 10 重項のスピンとフレーバーはそれぞれ完全対称

例) $S_3 = +3/2$ の Δ^{++} は

$$|\Psi\rangle \otimes |f\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes |uuu\rangle \quad (250)$$

基底状態で軌道角運動量が 0 であれば空間波動関数も完全対称

フェルミオンの対称性を満たすにはカラー波動関数（完全反対称）が必要

問題 9.2*

1) 以下の粒子について、式 (197) と (198) を利用し、クォーク模型に基づいて Y と I_3 を計算せよ。ただし $\Lambda_c^+ \sim udc$ であり、チャームクォーク c は $Y = 4/3, I_3 = 0$ である。

a) π^0 , b) π^- , c) K^- , d) Σ^+ , e) Δ^{++} , f) Λ_c^+

2) 以下の反応の各ハドロンのクォーク組成を調べ、強い相互作用では反応の前後でフレーバーが変化しないが、弱い相互作用ではフレーバーが変化することを示せ。ただし同じフレーバーのクォークは対生成、対消滅が可能である。

a) $\pi^+ n \rightarrow \pi^0 p$, b) $K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+$ c) $\Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p$ d) $\Lambda_c^+ \rightarrow K^- \pi^+ p$