

完全反対称テンソルを使った角運動量の計算

完全反対称テンソル ϵ_{ijk} と式 (172) の説明⁸

- 1) 添字 i, j, k は 1 から 3 の値をとる
- 2) $\epsilon_{123} = 1$ と定義
- 3) どの 2 つの添字の入れ替えに対しても反対称 (− 符号が出る)

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad (i, j \text{ の入れ替え})$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} \quad (j, k \text{ の入れ替え})$$

3) の性質より、同じ添字を含むものは 0 になる。例えば、 ϵ_{iij} の i と i を入れ替えると (同じ添字を “入れ替え” ているので表記は変わらず − 符号のみが出る)

$$\epsilon_{iij} = -\epsilon_{iij}$$

$$2\epsilon_{iij} = 0$$

$$\epsilon_{iij} = 0$$

よって 0 でないのは i, j, k 全てが異なる値になった場合のみ。2) の定義を用いると

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$$

$$\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$$

であることがわかる。つまり

- 添字が 123 の偶置換 ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ の順番に並んでいる) であれば +1
- 添字が 123 の奇置換 ($3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ の順番に並んでいる) であれば −1
- それ以外 (112、223、など全て) は 0

である。よく使う公式として

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

がある。ここでダミー添字 (繰り返し添字) は和をとる規約を採用する。

ϵ_{ijk} を用いると外積は

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \epsilon_{ijk}a_ib_j$$

⁸本文では虚数単位 i 、無次元の角運動量演算子 $\mathbf{j}$ と区別するために添え字は a, b, c を用いたが、補足では一般的によく使われる i, j, k などを用いる。どちらでも結果は同じ。

なので角運動量演算子は

$$\hat{L}_k = \epsilon_{ijk} \hat{r}_i \hat{p}_j$$

となる。角運動量の交換関係は（繰り返し添字は必ず他で使っていない文字を使う。左辺に i, j の添字があるので、計算のどの段階でも右辺各項には i, j が一つずつあるはず。 $\delta_{ab} x_a = x_b$ などを使う。）

$$\begin{aligned} [\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= [\epsilon_{ik\ell} \hat{r}_k \hat{p}_\ell, \epsilon_{jmn} \hat{r}_m \hat{p}_n] \\ &= \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} [\hat{r}_k \hat{p}_\ell, \hat{r}_m \hat{p}_n] \\ &= \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \{ \hat{r}_k [\hat{p}_\ell, \hat{r}_m \hat{p}_n] + [\hat{r}_k, \hat{r}_m \hat{p}_n] \hat{p}_\ell \} \\ &= \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \{ \hat{r}_k [\hat{p}_\ell, \hat{r}_m] \hat{p}_n + \hat{r}_m [\hat{r}_k, \hat{p}_n] \hat{p}_\ell \} \\ &= \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \{ \hat{r}_k (-i\hbar \delta_{\ell m}) \hat{p}_n + \hat{r}_m i\hbar \delta_{kn} \hat{p}_\ell \} \\ &= i\hbar \{ -\epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \delta_{\ell m} \hat{r}_k \hat{p}_n + \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \delta_{kn} \hat{r}_m \hat{p}_\ell \} \\ &= i\hbar \{ -\epsilon_{ik\ell} \epsilon_{j\ell n} \hat{r}_k \hat{p}_n + \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmk} \hat{r}_m \hat{p}_\ell \} \\ &= i\hbar \{ \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{j\ell n} \hat{r}_k \hat{p}_n - \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmk} \hat{r}_m \hat{p}_\ell \} \\ &= i\hbar \{ (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{jk}) \hat{r}_k \hat{p}_n - (\delta_{ij} \delta_{\ell m} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) \hat{r}_m \hat{p}_\ell \} \\ &= i\hbar (\delta_{ij} \hat{r}_k \hat{p}_k - \hat{r}_j \hat{p}_i - \delta_{ij} \hat{r}_\ell \hat{p}_\ell + \hat{r}_i \hat{p}_j) \\ &= i\hbar (\hat{r}_i \hat{p}_j - \hat{r}_j \hat{p}_i) \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k &= i\hbar \epsilon_{ijk} (\epsilon_{\ell mk} \hat{r}_\ell \hat{p}_m) \\ &= i\hbar (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) \hat{r}_\ell \hat{p}_m \\ &= i\hbar (\delta_{i\ell} \delta_{jm} \hat{r}_\ell \hat{p}_m - \delta_{im} \delta_{j\ell} \hat{r}_\ell \hat{p}_k) \\ &= i\hbar (\hat{r}_i \hat{p}_j - \hat{r}_j \hat{p}_i) \end{aligned}$$

であるので、

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$$

と式 (172) を得る。同様に

$$\begin{aligned} [\hat{L}^2, \hat{L}_i] &= [\hat{L}_j \hat{L}_j, \hat{L}_i] \\ &= \hat{L}_j [\hat{L}_j, \hat{L}_i] + [\hat{L}_j, \hat{L}_i] \hat{L}_j \\ &= \hat{L}_j i\hbar \epsilon_{jik} \hat{L}_k + i\hbar \epsilon_{jik} \hat{L}_k \hat{L}_j \\ &= i\hbar \epsilon_{jik} \hat{L}_j \hat{L}_k + i\hbar \epsilon_{kij} \hat{L}_j \hat{L}_k \quad (\text{第2項で } k \text{ と } j \text{ のダミー添字を付け替え}) \\ &= i\hbar \epsilon_{jik} \hat{L}_j \hat{L}_k - i\hbar \epsilon_{jik} \hat{L}_j \hat{L}_k \quad (\text{第2項の } \epsilon \text{ の添字を入れ替え}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

と式 (173)、(174)、(175) も計算できる。