量子論の世界の導入

兵藤 哲雄

東京都立大学原子核ハドロン物理研究室

2024, Oct. 2nd

目次

- 導入
  - 量子力学とは？
  - この授業（量子力学パート）の目標
- 二重スリット実験
  - 状態の重ね合わせ
- 量子力学の原理
  - 波動関数
- まとめと今後の計画

ミクロな世界

量子力学 = ミクロな世界の物理法則

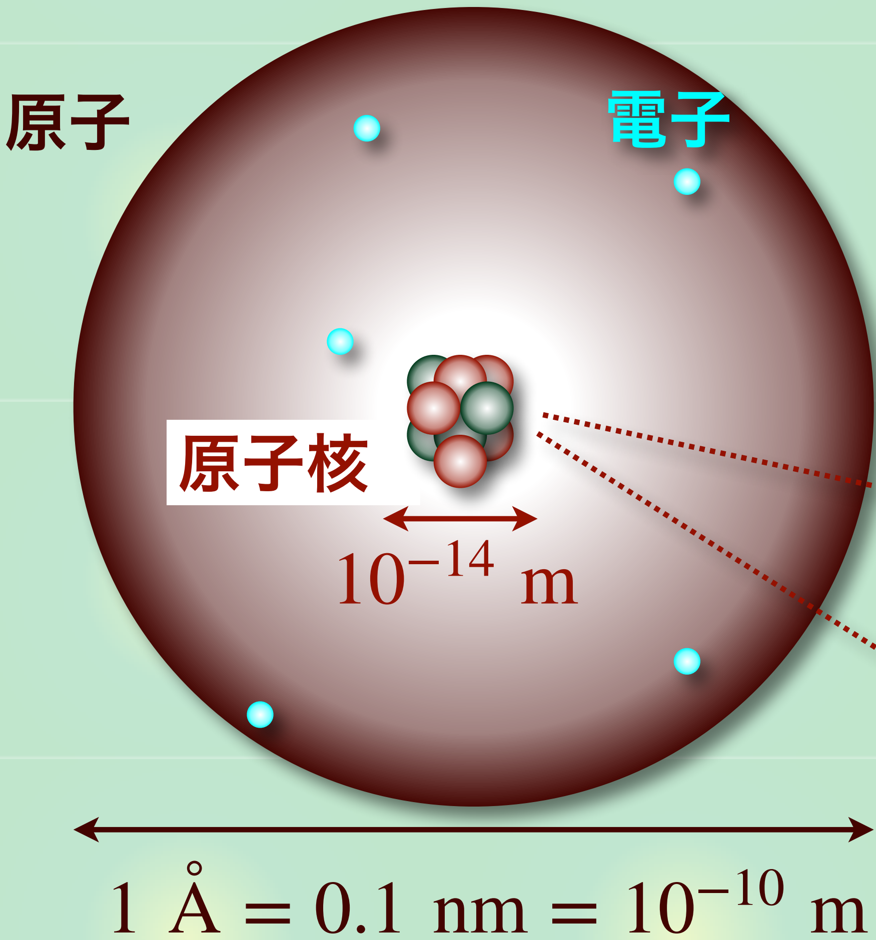
マイクロ $\mu = 10^{-6}$

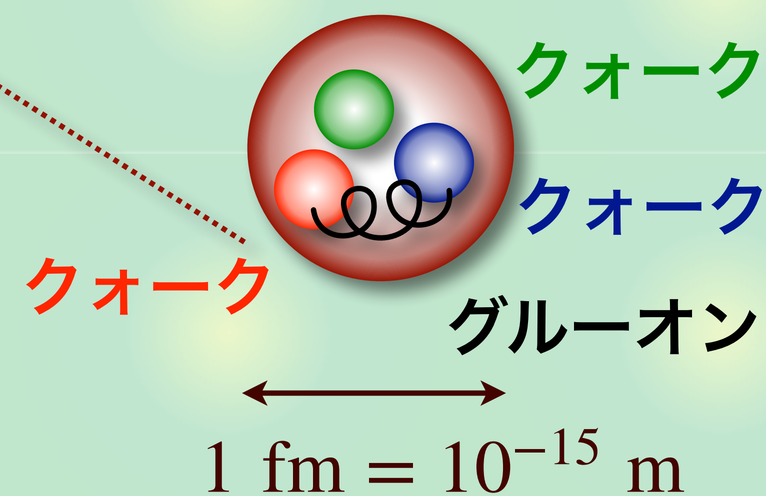
ナノ $\mathrm{n} = 10^{-9}$

ピコ $\mathrm{p} = 10^{-12}$

フェムト $\mathrm{f} = 10^{-15}$

アト $\mathrm{a} = 10^{-18}$

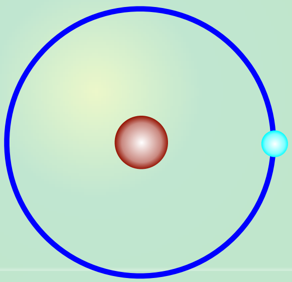




古典力学の破綻

1900年前後：古典力学（マクロな世界の物理法則）の破綻

- 例）ラザフォード模型による水素原子



正電荷の陽子のまわりを負電荷の電子が円運動

- 問題点1：初期条件により任意の半径の円運動が可能
    - 観測される原子の大きさは決まった値?
    - 観測されるエネルギーは離散的な値?
- 問題点2：等速円運動は加速度運動（向心加速度）
    - 加速度運動する荷電粒子は電磁波を放出する —> 不安定?

量子力学の成立

1913年：ボーアの原子模型

- 量子化条件によりラザフォード模型の問題を解決

(1922年)

https://www.nobelprize.org

1925年：ハイゼンベルクの行列力学

(1932年)

—> 第３回で詳しく

1926年：シュレディンガー方程式

(1933年)

—> 第４回で詳しく

両者の等価性：フォンノイマン（1932年）

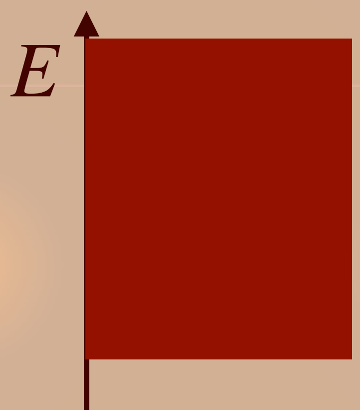
「量子」とは？

ミクロな世界とマクロな世界は物理法則が異なる

マクロな世界

古典力学

ニュートンの運動方程式

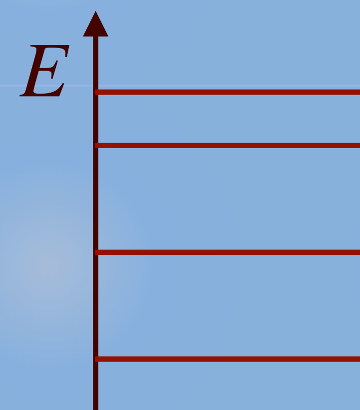


ボールのエネルギー（連続）

ミクロな世界

量子力学

シュレディンガー方程式



原子のエネルギー（離散）

量子力学：Quantum mechanics

- エネルギーなどが**離散的な（とびとびの）値**をとる力学

この授業の目標1

一般向け量子力学：不思議な学問...

- 電子や光は粒子でありかつ波動でもある？
- 生きている猫と死んでいる猫の重ね合わせ？
- 多世界解釈：世界が分裂する？

物理学科の量子力学：数学による記述（計算、計算、計算...）

1.1 波動関数の性質

空間1次元の量子力学：**波動関数**が系の状態を表す。

$$\psi(x,t) \in \mathbb{C} \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}$：粒子の位置座標、$t \in \mathbb{R}$：時間
$|\psi(x,t)|^2$ は時刻 t に座標 x に粒子が存在する確率密度
演算子：波動関数に作用して別の波動関数にする。$\hat{O}$ が演算子のとき、$\hat{O}\psi(x,t)$ も波動関数。
座標 x と運動量 p の演算子（座標表示）と交換関係

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \tag{2}$$

兵藤哲雄, 量子力学II第1回講義ノート

—> 目標1：2つの間のギャップを埋める（いくつか天下り）

量子力学はそれほど不思議ではない

量子力学の「不思議さ」の主な原因

- ミクロな世界はマクロな世界とそもそも物理法則が異なる
- ルールが異なる現象を類推（たとえ話）で説明するのは無理

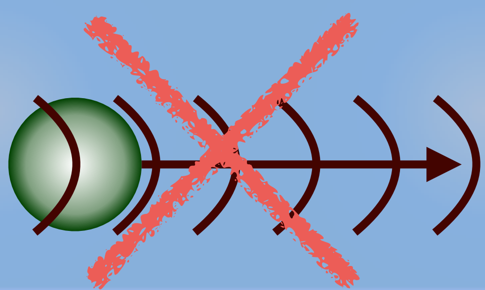
マクロな世界

粒子（particle）

波動（wave）

ミクロな世界

電子



“wavicle”

どこかで「そういうもの」と割り切ることが必要

数学と直感的理解

数学による記述　物理セミナー第２回〜第４回、量子力学I,II

⭕ 誰がやっても同じ結果が得られ、現象を予言できる

⭕ 直感に反する現象も説明できる

❌「分かった」感じがしない

直感的な理解（イメージ、たとえ話）　物理セミナー第１回

⭕ 物理的な描像が得られる

⭕ 計算する前に結果を予想できる

❌ 必ずしも正しくない（それだけでは研究にならない）

どちらも重要：直感的イメージを持ちつつちゃんと計算する

物理学の中での位置付け

様々な研究

電磁気学

電磁気学I、II

量子力学

量子力学I、II、III

熱・統計力学

熱力学、統計力学I、II

多数の粒子

電気、磁気

ミクロ

古典力学

力学I、II、解析力学

様々な研究の基礎、古典力学の知識（計算）は前提

この授業の目標2,3

目標2：量子力学特有の概念の紹介

- 研究紹介では量子力学特有の概念が頻出
- スピン、ボソン、フェルミオン…

—> 物理的描像を紹介（厳密な話は量子力学の授業で）

目標3：物理数学の応用の紹介

- 線形代数、微分方程式…
- 何に使う？

—> 量子力学の具体的な計算を紹介

物理セミナー後半、量子力学の授業への橋渡し

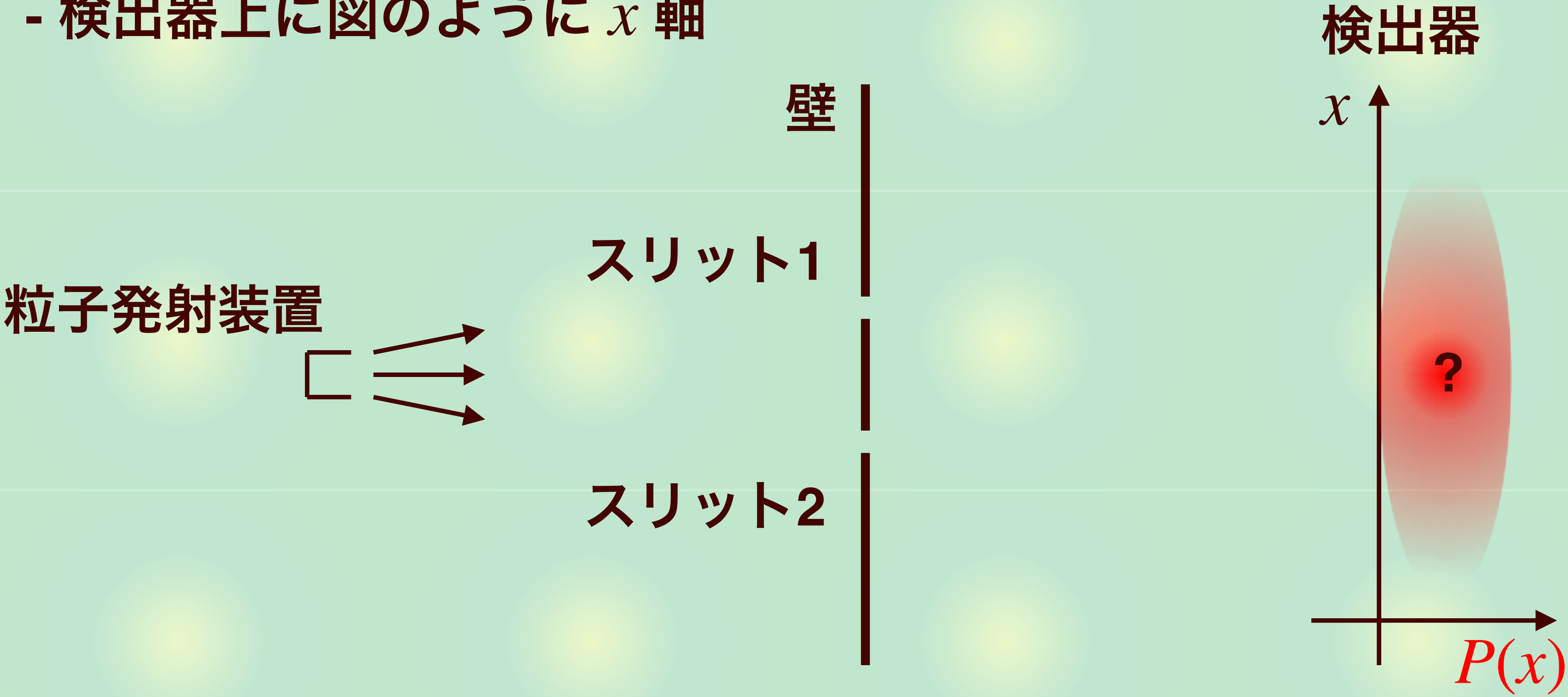
目次

問題設定

スリット1,2の空いた壁と粒子の発射装置

- 壁の奥に検出器：届いた粒子の位置を記録

- 検出器上に図のように x 軸

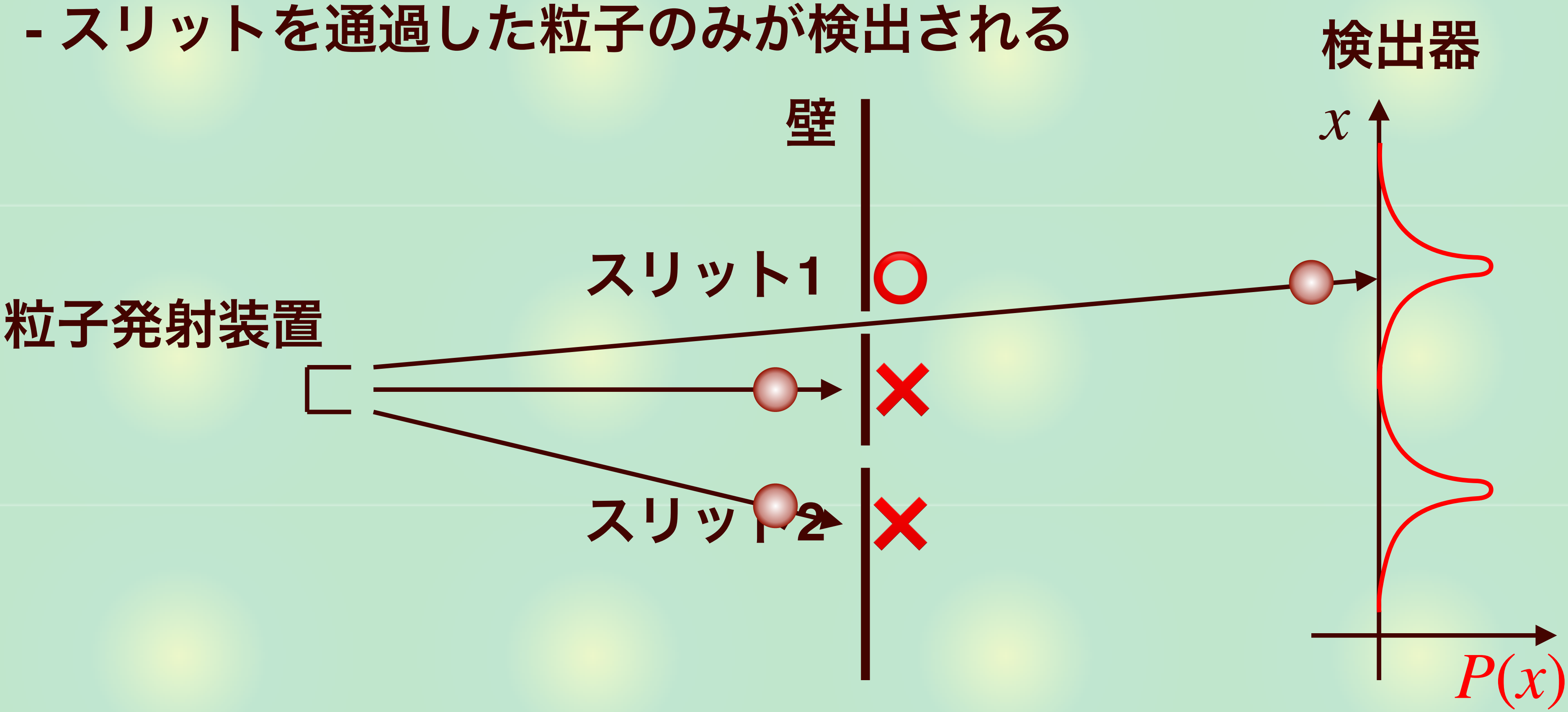


多数の実験 —> 位置 x での**検出確率の分布**：$P(x)$

古典粒子

古典力学的な**粒子**（スリットより小さいボールなど）

- 粒子を1つずつランダムな方向に発射する
- スリットを通過した粒子のみが検出される

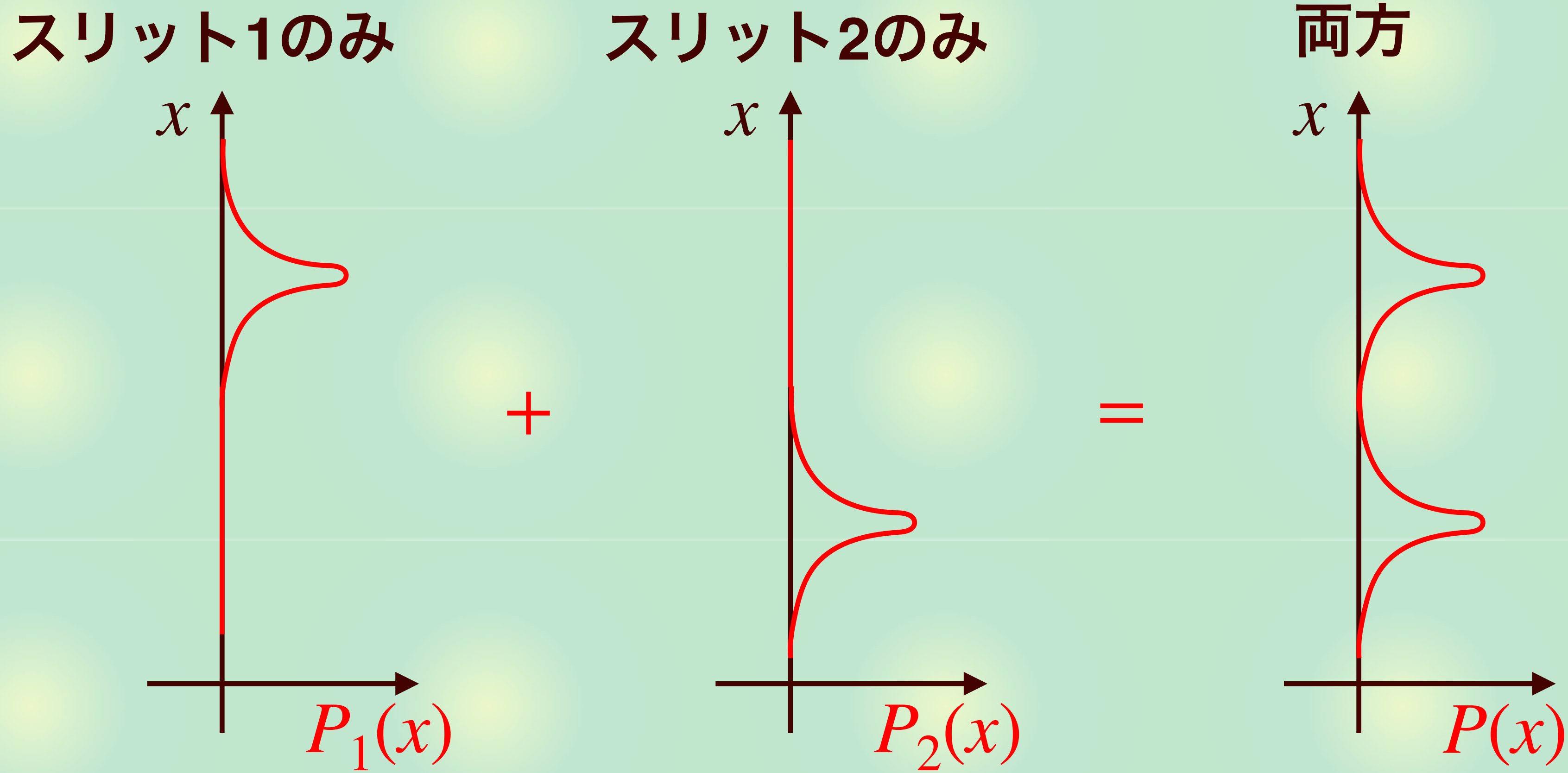


$P(x)$ はスリットの奥に対応する x で最大

古典粒子

片方のスリットを閉じた場合

- スリット1のみの確率分布 $P_1(x)$、2のみの確率分布 $P_2(x)$

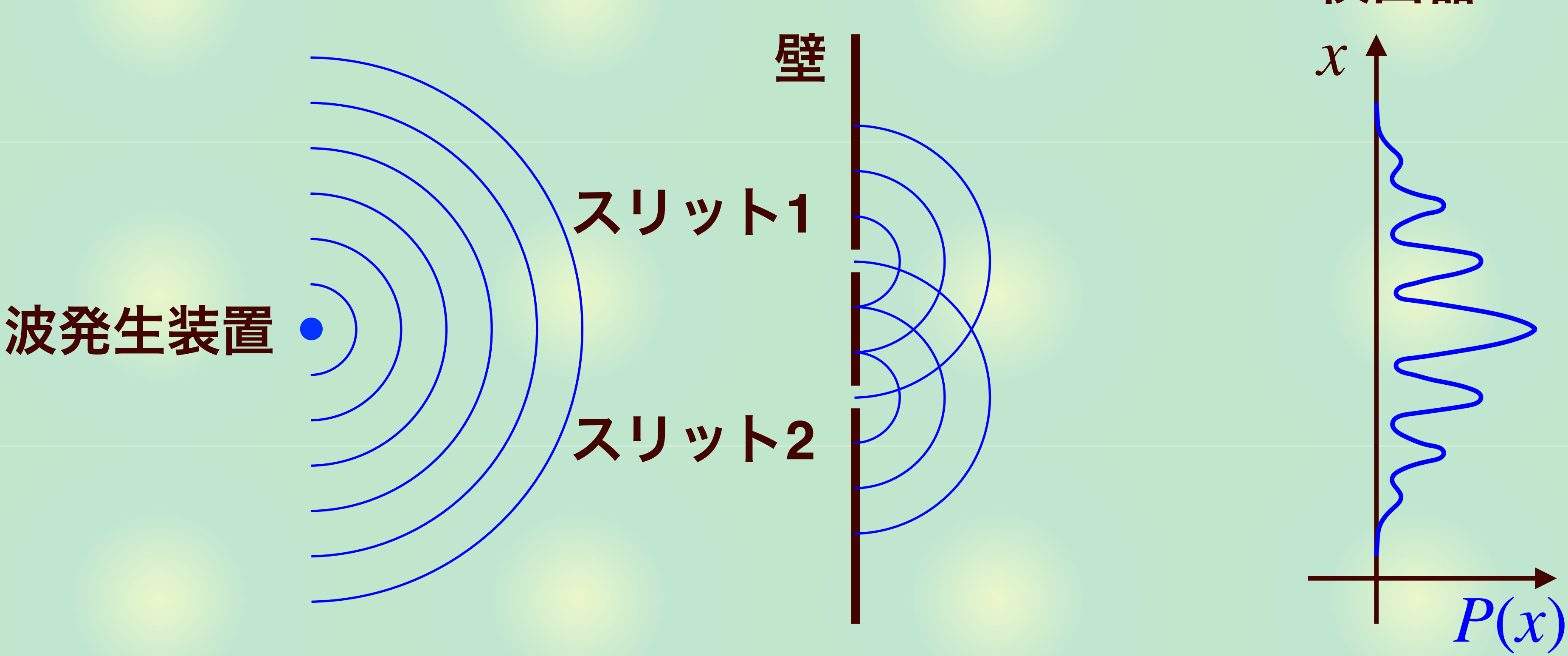


粒子の場合2つの確率の和：$P(x) = P_1(x) + P_2(x)$

古典波動

古典力学的な**波動**（海の波、光など）

- 検出器では波の強度を測定
- スリット1を通った波と2を通った波が**干渉**

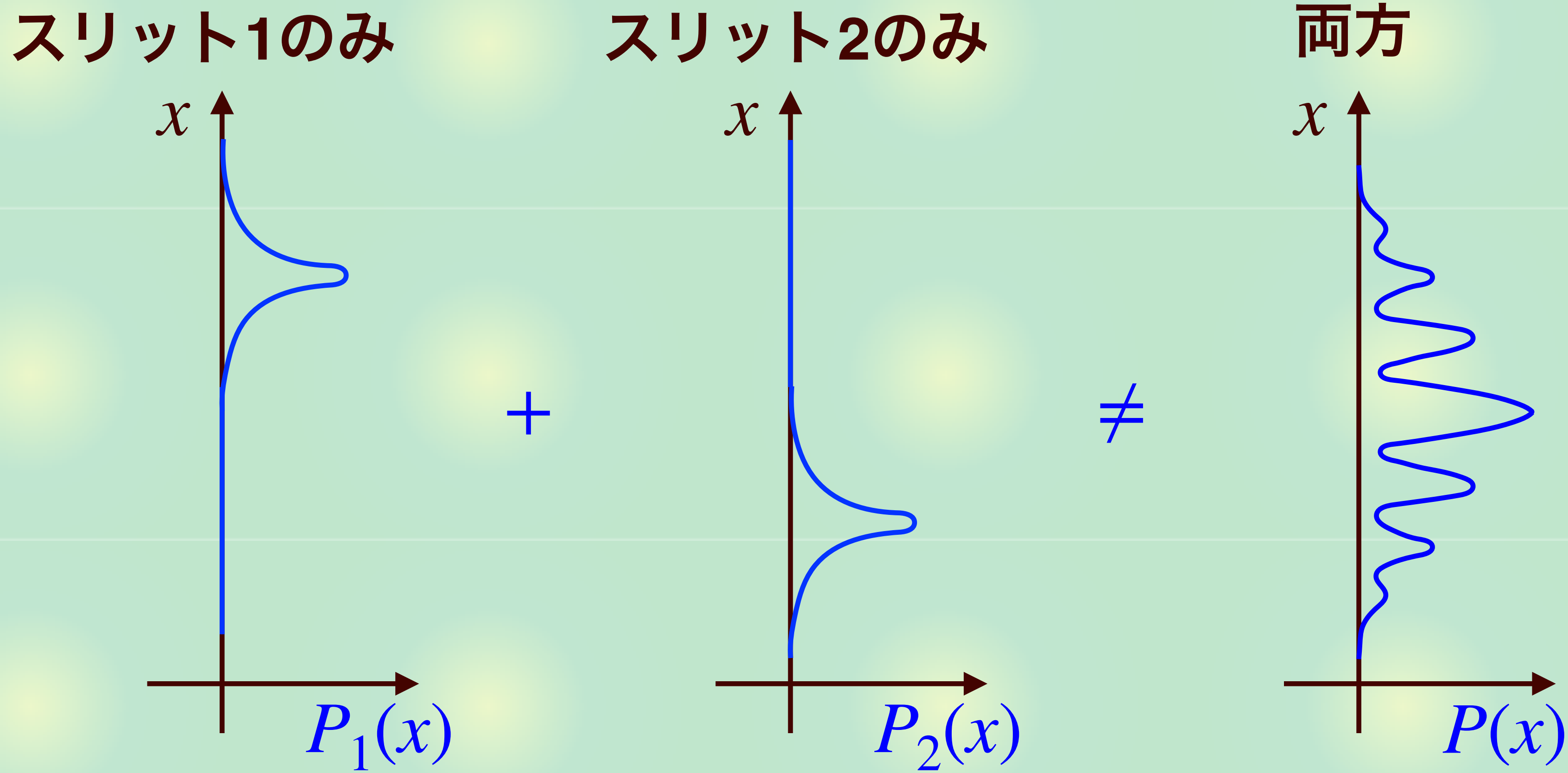


$P(x)$ は干渉縞（波の強め合い、弱め合い）を示す

古典波動

片方のスリットを閉じた場合

- スリット1のみの確率分布 $P_1(x)$、2のみの確率分布 $P_2(x)$

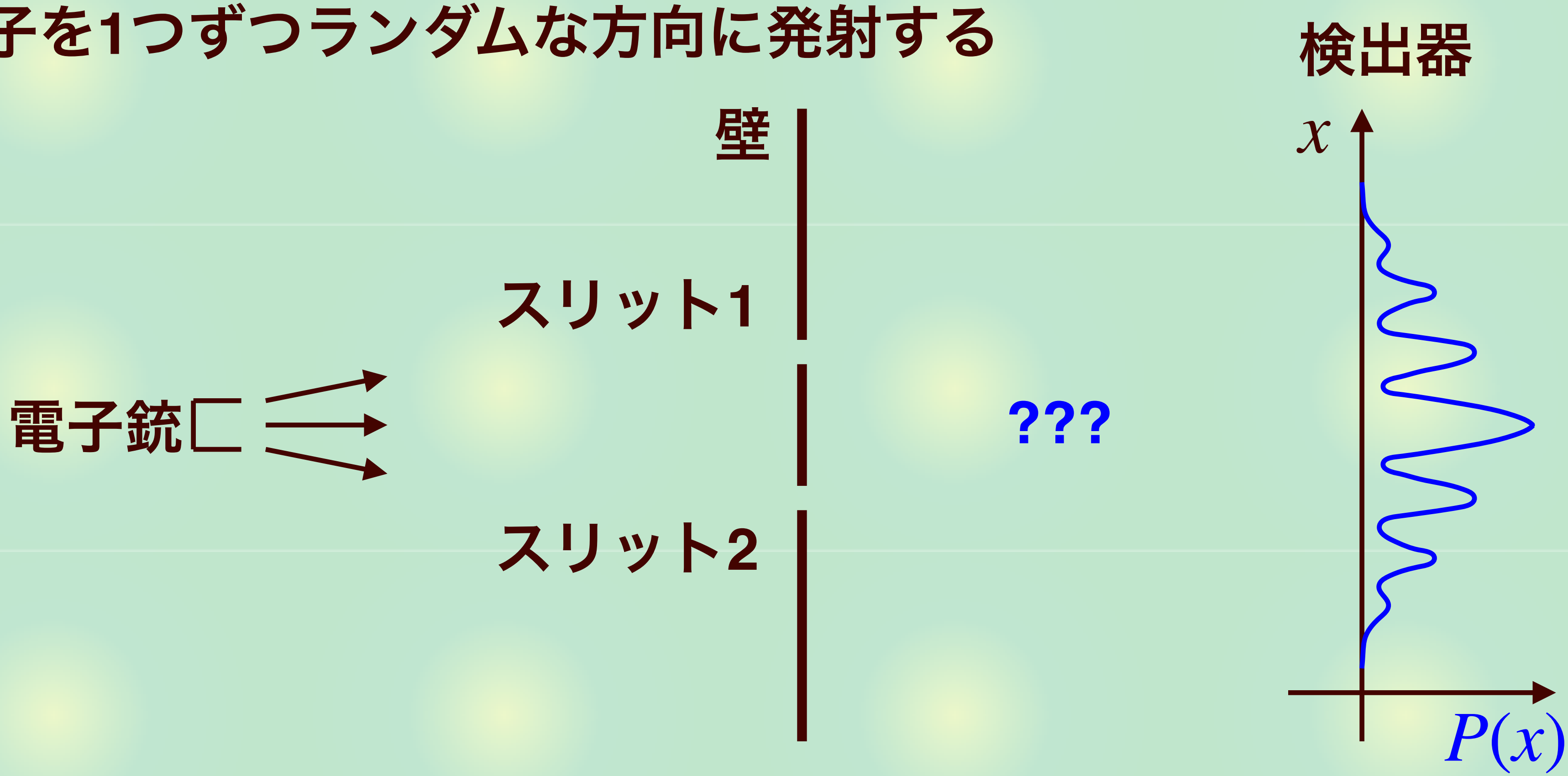


波動の場合2つの確率の和**でない**：$P(x) \neq P_1(x) + P_2(x)$

量子力学

量子力学的な電子

- 壁も検出器もミクロなサイズになっている
- 電子を1つずつランダムな方向に発射する



—> 確率分布 $P(x)$ は干渉縞を示す!

量子力学的粒子

電子を用いた実際の実験（外村彰、HITACHI）

https://youtu.be/pVK67lNfgeE

多数の電子の確率分布 $P(x) \neq P_1(x) + P_2(x)$

波動関数の重ね合わせ

なぜ干渉が起こるのか？

- 量子力学の確率 P は複素数の**波動関数** ψ の絶対値二乗

$$P_1 = |\psi_1|^2 = \psi_1^* \underline{\psi_1}, \quad P_2 = |\psi_2|^2$$

1のみ開いている場合の波動関数

両方開いている場合：波動関数を足し算する

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

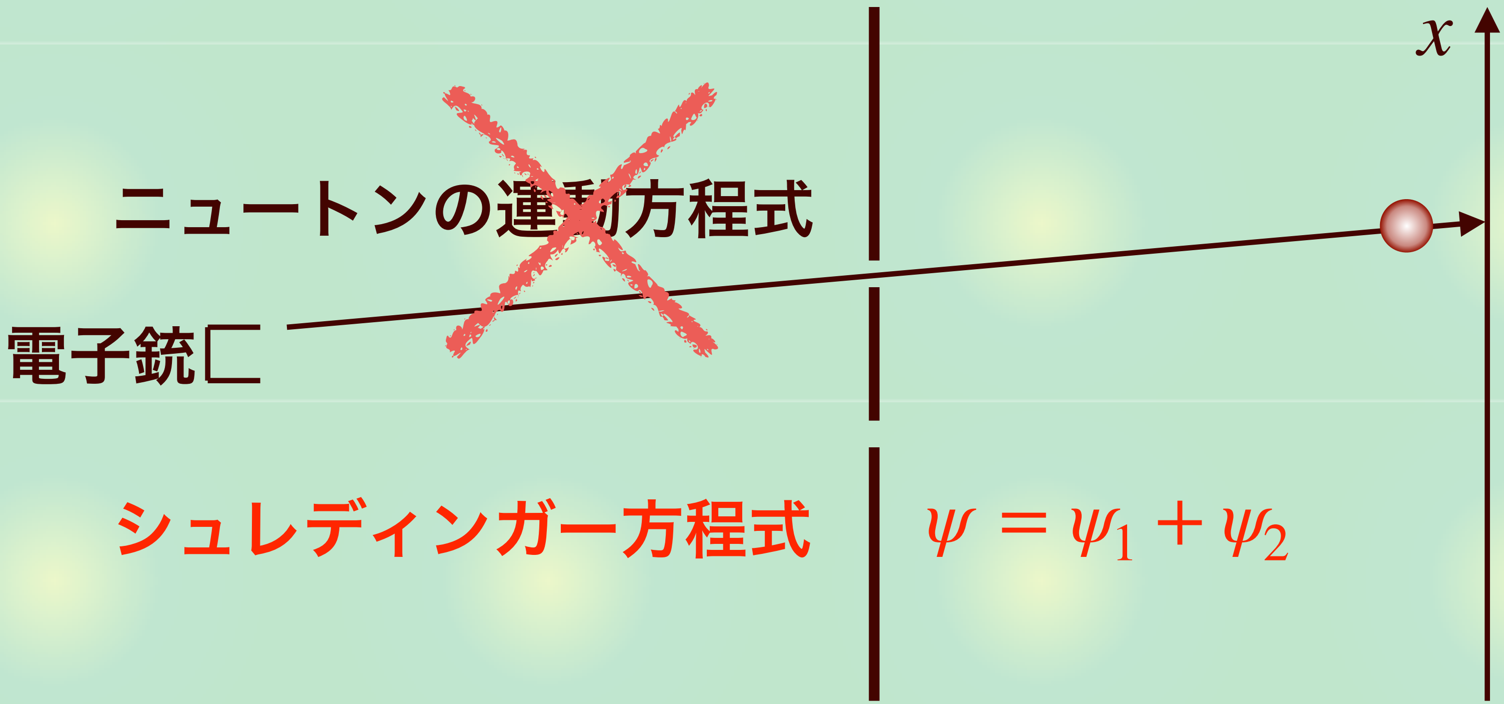
$$P = |\psi|^2$$

$$= \underbrace{|\psi_1|^2}_{P_1} + \underbrace{|\psi_2|^2}_{P_2} + \underbrace{\psi_1^*\psi_2 + \psi_1\psi_2^*}_{\text{干渉の効果}}$$

- 波動関数の**重ね合わせ**から干渉が生まれる

電子の場合

粒子との違い：電子はシュレディンガー方程式に従う



- 量子力学では電子が検出される位置は確率でしかわからない
- 検出（測定）された瞬間に位置が確定する
- 測定前は1を通った電子と2を通った電子の**重ね合わせ**

シュレディンガーの猫

ボールと電子の違い？測定の影響？

E. Schrödinger, Naturwissenchaften, 23, 807-812 (1935)

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

23. Jahrgang 29. November 1935 Heft 48

Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik.

Von E. Schrödinger, Oxford.

Verwaschenheit nicht. Die austretende Partikel wird, wenn man anschaulich deuten will, als Kugelwelle beschrieben, die nach allen Richtungen und fortwährend vom Kern emaniert und einen benachbarten Leuchtschirm fortwährend in seiner ganzen Ausdehnung trifft. Der Schirm aber zeigt nicht etwa ein beständiges mattes Flächenleuchten, sondern blitzt in *einem* Augenblick an *einer* Stelle auf — oder, um der Wahrheit die Ehre zu geben, er blitzt bald hier, bald dort auf, weil es unmöglich ist, den Versuch mit bloß einem einzigen radioaktiven Atom auszuführen. Benützt man statt des Leuchtschirms einen räumlich ausgedehnten Detektor, etwa ein Gas, das von den α-Teilchen ionisiert wird, so findet man die Ionenpaare längs ger… die rückwärts ver… körnchen treffen… …sgeht (C.T.R. Wi… Nebeltröpfchen sichtbar gemacht, die auf den Ionen kondensieren).

猫（Katze）

Man kann auch ganz burleske Fälle konstruieren. Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muß): in einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, *so* wenig, daß im Lauf einer Stunde *vielleicht* eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, daß die Katze noch lebt, *wenn* inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiftet haben. Die ψ-Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, daß in ihr die lebende und die tote Katze (s. v. v.) zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind.

Das Typische an diesen Fällen ist, daß eine …

1 Zur Veranschaulichung kann Fig. 5 oder 6 auf S. 375 des Jg. 1927 dieser Zeitschrift dienen; oder auch Fig. 1, S. 734 des vorigen Jahrganges (1934), da sind es aber Bahnspuren von Wasserstoffkernen.

生きている（lebende）猫と
死んでいる（tote）猫が
混ざっている（gemischt sind）

No animals was harmed in the making of this lecture…

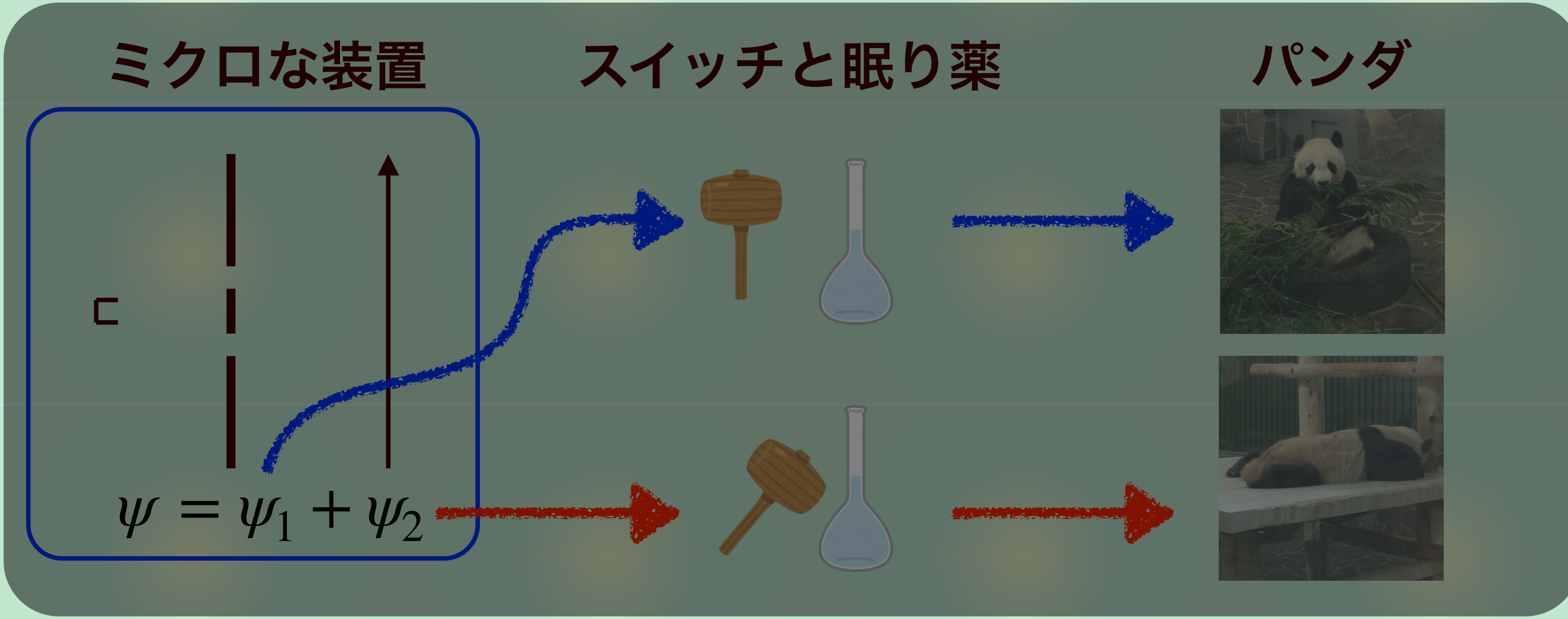
シュレディンガーの猫

ミクロとマクロをつなぐ思考実験

- ミクロな装置：測定する前は波動関数の重ね合わせ

- 測定結果をスイッチに接続

$$\psi_{\text{パ}} = \psi_{\text{起}} + \psi_{\text{眠}}?$$

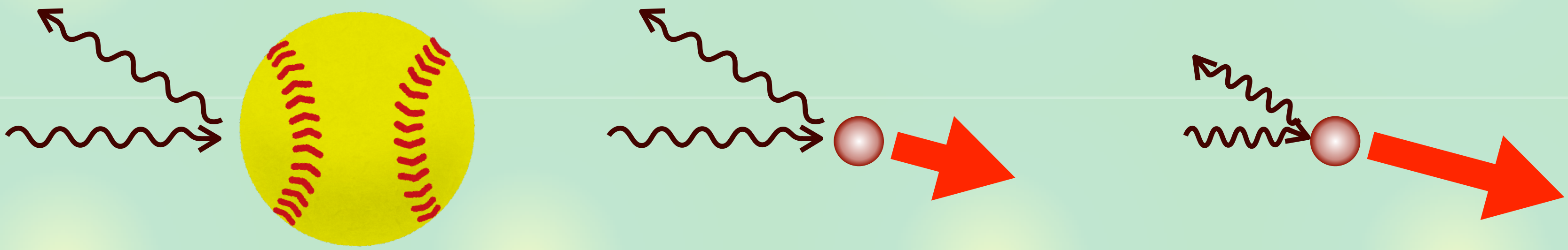


全体を箱に入れて外から見えなくする：箱の中のパンダは?

測定と不確定性

位置の測定：光を当てて反射を観測

- マクロな粒子：光を当てても位置が変化しない
- ミクロな粒子：測定により運動量が変化する



位置の精度を上げるには波長の短い光が必要

—> 波長が短い光は運動量が高い：運動量が大きく変化

—> 位置と運動量の不確定性（演算子の交換関係、第３回）

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

目次

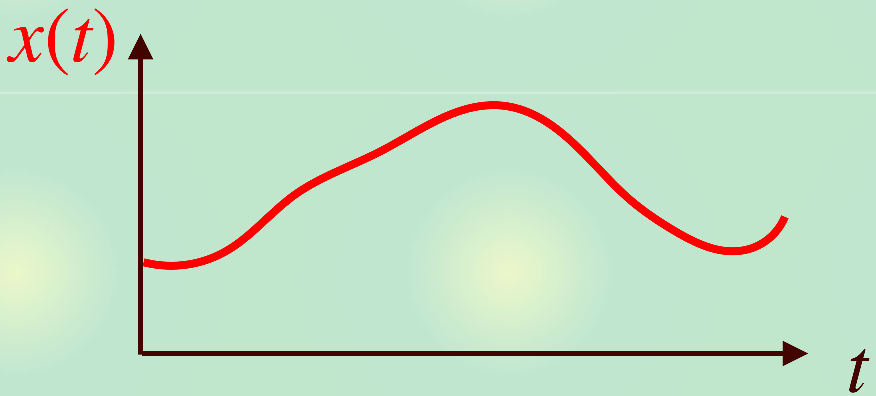
古典力学の基本方程式

ニュートンの運動方程式：力 F による質量 m の粒子の運動

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F$$

- $x(t)$：時刻 t での粒子の位置

- $x(t)$ の微分方程式を解く —> 粒子の**運動**がわかる



量子力学の基本方程式

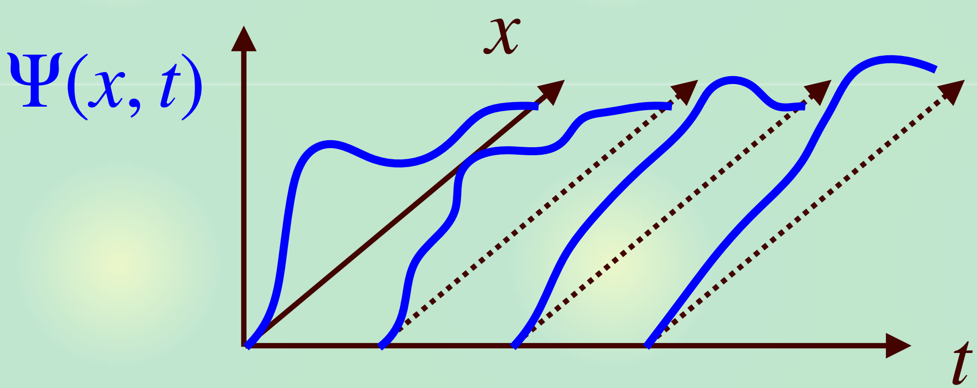
シュレディンガー方程式：ポテンシャル $V(x)$ による粒子の運動

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$$

- $\Psi(x,t)$：時刻 t 、位置 x での波動関数

- $\hbar = h/(2\pi)$：換算プランク定数

- $\Psi(x,t)$ の偏微分方程式を解く —> 粒子の**波動関数**がわかる

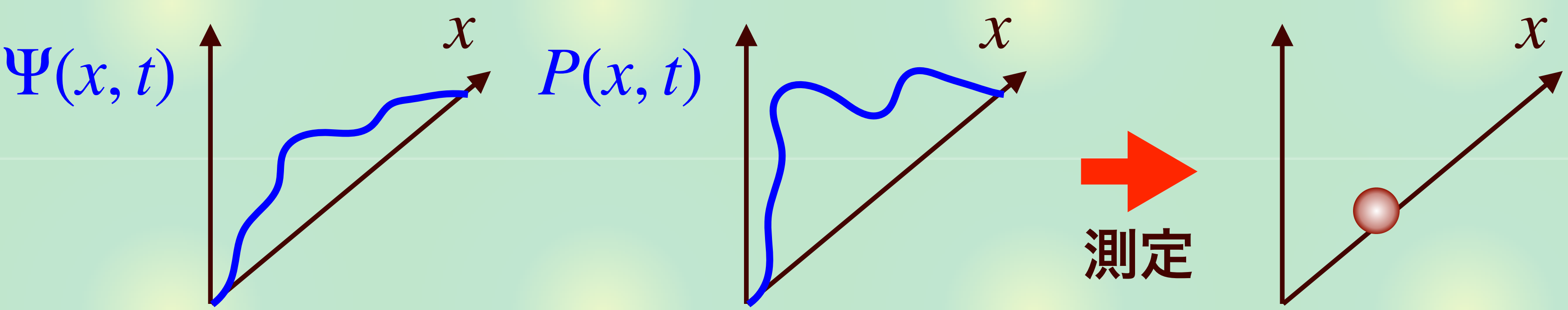


注）一般にはΨは複素数

粒子の位置の確率

時刻 t での粒子の位置：波動関数の絶対値二乗が確率分布 $P(x,t)$

$$P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$$

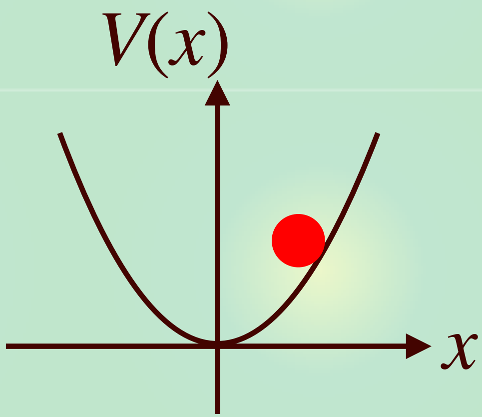


- 粒子の位置は確率的にしか決まらない（神はサイコロを...）
- 波動関数の時間発展（ t 依存性）は厳密に決まっている
- 測定をすると位置が確定する

調和振動子：古典力学

バネにつながれた質量 m の質点の運動

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -m\omega^2 x(t), \quad V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

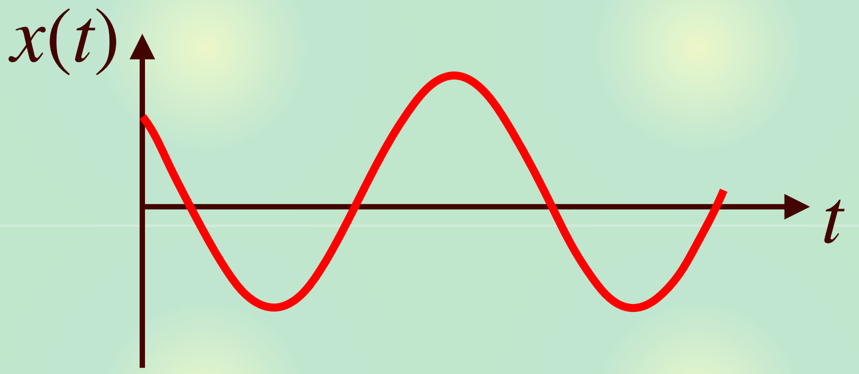


- ポテンシャルは放物線

- $x(t)$ に関する2階微分方程式、解は単振動

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

初期条件



- 力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

初期条件で決まる任意の値（連続）

調和振動子：量子力学

同じ問題を量子力学で：定常状態のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi(x)=E\psi(x)$$

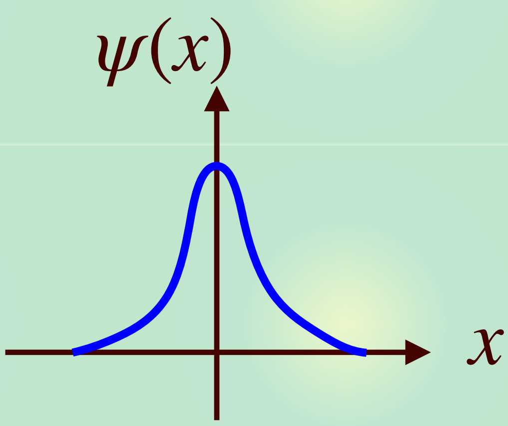
- x に関する2階微分方程式（解くのは大変）—> 量子力学I

エネルギー：離散的 $n=0,\ 1,\ 2,...$

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

基底状態（$n=0$）の波動関数：ガウス関数

$$\psi(x)=C\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right\}$$



まとめ

- 量子力学とは？
  - ミクロな世界の現象を記述する物理学
  - シュレディンガー方程式が波動関数を決定する
- 二重スリット実験、量子力学の原理
  - 電子の干渉縞 <— 波動関数の重ね合わせ
  - 測定すると粒子の位置が確率的に決まる
  - 位置と運動量の不確定性 <— 測定が状態に影響

今後の計画

- 第２回(10/8)：スピン
  - スピンの概念とボソン・フェルミオンの紹介
- 第３回(11/6)：スピン1/2状態
  - 行列とベクトルを使ったスピンの計算の紹介
- 第４回(11/13)：状態の重ね合わせ、観測
  - 微分方程式と行列の関係