

8.2 回転変換と群

- 3次元空間の回転変換

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = R\mathbf{r}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (172)$$

のとき、ベクトル $\mathbf{r}$ の長さは変化しない $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'|$ 、より一般に (t は転置)

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_1^t \mathbf{r}_2 = (\mathbf{r}_1')^t \mathbf{r}_2' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \quad (173)$$

⇒ 回転変換はベクトルの内積を不変に保つ

- R は内積を保存する 3×3 行列、つまり直交行列 (orthogonal matrix) で表される

$$R^t R = I \quad \Leftrightarrow \quad R^t = R^{-1} \quad (174)$$

- 回転変換は群 (group) という数学的構造に対応する
- 群の定義：積の演算が定義された集合 $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ で以下の性質を満たすもの
(注：“積” という用語を使うが、いつでも通常の掛け算とは限らない)

- 積の演算で閉じる (積の結果が群の要素になる) : $g_1 g_2 \in G$
- 結合則を満たす : $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
- 単位元 e が存在 : 任意の g に対し $ge = eg = g$
- 逆元 g^{-1} が存在 : $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

回転変換の場合は群の積は通常の行列の意味での積と同じ (右から順に回転)

回転変換の単位元は単位行列 ($\theta = 0$ の回転)、逆元は $\theta \rightarrow -\theta$ とした行列 (逆向きの回転)

- 全ての方向・角度の回転変換全体 $\{R\}$ は $SO(3)$ という群を作る
- $SO(3)$ の行列 R は3個のパラメータ θ^a と生成子 T^a で書ける

$$R = \exp\{-i\theta^a T^a\} \quad (a = 1, 2, 3), \quad (175)$$

$$T^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (176)$$

ただし行列の指数関数はベキ展開で定義されている

$$\exp\{X\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \dots \quad (177)$$

$\theta^a \ll 1$ のとき $R = 1 - i\theta^a T^a$ となるので、生成子は無限小変換の行列を表す

問題 8.2

- 1) 式 (172) の回転行列 R が直交行列であること、つまり式 (174) を満たすことを確認せよ。
- 2) 式 (174) を満たす直交行列がベクトルの内積を保存すること、つまり式 (173) を満たすことを確認せよ。
- 3) 2つの直交行列の積 (例えば $R_1 R_2$) が直交行列であることを確認せよ。
- 4) 式 (176) の T^3 を使った $\exp\{-i\theta T^3\}$ が式 (172) の行列 R になることを示せ。

- 3次元回転変換に対する質量 m (スカラー) と位置 $\mathbf{r}$ (ベクトル) の変換性

$$m \rightarrow m, \quad (178)$$

$$\mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r}, \quad r_i \rightarrow R_{ij}r_j \quad (179)$$

全てのスカラー量 (電荷など) は式 (178) で変換

全てのベクトル量 (運動量、電場など) は式 (179) で変換

- 一般の物理量はテンソル $T_{ij\dots l}$ で表される

n 階 テンソル :

$$\underbrace{T_{ij\dots l}}_{n \text{ 個の添字}} \rightarrow \underbrace{R_{ii'}R_{jj'}\cdots R_{ll'}}_{n \text{ 個の } R \text{ 行列}} T_{i'j'\dots l'} \quad (180)$$

慣性モーメント、応力などは2階テンソル

スカラーは0階テンソル、ベクトルは1階テンソル

- 群の表現 (representation) : 対称性変換に対する変換性の分類
 - スカラー、ベクトル、 n 階テンソルなど
- 量子系の固有状態は対称性の**既約表現** (irreducible representation) で分類される
- 同じ規約表現に属する状態は対称性変換で移り変わる $\Rightarrow$ エネルギーが縮退 : **多重項** (multiplet)
 - 角運動量 $\ell = 0 : 1$ 重項 (スカラー)、 $\ell = 1 : 3$ 重項 (ベクトル) など
- **表現の合成** : 2つの表現から別の表現を作る
 - ベクトルの内積 $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = r_i s_j \delta_{ij}$: 2つのベクトル $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ からスカラーを作る
 - ベクトルの外積 $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})_k = r_i s_j \epsilon_{ijk}$: 2つのベクトル $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ からベクトルを作る
 - 角運動量の合成 : $\ell = 1$ と $\ell = 1$ の合成から $\ell = 0, 1, 2$ ができる

8.3 ユニタリー群

8.3.1 SU(2) 群

- 回転行列 R は実ベクトル $\mathbf{r}$ (成分が実数) に対する変換
- 2成分**複素ベクトル**

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C} \quad (181)$$

に対し、複素数を成分にもつ 2×2 行列

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad U_{ij} \in \mathbb{C} \quad (182)$$

をかけると、新たな2成分複素ベクトル $\mathbf{a}'$ になる : U は $\mathbf{a}$ に対する変換

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}' = U\mathbf{a} \quad (183)$$

- U が行列式が 1 のユニタリー行列

$$U^\dagger U = I, \quad \det U = 1 \quad (184)$$

の場合 († は転置複素共役)、複素ベクトルの内積が保存

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}'_1)^\dagger \mathbf{a}'_2 = (\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2) \quad (185)$$

つまり式 (184) を満たす U は複素ベクトルの “回転”

- 行列式が 1 の 2×2 ユニタリー行列全体 $\{U\}$ は $SU(2)$ という群を作る
- $SU(2)$ の行列 U は 3 個のパラメーター θ^a と生成子 T^a で書ける

$$U = \exp\{-i\theta^a T^a\} \quad (a = 1, 2, 3) \quad (186)$$

T^a はパウリ行列 σ^a (トレースが 0 の 2×2 エルミート行列) で書ける

$$(T^a)_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma^a)_{ij} \quad (a = 1, 2, 3, \quad i, j = 1, 2), \quad (187)$$

$$T^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (188)$$

T^3 のみ対角的

- $SU(2)$ はクォーク、ハドロンのスピンおよびアイソスピンを表現する際に用いられる
 T^3 はスピンの第 3 成分を測る演算子、 T^2 はスピンの大きさを測る演算子、など

問題 8.3

- 1) 式 (184) を満たす行列 U がベクトルの内積を保存すること、つまり式 (185) を満たすことを確認せよ。
- 2) 2 つのユニタリー行列の積 (例えば $U_1 U_2$) がユニタリー行列であることを確認せよ。
- 3) 2 つの行列式が 1 の行列の積 (例えば $U_1 U_2$) の行列式が 1 であることを確認せよ。
- 4) 行列 U_0 を実数 $\theta \neq n\pi$ (n は整数) を用いて

$$U_0 = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (189)$$

と定義するとき、 U_0 はユニタリー行列であるが行列式が 1 でないことを示せ。

8.3.2 $SU(3)$ 群

- 3 成分複素ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C} \quad (190)$$

に対し、複素数を成分にもつ 3×3 行列

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}, \quad U_{ij} \in \mathbb{C} \quad (191)$$

をかけると、新たな 3 成分複素ベクトル $\mathbf{a}'$ になる： U は $\mathbf{a}$ に対する変換

- 式 (184) を満たす 3×3 ユニタリー行列 U は複素ベクトルの内積を保存：“回転”
- 行列式が 1 の 3×3 ユニタリー行列全体 $\{U\}$ は $SU(3)$ という群を作る
- $SU(3)$ の行列 U は 8 個のパラメーター θ^a と生成子 T^a で書ける

$$U = \exp\{-i\theta^a T^a\} \quad (a = 1, \dots, 8) \quad (192)$$

T^a はゲルマン行列 λ^a (トレースが 0 の 3×3 エルミート行列) で書ける

$$(T^a)_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda^a)_{ij} \quad (a = 1, \dots, 8, \quad i, j = 1, 2, 3), \quad (193)$$

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (194)$$

T^3 と T^8 のみ対角的

- $SU(3)$ はクォークのカラーやフレーバーを表現する際に用いられる

8.3.3 $SU(2)$ の表現と合成

- $SU(2)$ の表現：スピン (アイソスピン) の大きさ S または多重度で多重項を分類
 - $\{S = 0(1 \text{ 重項}), S = 1/2(2 \text{ 重項}), S = 1(3 \text{ 重項}), \dots\}$
 - 群論の記法では $\{1, 2, 3, \dots\}$
 - **2 表現** ($S = 1/2$): **基本表現** (式 (184) を満たす 2×2 行列 U で変換される)
 - **1 表現** ($S = 0$): **恒等表現** (スカラーのように変化しないもの)
 - **3 表現** ($S = 1$): **随伴表現**

- 多重項内の状態の指定：スピンの第 3 成分 S_3
 $|S, S_3\rangle$ のように表現すると、 $S = 1/2$ 状態は

$$|\uparrow\rangle = |1/2, 1/2\rangle, \quad |\downarrow\rangle = |1/2, -1/2\rangle \quad (195)$$

$SU(2)$ 変換 (スピン空間の回転) を行うことで $|\uparrow\rangle$ は $|\downarrow\rangle$ に変換できる

- **ウェイト図**: S_3 の値の数直線上に表したもの (図 24 左: スピン $1/2$ 、図 24 右: アイソスピン $1/2$)
- $SU(2)$ の表現 2 つの合成: $S = 1/2$ を 2 つ合成して $S = 0$ と $S = 1$ ができる (3.1.2 節)

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \quad (SU(2) \text{ の場合}) \quad (196)$$

表現のテンソル積の既約分解と呼ばれる

左辺: 2 つの 2 重項を組み合わせる

右辺: 1 重項と 3 重項が得られる

基本表現と基本表現の積から恒等表現と随伴表現ができる

群の表現を通常の数、左辺が掛け算、右辺を足し算とみなせば、通常の計算法則が成り立っている

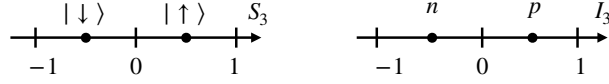


図 24: SU(2) の規約表現のウェイト図の例。左：スピン $S = 1/2$ の 2 重項、右：アイソスピン $I = 1/2$ の 2 重項。

問題 8.4*

- 1) 以下 SU(2) の表現の合成を考える。 $\mathbf{1} \otimes \mathbf{2}$ を計算せよ ($S = 0$ と $S = 1/2$ の合成)。
- 2) $\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}$ を計算せよ ($S = 1$ と $S = 1/2$ の合成)。
- 3) $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ を計算せよ (3 つの $S = 1/2$ の合成)。

8.3.4 SU(3) の表現と合成

- SU(3) の表現：多重度で分類
 - $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{6}, \bar{\mathbf{6}}, \mathbf{8}, \dots\}$
 - $\mathbf{3}$ 表現：基本表現 (式 (184) を満たす 3×3 行列 U で変換される)
 - $\bar{\mathbf{3}}$ 表現：共役表現 ($U^\dagger$ で変換される)
 - $\mathbf{1}$ 表現：恒等表現 (スカラーのように変化しないもの)
 - $\mathbf{8}$ 表現：随伴表現
- 群の階数 (rank)：同次対角化可能な生成子の数
 SU(2) の場合は式 (188) より階数 1 (T^3 のみ対角的)
 SU(3) の場合は式 (194) より階数 2 (T^3 と T^8 のみ対角的)
- 階数の数だけ物理量が同時に指定できる：ウェイト図の次元 (軸の数) に対応
 アイソスピン SU(2) の場合は I_3 軸 1 つ (図 24 右)
 フレーバー SU(3) の場合は I_3 とハイパーチャージ Y の軸 2 つ (図 25)
- SU(3) 多重項内の状態の指定： I_3 とハイパーチャージ Y (図 25)
 $|\mathbf{R}, I_3, Y\rangle$ のように表現すると、 $\mathbf{3}$ 表現は

$$|u\rangle = |\mathbf{3}, 1/2, 1/3\rangle, \quad |d\rangle = |\mathbf{3}, -1/2, 1/3\rangle, \quad |s\rangle = |\mathbf{3}, 0, -2/3\rangle \quad (197)$$

$\bar{\mathbf{3}}$ 表現は

$$|\bar{u}\rangle = |\bar{\mathbf{3}}, -1/2, -1/3\rangle, \quad |\bar{d}\rangle = -|\bar{\mathbf{3}}, 1/2, -1/3\rangle, \quad |\bar{s}\rangle = |\bar{\mathbf{3}}, 0, 2/3\rangle \quad (198)$$

($|\bar{d}\rangle$ に負符号がつくのは SU(2) の基本表現の共役から $\bar{d}$ と $\bar{u}$ でアイソスピン 2 重項を作るためである。また、 $\bar{u}$ に符号をつける定義もあることに注意)

- $\mathbf{3}$ と $\bar{\mathbf{3}}$ は異なるウェイト図 (異なる I_3, Y の組み合わせ)：異なる表現
 SU(2) の場合のみ特殊で、共役表現が基本表現と一致する
- SU(2) の $\mathbf{3}$ (スピン 1) と SU(3) の $\mathbf{3}$ (3 重項) は異なる表現

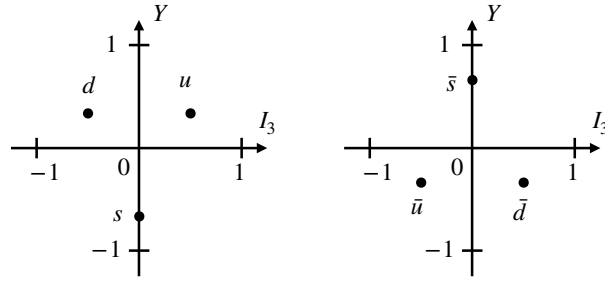


図 25: フレーバー SU(3) の規約表現のウェイト図の例。左： $\mathbf{3}$ 表現のクォーク、右： $\bar{\mathbf{3}}$ 表現の反クォーク。

- SU(3) の表現 2 つの合成

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (199)$$

基本表現と共役表現の積から恒等表現と随伴表現ができる

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \quad (200)$$

$\mathbf{3}$ と $\bar{\mathbf{3}}$ が別の表現であるため、結果が式 (199) と異なる

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = (\bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}) \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \quad (201)$$

クォークからバリオンを作る際に使う

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27} \quad (202)$$

- 一般の表現の合成はヤング図を用いて計算できる

$$\mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \bar{\mathbf{3}} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{1} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8},$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$$