テンソル積

演算子と状態のテンソル積の説明。[15]

直感的な理解：記号 $\otimes$ の前と後ろに独立なベクトルと演算子があり、$\otimes$ の前後でそれぞれ演算を行う。固有値などはそれぞれの積になる。

位置ベクトルの具体例：位置 $\boldsymbol{r}^A$ に質点 A、位置 $\boldsymbol{r}^B$ に質点 B がある 2 質点系を考える。質点 A の位置と質点 B の位置は独立に選べるので、全系の状態は、テンソル積

$$\boldsymbol{r}^{AB} \equiv \boldsymbol{r}^A \otimes \boldsymbol{r}^B = \begin{pmatrix} r_1^A \\ r_2^A \\ r_3^A \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_1^B \\ r_2^B \\ r_3^B \end{pmatrix}$$

で指定できる。成分表示では

$$[\boldsymbol{r}^A \otimes \boldsymbol{r}^B]_{ij} = r_i^A r_j^B$$

と書かれ、i, j はそれぞれ独立に 1,2,3 の値を取れるので 9 個の成分がある。独立なベクトルを並べて積をとったものをテンソルと呼び、2 個のベクトルのテンソル積は 2 階テンソル、n 個のベクトルのテンソル積は n 階テンソルと呼ばれる。3×3 直交行列 R_A を用いて位置ベクトル $\boldsymbol{r}^A$ を

$$\boldsymbol{r}^A \to \boldsymbol{r}^{A\prime} = R^A \boldsymbol{r}^A = \begin{pmatrix} R_{11}^A & R_{12}^A & R_{13}^A \\ R_{21}^A & R_{22}^A & R_{23}^A \\ R_{31}^A & R_{32}^A & R_{33}^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^A \\ r_2^A \\ r_3^A \end{pmatrix}$$

と変換すると、質点 A の座標を回転させることができる。R^A は位置 $\boldsymbol{r}^A$ にある状態を回転させる演算子とみなすことができる。同様に $\boldsymbol{r}^B$ の回転は

$$\boldsymbol{r}^B \to \boldsymbol{r}^{B\prime} = R^B \boldsymbol{r}^B$$

である。質点 A と質点 B は独立に回転できるので、それぞれの座標の任意の回転は、テンソル積

$$R^{AB} \equiv R^A \otimes R^B$$

で表現できる。テンソル積状態の変換は

$$R^{AB} \boldsymbol{r}^{AB} = R^A \boldsymbol{r}^A \otimes R^B \boldsymbol{r}^B = \boldsymbol{r}^{A\prime} \otimes \boldsymbol{r}^{B\prime}$$

となり、変換後の状態は質点 A が R^A で、質点 B が R^B でそれぞれ回転されたものになる。変換後の状態との内積をとると、

$$(\boldsymbol{r}^{A\prime} \otimes \boldsymbol{r}^{B\prime}) \cdot (\boldsymbol{r}^A \otimes \boldsymbol{r}^B) = \sum_{i,j} r_i^{A\prime} r_j^{B\prime} r_i^A r_j^B = \sum_i r_i^{A\prime} r_i^A \sum_j r_j^{B\prime} r_j^B = (\boldsymbol{r}^{A\prime} \cdot \boldsymbol{r}^A)(\boldsymbol{r}^{B\prime} \cdot \boldsymbol{r}^B)$$

と、それぞれの内積（スカラー）の積になる。上記をスピンなどのベクトル空間に一般化したものも同様にテンソル積と呼ぶ。

[15]用語（テンソル積と直積）の混乱を防ぐため修正しました（2024 年 11 月 4 日）。