

3 核力

- **核力**：核子間にはたらく強い力、原子核が自己束縛系を作る起源
- 目標：2 核子系の対称性による分類と核力の性質と特徴を理解

3.1 対称性とアイソスピン

- 核子はスピン 1/2 を持つ $\Rightarrow$ スピン空間での内部自由度 ($\uparrow, \downarrow$) を持つ
- スピン対称性：SU(2) 変換（内部自由度の変換、スピン空間の回転）で物理は不変
対応する保存量：全スピン（スピンベクトルの長さ）とスピンの第 3 成分
- 陽子と中性子は電磁氣的性質以外はほぼ同じ（2.1 節）
 pp 散乱のクーロン力以外の部分と、同じスピン状態の pn 散乱は似ている
鏡映核の性質の違いはほぼクーロン力で説明できる
 $\Rightarrow$ 核力の**荷電独立性**
 $\Rightarrow$ 核子という 1 つの状態が**アイソスピン空間**で異なる内部状態を取ったもの（ハイゼンベルク, 1932）
- 陽子と中性子の質量は ~ 1.3 MeV 異なる $\Rightarrow$ アイソスピンは厳密な対称性ではなく**近似的対称性**

3.1.1 スピンと角運動量の復習

- 一般のスピン 1/2 状態 $|\psi\rangle$ を 2 成分ベクトルで表記（SU(2) の基本表現）

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (40)$$

- スピン演算子 $\mathbf{s}$ （SU(2) の生成子）：パウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いて定義される

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

（歴史的経緯から、 $\mathbf{s}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ 両方を使うので係数に注意）

- s_3 の固有状態：

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

- 昇降演算子 $s^\pm$ と全スピン演算子 $\mathbf{s}^2$ ：

$$s^\pm = s_1 \pm i s_2, \quad \mathbf{s}^2 = \sum_{i=1}^3 s_i^2 \quad (43)$$

- 交換関係

$$[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k \quad (44)$$

ϵ_{ijk} は完全反対称テンソル（ $\epsilon_{123} = 1$ ）で、繰り返し添字（今の場合 k ）について和をとる

- 量子力学の軌道角運動量 L :

- L^2 の固有値 (期待値) : $\ell(\ell+1)$ (ベクトルの長さ)
- L_3 の固有値 (期待値) : $\ell_3 = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$ (離散的な値のみ許される)
- ℓ と ℓ_3 によって状態が指定される

問題 3.1*

パウリ行列による表示を用いて以下を示せ。

- $|\downarrow\rangle$ の s_3 の固有値が $-1/2$ であることを確認せよ。
- $s^+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$ 、 $s^+ |\uparrow\rangle = 0$ を示せ。
- $[s_1, s_2] = i s_3$ であることを確認せよ。
- $|\uparrow\rangle$ が s^2 の固有状態であり、固有値が $3/4$ であることを確認せよ。

3.1.2 スピンの合成

- 2つのスピン $1/2$ 状態を合成した一般の状態 (2つのスピンのテンソル積)

$$|\Psi\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle \quad (45)$$

- 全系のスピン演算子 S : (ベクトルとしての和、 I は恒等演算子)

$$S = s^{(1)} + s^{(2)} = s^{(1)} \otimes I + I \otimes s^{(2)} \quad (46)$$

- S^2 の固有状態はスピン $S = 0$ (**一重項**、 $|\Psi^0\rangle$) とスピン $S = 1$ (**三重項**、 $|\Psi^1, S_3\rangle$) の状態
($1/2 \otimes 1/2$ の既約分解は $0 \oplus 1$)

$$|\Psi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow^{(1)}\rangle \otimes |\downarrow^{(2)}\rangle - |\downarrow^{(1)}\rangle \otimes |\uparrow^{(2)}\rangle), \quad (47)$$

$$|\Psi^1, +\rangle = |\uparrow^{(1)}\rangle \otimes |\uparrow^{(2)}\rangle, \quad (48)$$

$$|\Psi^1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow^{(1)}\rangle \otimes |\downarrow^{(2)}\rangle + |\downarrow^{(1)}\rangle \otimes |\uparrow^{(2)}\rangle), \quad (49)$$

$$|\Psi^1, -\rangle = |\downarrow^{(1)}\rangle \otimes |\downarrow^{(2)}\rangle \quad (50)$$

- 全スピン演算子の固有値

$$S^2 |\Psi^0\rangle = 0(0+1) |\Psi^0\rangle = 0, \quad S^2 |\Psi^1, S_3\rangle = 1(1+1) |\Psi^1, S_3\rangle = 2 |\Psi^1, S_3\rangle \quad (51)$$

- 2つのスピン演算子の内積の固有値

$$\sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} |\Psi^0\rangle = -3 |\Psi^0\rangle, \quad \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} |\Psi^1, S_3\rangle = +1 |\Psi^1, S_3\rangle \quad (52)$$

- スピン交換演算子

$$P_\sigma = \frac{1 + \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)}}{2}, \quad (53)$$

$$P_\sigma |\Psi^0\rangle = -|\Psi^0\rangle, \quad P_\sigma |\Psi^1, S_3\rangle = +|\Psi^1, S_3\rangle \quad (54)$$

これは状態 (1)、(2) の入れ替えに対する対称性を表している
スピン 0 は入れ替えに対して**反対称**、スピン 1 は**対称**

問題 3.2

- 1) $|\Psi^0\rangle$ 、 $|\Psi^1, +\rangle$ の S_3 の固有値がそれぞれ 0、+1であることを示せ。
- 2) 式 (51) と、 $(s^{(1)} + s^{(2)})^2$ を展開し $(s^{(1)})^2$ 、 $(s^{(2)})^2$ の固有値が 3/4であることを用いて式 (52) を導出せよ。

3.1.3 アイソスピン

- アイソスピン：スピンと同様の内部自由度を考える
原子核物理では慣習として T で表記するが、ハドロン物理では I を用いる
- 一般のアイソスピン 1/2 状態 $|\chi\rangle$ を 2 成分ベクトルで表記
アイソスピン演算子 $\mathbf{t}$ はパウリ行列 $\boldsymbol{\tau}$ を用いて定義される 2×2 行列

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \quad (55)$$

- 核子の波動関数はスピン波動関数 $|\psi\rangle$ とアイソスピン波動関数 $|\chi\rangle$ のテンソル積 $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$
 $\boldsymbol{\tau}$ は $\boldsymbol{\sigma}$ と行列としては同じだが $\boldsymbol{\tau}$ は $|\chi\rangle$ にのみ作用し $|\psi\rangle$ に作用しない
- t_3 の固有状態（原子核物理では p を下向きにとることも多い）：

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

- 2つのアイソスピン 1/2 の合成もスピンと同様に行い、全アイソスピン演算子 $\mathbf{T}^2$ の固有状態（固有値は $T(T+1)$ ）としてアイソスピン $T=0$ （**一重項**、 $|\chi^0\rangle$ ）とアイソスピン $T=1$ （**三重項**、 $|\chi^1, T_3\rangle$ ）の状態が構成される

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{t}^{(2)}, \quad (57)$$

$$\mathbf{T}^2 |\chi^0\rangle = 0, \quad \mathbf{T}^2 |\chi^1, T_3\rangle = 2 |\chi^1, T_3\rangle \quad (58)$$

$|\chi^1, +1\rangle$ は pp 、 $|\chi^1, -1\rangle$ は nn 、 $|\chi^1, 0\rangle$ と $|\chi^0\rangle$ は p と n をそれぞれ対称、反対称に組んだもの

- アイソスピン交換演算子

$$P_{\tau} = \frac{1 + \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}}{2}, \quad (59)$$

$$P_{\tau} |\chi^0\rangle = -|\chi^0\rangle, \quad P_{\tau} |\chi^1, T_3\rangle = +|\chi^1, T_3\rangle \quad (60)$$

これは状態 (1)、(2) の入れ替えに対する対称性を表している

アイソスピン 0 は入れ替えに対して**反対称**、アイソスピン 1 は**対称**

3.1.4 2 核子状態の対称性

- 2 核子状態の波動関数：

$$|NN\rangle = |\phi_{\ell}(\mathbf{r})\rangle \otimes |\Psi\rangle \otimes |\chi\rangle, \quad (61)$$

$$|\phi_{\ell}(\mathbf{r})\rangle : \text{相対座標の空間波動関数：軌道角運動量 } \ell \text{ で指定}, \quad (62)$$

$$|\Psi\rangle : \text{2 核子のスピン波動関数：} S=0 \text{ または } S=1, \quad (63)$$

$$|\chi\rangle : \text{2 核子のアイソスピン波動関数：} T=0 \text{ または } T=1 \quad (64)$$

- 空間座標交換演算子 P_r ：核子を交換すると相対座標は $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ となる
軌道角運動量 ℓ の状態に対して球面調和関数の性質 $Y_\ell^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \phi)$ より

$$P_r \phi_\ell(\mathbf{r}) = \phi_\ell(-\mathbf{r}) = (-1)^\ell \phi_\ell(\mathbf{r}) \quad (65)$$

つまり ℓ が偶数のとき空間波動関数は**対称**（パリティ $P = +$ ）、奇数のとき**反対称**（ $P = -$ ）

- 核子はフェルミオン：粒子の交換（全ての自由度の入れ替え）に対して全波動関数は**反対称**

$$P_r P_\sigma P_\tau |NN\rangle = -|NN\rangle \quad (66)$$

この条件を満たす状態（表3）：軌道角運動量 ℓ とスピン S を決めればアイソスピンは自動的に指定される

- 全角運動量：スピンと軌道角運動量の自由度があるので、保存量は全角運動量 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ （図10）
 $\mathbf{J}^2$ の固有値は $J(J+1)$

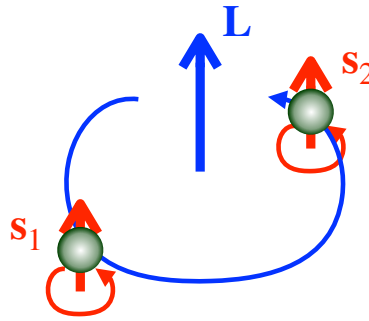


図 10: 2 核子系の角運動量。全スピンは $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ 、全角運動量は $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{L} + \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ 。

- 分光学的記法：軌道角運動量 $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ を S, P, D, F, $\dots$ と記述し状態を以下のように表記

$$^{2S+1}\ell_J \quad (67)$$

例) $\ell = 0$ の状態は 1S_0 と 3S_1

表 3: 2 核子状態の対称性による分類と演算子の期待値。

軌道角運動量	パリティ	スピン	アイソスピン	$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$	$\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}$
$\ell = \text{偶数 (対称)}$	$P = +$	$S = 0$ (反対称)	$T = 1$ (対称)	-3	+1
		$S = 1$ (対称)	$T = 0$ (反対称)	+1	-3
$\ell = \text{奇数 (反対称)}$	$P = -$	$S = 0$ (反対称)	$T = 0$ (反対称)	-3	-3
		$S = 1$ (対称)	$T = 1$ (対称)	+1	+1

問題 3.3

- D 状態 ($\ell = 2$ 、スピンは $S = 0$ または 1) で取りうる全角運動量 J の値を考え、可能な状態を分光学的記法で挙げよ。
- 非中心力があると ℓ が保存せず、全角運動量 J のみが保存する。このとき $\ell = 0$ の状態 (1S_0 または 3S_1) と混合できる状態（保存量子数 J, P が同じ状態）はどれか、それぞれ答えよ。

3.2 重陽子

- **重陽子** (deuteron)：陽子と中性子の束縛状態、最も単純な原子核、 ${}^2\text{H}$ または d と表記
- **アイソスピン**： $T = 0$
 ← 2 核子系で唯一の束縛状態であり、 nn 、 pp は束縛しない
- 軌道角運動量： $\ell = \text{偶数}$ (主に S 状態 $\ell = 0$)
- スピン： $S = 1$ (対称性より)
- 結合エネルギー：

$$B \simeq 2.225 \text{ MeV} \quad (68)$$

- 通常の原子核より B/A が小さい、つまり核子間の距離は大きめ
- 真空中の中性子は β 崩壊するが、重陽子中の中性子は結合エネルギーが陽子・中性子質量差より大きいので崩壊しない (5 章でもう少し詳しく)

- 磁気能率：

$$\mu_d \simeq 0.8574\mu_N \quad (69)$$

ここで $\mu_N = e/(2m_p)$ は核磁子 (nuclear magneton)

この値は、陽子と中性子の磁気能率の単純な和に近い：

$$\mu_p + \mu_n \simeq (2.7928 - 1.9130)\mu_N = 0.8798\mu_N \quad (70)$$

これは軌道角運動量 $\ell = 0$ (軌道からの磁気能率の寄与がない) およびスピン $S = 1$ (p と n のスピンの揃っているので磁気能率が単純な和になる) と矛盾がない
 ずれは D 状態との混合 (5% 程度) で説明される

- 波動関数：相互作用ポテンシャルが 0 になる領域の S 波 ($\ell = 0$) の束縛状態の波動関数は

$$\phi_0(r) = C \frac{\exp\{-\kappa r\}}{r}, \quad \kappa = \sqrt{2\mu B} \quad (71)$$

B は結合エネルギー、 $\mu = m_p m_n / (m_p + m_n)$ は換算質量、 C は規格化定数

- 大きさ：ポテンシャルの到達距離が十分小さいと考え、全空間の波動関数を $\phi_0(r)$ で近似
 波動関数が中心 $r = 0$ の $1/e$ になる距離 $r = R_0$ を束縛状態の大きさと定義すれば

$$R_0 = \frac{1}{\kappa} \sim 4.31 \text{ fm} \quad (72)$$

問題 3.4

- 1) 空間 3 次元でポテンシャルが 0、角運動量 $\ell = 0$ のシュレディンガー方程式は

$$-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi_0(r)] = E[r\phi_0(r)]$$

となる。式 (71) が $E = -B$ としたこの方程式を満たすことを示せ。

- 2) 全空間の波動関数が $\phi_0(r)$ である場合、波動関数の規格化 $\int d^3r |\phi_0(r)|^2 = 1$ を用いて定数 C を決定せよ。

- 3) 平均 2 乗半径は $\langle r^2 \rangle = \int d^3r r^2 |\phi_0(r)|^2$ で与えられる。これを計算し、 $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = R_0/\sqrt{2}$ となることを示せ。

3.3 核力の特徴

- 強い力：クーロン斥力に打ち勝って原子核を構成する
距離 2 fm でのクーロン力の約 50 倍の強さ

- **短距離力**： π 中間子交換

π 中間子の質量が有限であるため相互作用の到達距離が有限になる
質量 m の粒子の**コンプトン波長**（質量 m に対応する長さスケール）

$$d = \frac{\hbar}{mc} = \frac{1}{m} \quad (\text{自然単位系}) \quad (73)$$

クーロン力：質量 $m = 0$ の光子の交換

$m \rightarrow 0$ で到達距離は無限大（長距離力）

- **湯川ポテンシャル**： π 中間子交換のファインマン図（図 11）より（ m は π の質量、4 元運動量 q_μ は運動量移行、 D は定数）

$$V = -D \frac{1}{q^2 - m^2} = -D \frac{1}{q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2} \quad (74)$$

静的近似（ $q_0 \rightarrow 0$ 、核子の質量が大きくエネルギーが変化しない）

$$V(\mathbf{q}) = D \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} \quad (75)$$

フーリエ変換すると湯川ポテンシャル（問題 2.3 2）の逆変換）

$$V(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = D \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \quad (76)$$

$r \gtrsim 1/m$ の領域は指数関数的に強度が抑制される（上述の到達距離）

$m \rightarrow 0$ でクーロンポテンシャルになる

- π 中間子は最も軽いハドロン（§7、§13 参照）

→ π 交換は核力の中で最も長距離の引力相互作用を与える

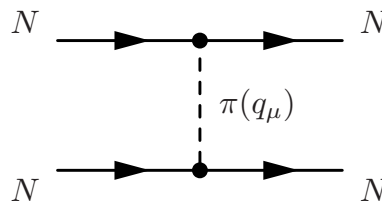


図 11: 核力の π 中間子交換のファインマン図。4 元運動量 q_μ は π 中間子が運ぶ運動量移行。

問題 3.5

式 (76) のフーリエ変換を計算せよ。

- **斥力芯**：ごく短距離（ ~ 0.5 fm 以下）では核力は強い斥力になる

位相差 δ は正が引力、負が斥力、低エネルギーが長距離、高エネルギーが短距離

図 12 左では低エネルギーで引力の位相差が $E_{\text{lab}} \simeq 250$ MeV で斥力に変化する

斥力芯のために核子が近寄りすぎないことは密度の飽和性の原因の一つである

- **中心力**：核力の主成分、相対距離のみに依存
スピン、アイソスピン依存性を考慮した一般形は

$$V_C(r) = V_c(r) + (\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)})V_\tau(r) + (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)})V_\sigma(r) + (\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)})(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)})V_{\sigma\tau}(r) \quad (77)$$

2 核子状態 (67) を指定して表 3 の期待値を取れば V_C は V_c 、 V_τ 、 V_σ 、 $V_{\sigma\tau}$ の線形結合になる
代表的な 1S_0 状態の核力ポテンシャルを図 12 右に示す (短距離で斥力芯)

- **テンソル力**：非中心力 (相対距離だけでなくスピンと角度に依存する)
 π 中間子交換から出てくる

$$V_T(r) = V_T(r) \left\{ 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \right\} \quad (78)$$

非中心力があると軌道角運動量 ℓ はよい量子数ではなくなり、全角運動量 J のみが保存

- **スピン軌道力**：非静的力 (相対距離だけでなく速度に依存する)

$$V_{LS}(r) = V_{LS}(r)(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) \quad (79)$$

$\mathbf{L}$ は 2 核子間の軌道角運動量演算子、 $\mathbf{S}$ は全スピン演算子

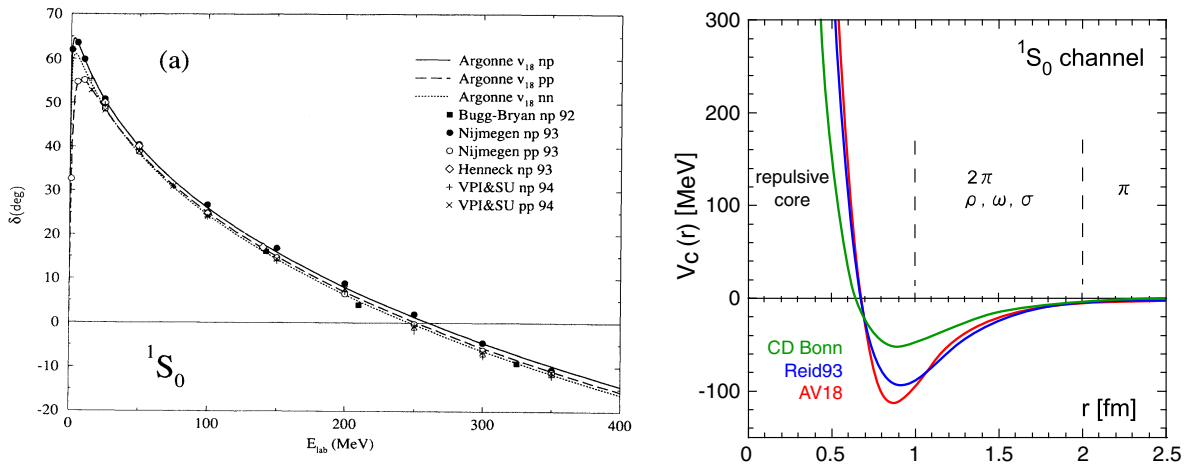


図 12: 左： 1S_0 チャンネルの核力の位相差、R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995) より引用。右：代表的な 1S_0 状態の核力ポテンシャル、N. Ishii, S. Aoki, T. Hatsuda, Phys. Rev. Lett. **99**, 022001 (2007) より引用。

問題 3.6

- 1) π 中間子の質量を 140 MeV として (73) の到達距離を求めよ。 $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$ とする。
- 2) 実験室系のエネルギー E_{lab} と非相対論的な重心系のエネルギー E との関係は $E_{\text{lab}} = (E^2 + 4EM_N)/(2M_N)$ である。核子の質量を $m_p = m_n = M_N = 940 \text{ MeV}$ として $E_{\text{lab}} = 250 \text{ MeV}$ を非相対論的な運動量 $k = \sqrt{2\mu E}$ に変換し (μ は換算質量)、運動量の逆数の長さが斥力芯のあらわれるスケールであることを確認せよ。
- 3) 1S_0 状態、 3S_1 状態での中心力 (77) をそれぞれ V_c 、 V_τ 、 V_σ 、 $V_{\sigma\tau}$ の線形結合で表せ。