

## 2 スピン：ボソンとフェルミオン

### 2.1 第2回で紹介すること

- ミクロな世界の粒子は**スピン**と呼ばれる固有の角運動量を持っている
- スピンの大きさは $\hbar$ を基準として離散的な値に**量子化**されている
- **ボソン**（ボース粒子、boson）：スピンの大きさが $\hbar$ の整数倍（ $0, \hbar, 2\hbar, \dots$ ）
- **フェルミオン**（フェルミ粒子、fermion）：スピンの大きさが $\hbar$ の半整数倍（ $\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$ ）

### 2.2 古典力学の角運動量

- 運動量  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1)$$

$\mathbf{p}$  の向き：運動の向き

$\mathbf{p}$  の大きさ  $|\mathbf{p}|$ ：運動の速さ

- **角運動量  $\mathbf{L}$** ：回転に関する“運動量”

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2)$$

$\mathbf{L}$  の向き：**回転軸**の向き（ $\mathbf{L}$  に対し右ねじの向きに回転）

$\mathbf{L}$  の大きさ  $|\mathbf{L}|$ ：回転運動の速さ

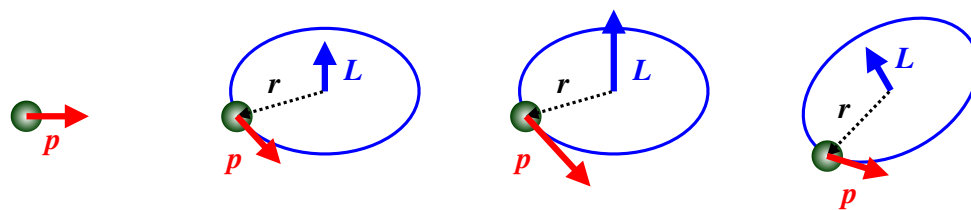


図 1: 左：運動量ベクトル  $\mathbf{p}$ 。右：角運動量ベクトル  $\mathbf{L}$  の例

### 2.3 物理量の期待値とゆらぎ

- 一般に物理量の測定値は量子効果によって平均値のまわりでばらついて（ゆらいで）いる
- **期待値**  $\langle O \rangle$ ：物理量  $O$  を測定した際の平均値

- **ゆらぎ**（標準偏差） $\Delta O$ ：平均値のまわりの測定値のばらつき度合い  
ゆらぎが0になり物理量の値が確定した状態：**固有状態**（第3回で詳しく）
- 例）調和振動子の基底状態の粒子の位置  $x$  とエネルギー  $E$  の期待値とゆらぎ（補足参照）

$$\langle x \rangle = 0, \quad \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \Delta E = 0 \quad (3)$$

粒子の位置は  $x = 0$  のまわりでゆらいでいるがエネルギーは  $E = \hbar\omega/2$  で確定  
 $\Rightarrow$  基底状態はエネルギーの固有状態だが位置の固有状態ではない

## 2.4 量子力学の角運動量

- 古典力学の角運動量：大きさ、回転軸の向きは任意の連続的な値で確定できる
- 量子力学の角運動量の  $x, y, z$  成分の測定の間には**不確定性**がある  
 $L_z$  の値を確定させると  $L_x, L_y$  は不確定  $\leftarrow$  (3次元の場合の) 位置と運動量の不確定性
- $L^2$  (角運動量の大きさ2乗) と  $L_z$  ( $z$  方向成分) は同時に確定することができる  
 $L^2$  と  $L_z$  の測定値 (導出は量子 II)

$$\langle L^2 \rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2, \quad \text{角運動量の大きさ } \ell \text{ は } 0 \text{ 以上の整数: } \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$\langle L_z \rangle = m\hbar, \quad \text{磁気量子数 } m \text{ は } -\ell \leq m \leq +\ell \text{ を満たす整数} \quad (5)$$

量子力学の角運動量は表1に示す  $(\ell, m)$  の**組み合わせ**で指定される  
 角運動量の**大きさ** ( $L^2$ ) と**向き** ( $L_z$ ) は**量子化**された値のみをとる

表 1: 量子力学の角運動量の大きさ  $\ell$  と磁気量子数  $m$ 。

|        |   |          |                 |                        |     |
|--------|---|----------|-----------------|------------------------|-----|
| $\ell$ | 0 | 1        | 2               | 3                      | ... |
| $m$    | 0 | -1, 0, 1 | -2, -1, 0, 1, 2 | -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 | ... |

- $m = +\ell$  の状態 (図2左)  
ベクトルの長さは  $\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$ ,  $z$  成分は  $m\hbar = \ell\hbar$  で確定  
 $x, y$  成分は量子ゆらぎで不確定: 異なる  $L_x, L_y$  を持つベクトルの重ね合わせ  
測定すると円錐状のどこか (ある  $L_x, L_y$  の値) に確定する  
イメージは  **$z$  軸正の方向を向いたベクトル** が  $xy$  平面内でゆらいでいる状態
- 例)  $\ell = 1$  の場合 (図2中)  
 $m = +1$  の状態: 角運動量ベクトルが  $z$  軸正の方向を向く  
 $m = 0$  の状態:  $xy$  平面内を向く  
 $m = -1$  の状態:  $z$  軸負の方向を向く

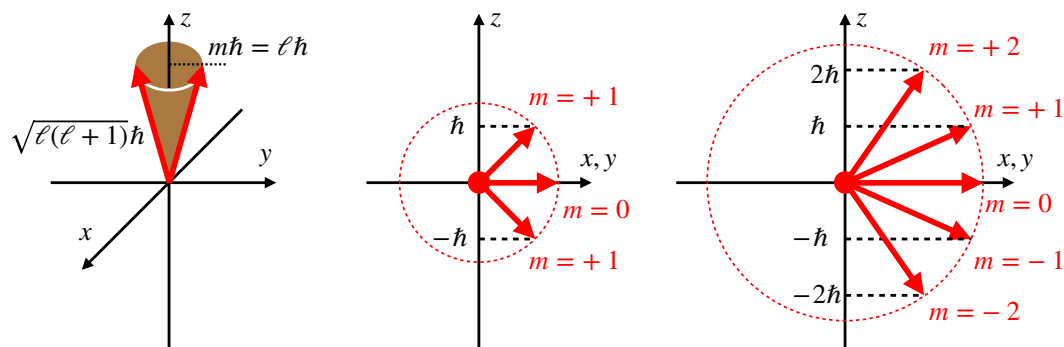


図 2: 量子力学の角運動量。左:  $m = +\ell$  の状態、中:  $\ell = 1$  の場合、右:  $\ell = 2$  の場合。

## 2.5 スピン

- **スピン  $S$** : 量子力学的な粒子が持つ**固有の角運動量** (質量、電荷などと同様)
- 粒子の回転運動による角運動量  $L$  (**軌道角運動量**と呼ぶ) と別に存在する**内部自由度**  
軌道角運動量  $\ell = 0$  の (空間的に回転していない) 粒子でも有限の値を持ちうる
- イメージは“自転” (軌道角運動量が公転)、ただし古典的な対応物は**無い**
- 複合粒子 (大きさあり~剛体) だけでなく、素粒子 (大きさなし~質点) もスピンを持つ

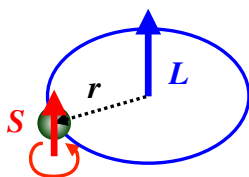


図 3: 軌道角運動量  $L$  とスピン  $S$  の模式図

- $S^2$  と  $S_z$  の測定値

$$\langle S^2 \rangle = s(s+1)\hbar^2, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \quad (6)$$

$$\langle S_z \rangle = m_s \hbar, \quad m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s \quad (7)$$

**スピンの大きさ**  $s$  は 0 以上の整数または**半整数**:  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

$s$  が半整数のとき、**スピンの  $z$  成分**  $m_s$  は  $m_s = 0$  を含まない (表 2)

表 2: スピンの大きさ  $s$  と  $z$  成分  $m_s$

|       |   |                             |            |                                                        |         |
|-------|---|-----------------------------|------------|--------------------------------------------------------|---------|
| $s$   | 0 | $\frac{1}{2}$               | 1          | $\frac{3}{2}$                                          | $\dots$ |
| $m_s$ | 0 | $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ | $-1, 0, 1$ | $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ | $\dots$ |

## 2.6 粒子の統計性

- **ボソン** (ボース粒子、boson) :  $\hbar$  の整数倍 ( $0, \hbar, 2\hbar, \dots$ ) のスピンを持つ  
例) 光子、グルーオン、ヒッグス粒子、 $^4\text{He}$  原子
- **フェルミオン** (フェルミ粒子、fermion) :  $\hbar$  の半整数倍 ( $\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$ ) のスピンを持つ  
例) 電子、クォーク、ニュートリノ、 $^3\text{He}$  原子
- 複合粒子の性質 ( $B$ : ボソン、 $F$ : フェルミオン)

$$B + B = B, \quad B + F = F, \quad F + F = B \quad (8)$$

- 同種粒子の**統計性**

粒子 1 が  $\mathbf{r}_1$ 、粒子 2 が  $\mathbf{r}_2$  にいる状態の波動関数を  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  とすると

$$\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \begin{cases} +\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \text{ボソン: 粒子の入れ替えに対し対称} \\ -\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \text{フェルミオン: 粒子の入れ替えに対し反対称} \end{cases} \quad (9)$$

どちらの場合でも確率密度は同じ:  $|\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \Rightarrow$  同種粒子は区別できない

- $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$  とすると、フェルミオンの場合  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) = 0$   
 $\Rightarrow$  同種フェルミオンは同じ位置に存在できない  
より一般的に、同種フェルミオンは同じ量子状態をとれない: **パウリの排他律**
- 量子多体系への応用: 補足参照