静電磁場のハミルトニアン

古典電磁気学で荷電粒子に対するローレンツ力を導くハミルトニアンの説明。

用語の確認

- 一般の電磁場：座標 $\boldsymbol{r}$、時間 t 両方に依存、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$
- 静電磁場：時間 t に依存しない、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$
- 一様電磁場：座標 $\boldsymbol{r}$、時間 t 両方に依存しない、強さは定数、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$

静電磁場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 中を運動する電荷 Q の荷電粒子はローレンツ力を受けるので、運動方程式は

$$m_Q\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=Q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)\tag{C24}$$

である。静電磁場はスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を用いて（場が時間 t に依存する場合は、電場にベクトルポテンシャルの時間微分項が必要）

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\\&E_i(\boldsymbol{r})=-\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial r_i},\quad B_i(\boldsymbol{r})=\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k(\boldsymbol{r})}{\partial r_j}\end{aligned}\tag{C25}$$

と書ける。式 (C24) をラグランジュ形式で記述するために必要なラグランジアン L は

$$L=\frac{m_Q}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2-Q\phi(\boldsymbol{r})+Q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{m_Q}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{dr_i}{dt}\frac{dr_i}{dt}-Q\phi(\boldsymbol{r})+Q\sum_{i=1}^{3}A_i(\boldsymbol{r})\frac{dr_i}{dt}\tag{C26}$$

であることを以下確認する。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(dr_i/dt)}-\frac{\partial L}{\partial r_i}=0\tag{C27}$$

なので、第 1 項を計算すると（最初の 2 は 2 乗されている dr_i/dt の微分が 2 通りあるため）

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(dr_i/dt)}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_Q}{2}2\frac{dr_i}{dt}+QA_i(\boldsymbol{r})\right)\\&=m_Q\frac{d^2r_i}{dt^2}+Q\frac{d}{dt}A_i(\boldsymbol{r})\\&=m_Q\frac{d^2r_i}{dt^2}+Q\left(\frac{\partial}{\partial t}A_i(\boldsymbol{r})+\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\frac{\partial}{\partial r_j}A_i(\boldsymbol{r})\right)\\&=m_Q\frac{d^2r_i}{dt^2}+Q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\frac{\partial A_i(\boldsymbol{r})}{\partial r_j}\end{aligned}$$

となる。ここで座標 $\boldsymbol{r}$ が時間 t に依存する場合の常微分の公式

$$\frac{d}{dt}f(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\partial}{\partial t}f(t,\boldsymbol{r}) + \sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\frac{\partial}{\partial r_j}f(t,\boldsymbol{r})$$

と静電場の場合はベクトルポテンシャルが時間に陽に依存しないこと（$\partial A_i/\partial t = 0$）を用いた。式 (C27) 第 2 項は（微分する座標の添字が i なので L 内で和をとる添字を j として）

$$-\frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial}{\partial r_i}\left[-Q\phi(\boldsymbol{r}) + Q\sum_{j=1}^{3}A_j(\boldsymbol{r})\frac{dr_j}{dt}\right] = Q\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial r_i} - Q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\frac{\partial A_j(\boldsymbol{r})}{\partial r_i}$$

よって式 (C27) より

$$\begin{aligned}
0 &= m_Q\frac{d^2r_i}{dt^2} + Q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\frac{\partial A_i(\boldsymbol{r})}{\partial r_j} + Q\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial r_i} - Q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\frac{\partial A_j(\boldsymbol{r})}{\partial r_i} \\
m_Q\frac{d^2r_i}{dt^2} &= -Q\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial r_i} - Q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\left(\frac{\partial A_i(\boldsymbol{r})}{\partial r_j} - \frac{\partial A_j(\boldsymbol{r})}{\partial r_i}\right)
\end{aligned}$$

ここで式 (C25) の磁場の定義と公式 $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を使うと

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ilm}B_i(\boldsymbol{r}) &= \sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ilm}\epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k(\boldsymbol{r})}{\partial r_j} = \sum_{j,k=1}^{3}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\frac{\partial A_k(\boldsymbol{r})}{\partial r_j} \\
&= \frac{\partial A_m(\boldsymbol{r})}{\partial r_l} - \frac{\partial A_l(\boldsymbol{r})}{\partial r_m}
\end{aligned}$$

と書けることと、式 (C25) の電場の定義を用いると

$$\begin{aligned}
m_Q\frac{d^2r_i}{dt^2} &= QE_i(\boldsymbol{r}) - Q\sum_{j=1}^{3}\frac{dr_j}{dt}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{kji}B_k(\boldsymbol{r}) \\
&= QE_i(\boldsymbol{r}) + Q\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{dr_j}{dt}B_k(\boldsymbol{r}) \\
&= Q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)_i
\end{aligned}$$

となり、運動方程式 (C24) が得られる。ここで外積の定義 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i = \sum_{j,k}\epsilon_{ijk}A_jB_k$ を用いた。

次に式 (C26) をハミルトン形式で記述するために、座標 $\boldsymbol{r}$ の正準共役量 $\boldsymbol{p}$ を計算すると

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial(dr_i/dt)} = m_Q\frac{dr_i}{dt} + QA_i(\boldsymbol{r}), \quad \frac{dr_i}{dt} = \frac{p_i - QA_i(\boldsymbol{r})}{m_Q}$$

となり、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{dr_i}{dt} - L \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left[m_Q \frac{dr_i}{dt} + QA_i(\boldsymbol{r}) \right] \frac{dr_i}{dt} - \left[\frac{m_Q}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{dr_i}{dt}\frac{dr_i}{dt} - Q\phi(\boldsymbol{r}) + Q \sum_{i=1}^{3} A_i(\boldsymbol{r}) \frac{dr_i}{dt} \right] \\
&= \frac{m_Q}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{dr_i}{dt}\frac{dr_i}{dt} + Q\phi(\boldsymbol{r}) \\
&= \frac{m_Q}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i - QA_i(\boldsymbol{r})}{m_Q} \frac{p_i - QA_i(\boldsymbol{r})}{m_Q} + Q\phi(\boldsymbol{r}) \\
&= \frac{[\boldsymbol{p} - Q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})]^2}{2m_Q} + Q\phi(\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

となる。これがローレンツ力を運動方程式として導く古典力学のハミルトニアンである。ラグランジュ形式、およびハミルトン形式では、電磁場そのものではなくスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルが式に現れる。

一様磁場のベクトルポテンシャル

一様磁場に対するベクトルポテンシャルの説明。

ベクトルポテンシャルとして

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} \tag{C28}$$

を選ぶ。磁場 $\boldsymbol{B}$ 自体が座標に依存しない場合でも対応するベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{r}$ に依存することに注意（そうでないと $\boldsymbol{\nabla}$ をかけると 0 になる)。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の各成分は

$$A_x(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}(B_y z - B_z y), \quad A_y(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}(B_z x - B_x z), \quad A_z(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}(B_x y - B_y x)$$

となる。これを用いて式 (C25) 右辺の各成分を計算すると（一様磁場なので $\boldsymbol{B}$ の成分はどの座標で微分してもゼロ)

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}(B_x y - B_y x)\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}(B_z x - B_x z)\right) = \frac{1}{2}B_x - \frac{1}{2}(-B_x) \\
&= B_x \\
(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}(B_y z - B_z y)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(B_x y - B_y x)\right) = \frac{1}{2}B_y - \frac{1}{2}(-B_y) \\
&= B_y \\
(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(B_z x - B_x z)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}(B_y z - B_z y)\right) = \frac{1}{2}B_z - \frac{1}{2}(-B_z) \\
&= B_z
\end{aligned}$$

となり正しく磁場が得られる。よって式 (C28) は一様磁場 $\boldsymbol{B}$ に対するベクトルポテンシャルになっている。式 (C28)⇒ 一様磁場 $\boldsymbol{B}$ を示したが、一様磁場 $\boldsymbol{B}$ を導くベクトルポテンシャルは（ゲージ変換の自由度があるので）式 (C28) だけに限られないことに注意。式 (C28) は対称ゲージと呼ばれるゲージを選択した場合の結果である。成分の具体形を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(B_y z - B_z y)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}(B_z x - B_x z)+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}(B_x y - B_y x)\\ &= 0\end{aligned}$$

であることもわかる。

角運動量と磁気モーメント

古典電磁気学での角運動量と磁気モーメントの関係の説明。

電荷 Q の粒子が半径 b の円周上を速度 v で円運動するとき（図 12 左）、粒子が 1 周するのにかかる時間は $2\pi b/v$ なので、流れる円電流 I（単位時間当たりに通過する電荷量）は

$$I = \frac{Qv}{2\pi b}$$

である。半径 b が十分小さい時、円電流 I が作る磁場は、磁気モーメントの大きさ

$$\mu = \pi b^2 I$$

の磁気双極子が作る磁場と等価である。円運動による角運動量の大きさは、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$（大きさは常に b で動径方向）と運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ の向き（円の接線方向）が直交していることから $L = rp = bmv$ となる。よって以下の結果を得る。

$$\mu = \pi b^2\frac{Qv}{2\pi b} = \frac{Qvb}{2} = \frac{Qvbm}{2m} = \frac{QL}{2m}$$

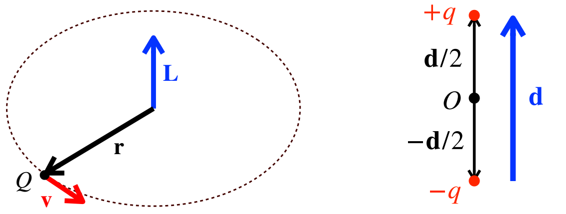

図 12: 左：円運動する荷電粒子。右：電気双極子。

磁場中の磁気双極子のエネルギー

磁場 $\boldsymbol{B}$ 中の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ の磁気双極子のエネルギーが $E = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ となることの説明。

以下、この問題と等価な電場 $\boldsymbol{E}$ 中の電気双極子（双極子モーメント $\boldsymbol{p}$）の持つ静電エネルギーを考える。電気双極子の中心を原点にとり、電荷 $+q$ が位置 $\boldsymbol{d}/2$、電荷 $-q$ が位置 $-\boldsymbol{d}/2$ にあるとすれば（図 12 右）電気双極子モーメントは $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ となる。外部電場 $\boldsymbol{E}$ に対応する位置 $\boldsymbol{r}$ でのスカラーポテンシャルを $\phi(\boldsymbol{r})$ とすると、電気双極子の持つ静電エネルギー U は

$$U = q\phi(\boldsymbol{d}/2) - q\phi(-\boldsymbol{d}/2)$$

となる。双極子の大きさ $|\boldsymbol{d}|$ が十分小さい場合、テイラー展開 $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=0}\cdot\boldsymbol{r} + \mathcal{O}(\boldsymbol{r}^2)$ より

$$\begin{aligned}
U &= q\left[\phi(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=0}\cdot\frac{\boldsymbol{d}}{2}\right] - q\left[\phi(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=0}\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)\right] + \mathcal{O}(\boldsymbol{d}^2) \\
&= q\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=0} + \mathcal{O}(\boldsymbol{d}^2) \\
&= -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} + \mathcal{O}(\boldsymbol{d}^2)
\end{aligned}$$

となる。よって電場中の電気双極子が持つエネルギーは $-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$ で与えられる。