第３回の補足

- 「固有ベクトルは定数倍しても同じ固有値を持つ」の説明

  $\hat{A}\left|x\right\rangle = \lambda\left|x\right\rangle$ となる $\hat{A}$ の固有ベクトル $\left|x\right\rangle$ を定数 c 倍したベクトルを

  $$\left|y\right\rangle = c\left|x\right\rangle$$

  とする。このとき、

  $$\hat{A}\left|y\right\rangle = \hat{A}\left(c\left|x\right\rangle\right) = c\hat{A}\left|x\right\rangle = c\lambda\left|x\right\rangle = \lambda\left(c\left|x\right\rangle\right) = \lambda\left|y\right\rangle$$

  であるので、$\left|y\right\rangle$ は $\hat{A}$ の固有値 λ の固有ベクトルである。つまり固有ベクトルを定数倍しても固有値は変わらない。

- ベクトルの規格化の説明

  規格化されていない任意のベクトル $\left|a\right\rangle$ から

  $$\left|\tilde{a}\right\rangle = \frac{\left|a\right\rangle}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}$$

  を定義する。$\sqrt{\langle a|a\rangle}$ が定数であることに注意。このベクトル $\left|\tilde{a}\right\rangle$ は規格化されている。実際、

  $$\left\langle\tilde{a}\right| = \frac{\left\langle a\right|}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}$$

  なので

  $$\langle\tilde{a}|\tilde{a}\rangle = \left(\frac{\left\langle a\right|}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}\right)\left(\frac{\left|a\right\rangle}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}\right)\frac{\langle a|a\rangle}{\sqrt{\langle a|a\rangle}\sqrt{\langle a|a\rangle}} = 1$$

  となる。つまり任意のベクトル $\left|a\right\rangle$ から規格化されたベクトル $\left|\tilde{a}\right\rangle$ を作ること（「$\left|a\right\rangle$ を規格化する」という）ができる[3]。$\left|a\right\rangle$ と $\left|\tilde{a}\right\rangle$ の違いは定数倍のみなので、上の説明より規格化しても固有値は変わらない。

- 式 (22)：固有状態の期待値と揺らぎ

  期待値を計算すると

  $$\langle A\rangle = \langle x|\hat{A}|x\rangle = \langle x|\lambda|x\rangle = \lambda\langle x|x\rangle = \lambda$$

  となる。ゆらぎは

  $$\langle A^2\rangle = \langle x|\hat{A}\hat{A}|x\rangle = \langle x|\hat{A}\lambda|x\rangle = \lambda\langle x|\hat{A}|x\rangle = \lambda^2$$

  なので

  $$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} = \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2} = 0$$

  である。

[3]厳密には $\langle a|a\rangle$ が有限である場合に限られ、$\langle a|a\rangle$ が発散する場合は規格化ができない。平面波の波動関数などは規格化できないことが知られている。

- 式 (26)：スピン演算子の 2 乗

  定義式 (25) より

$$
\begin{aligned}
\hat{s}_x^2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{s}_y^2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-i)i & 0 \\ 0 & i(-i) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{s}_z^2 &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

  となる。$\hat{s}_z$ の計算には対角行列の 2 乗は各成分の 2 乗の対角行列になることを用いた。よってこの計算は、パウリ行列の 2 乗はどの成分でも単位行列になることを表している。