

第4回の補足

- 式 (36)、(37) : $|x+\rangle$ 、 $|x-\rangle$ の規格直交性の確認

それぞれのブラベクトルは

$$\langle x-| = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1), \quad \langle x-| = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -1)$$

であるので、同じベクトルの内積を計算すると

$$\langle x+|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times (1+1) = 1$$

$$\langle x-|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times [1 + (-1) \times (-1)] = 1$$

と規格化されていることがわかる。また、異なるベクトルの内積を計算すると

$$\langle x+|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times (1-1) = 0$$

$$\langle x-|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times (1-1) = 0$$

と直交していることがわかる。

- \hat{s}_y の固有状態

y 軸方向を向いたスピン 1/2 状態 (\hat{s}_y の固有状態) は

$$|y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

で与えられる。実際に

$$\hat{s}_y |y+\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 + (-i)i \\ i + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |y+\rangle$$

$$\begin{aligned} \hat{s}_y |y-\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 + (-i)(-i) \\ i + 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} |y-\rangle \end{aligned}$$

と $|y+\rangle$ は固有値 $+1/2$ 、 $|y-\rangle$ は固有値 $-1/2$ を持つ固有状態になっている。このように、 \hat{s}_y の固有状態を表現するには複素数が必要であることがわかる。

- 式 (49)、(50)：スピン演算子の交換関係

式を代入すると

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{s}}^2, \hat{s}_z] &= \hat{\mathbf{s}}^2 \hat{s}_z - \hat{s}_z \hat{\mathbf{s}}^2 = \frac{1}{4} I \hat{s}_z - \hat{s}_z \frac{1}{4} I = \frac{1}{4} \hat{s}_z - \frac{1}{4} \hat{s}_z = 0 \\
 [\hat{s}_x, \hat{s}_z] &= \hat{s}_x \hat{s}_z - \hat{s}_z \hat{s}_x \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= -i \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
 &= -i \hat{s}_y
 \end{aligned}$$

となる。ここで I は 2×2 単位行列をあらわす。

- 位置と運動量の交換関係 (52)

式 (59) の表示の演算子が波動関数 $\psi(x)$ に作用しているとする

$$\begin{aligned}
 [\hat{x}, \hat{p}] \psi(x) &= (\hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x}) \psi(x) \\
 &= x \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi(x) - \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) [x \psi(x)] \\
 &= -i\hbar x \frac{d\psi(x)}{dx} + i\hbar \left(\frac{d}{dx} x \right) \psi(x) + i\hbar x \frac{d\psi(x)}{dx} \\
 &= i\hbar \psi(x)
 \end{aligned}$$

となる。これが任意の $\psi(x)$ に対して成立するので、演算子の関係式として $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ が成り立つ。演算子の関係式の計算では、作用する対象（上の例では波動関数）を具体的に書くと間違えにくい。特に微分演算子は右にある関数を全てにかかるので、 $\hat{p} \hat{x} \psi(x)$ は $x \psi(x)$ の積の微分になる。交換関係右辺の $i\hbar$ は正確には $i\hbar \hat{I}$ と恒等演算子 \hat{I} が省略されている。