

量子力学 II 演習問題 [第 10 回] 提出の必要なし

一様磁場中の荷電粒子（電荷 Q 、質量 m_Q 、スピンなし）の量子力学を考える。磁場と軌道角運動量の相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\text{軌道}}$ と、一様磁場 $\mathbf{B}$ に対するベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は

$$\hat{H}_{\text{軌道}} = -\frac{Q}{2m_Q}(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{p}}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$$

と書くことができる。次の問に答えよ。

1. 一様磁場が z 方向を向いている（つまり $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ）とき、上記のようにとったベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の x, y, z 成分をそれぞれ書け。
2. 演算子の座標表示を用いて次の式を示せ。ただし第 2 項の ∇ は $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ にのみ作用する。

$$\hat{H}_{\text{軌道}}\psi(\mathbf{r}) = \frac{i\hbar Q}{m_Q}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) + \frac{i\hbar Q}{2m_Q}\{\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})\}\psi(\mathbf{r})$$

3. 一様磁場の場合に $\hat{H}_{\text{軌道}}$ を磁場 $\mathbf{B}$ と軌道角運動量演算子を用いて表せ。

スピン $1/2$ の粒子が磁場 $\mathbf{B}$ と

$$\hat{H}_{\text{スピン}} = -\hbar\gamma_s\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{s}}$$

という相互作用をしている。時刻 t でのスピン状態 $|\sigma(t)\rangle = c_{\uparrow}(t)|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}(t)|\downarrow\rangle$ の時間発展は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\sigma(t)\rangle = \hat{H}_{\text{スピン}}|\sigma(t)\rangle \quad (1)$$

で与えられる。 $|\uparrow\rangle$ などの定義は講義ノートと同じとする。以下の問いに答えよ。行列表示は使っても使わなくても良い。

4. 磁場が $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ のとき、 $\hat{H}_{\text{スピン}}|\uparrow\rangle$ 、 $\hat{H}_{\text{スピン}}|\downarrow\rangle$ を計算しそれぞれの状態の固有エネルギー $E_{\uparrow}$ 、 $E_{\downarrow}$ を求めよ。
5. 式 (1) に左から $\langle\downarrow|$ を作用させ、 $c_{\downarrow}(t)$ に対する微分方程式を求めよ。
6. 微分方程式を解いて $c_{\downarrow}(t)$ を求めよ。ただし $t = 0$ ときの値 $c_{\downarrow}(0)$ を用いて積分定数を決定せよ。
7. $c_{\uparrow}(t)$ の解は $c_{\downarrow}(t)$ の解で $E_{\downarrow} \rightarrow E_{\uparrow}$ 、 $c_{\downarrow}(0) \rightarrow c_{\uparrow}(0)$ と置き換えたものになる。4. で計算した固有エネルギーの具体形を用いて、 $t = 0$ で角度 θ 方向（初期角度 $\phi = 0$ とする）を向いたスピン状態 $c_{\uparrow}(0) = \cos\frac{\theta}{2}$ 、 $c_{\downarrow}(0) = \sin\frac{\theta}{2}$ の、時刻 t での y 方向成分の期待値 $\langle\sigma(t)|\hat{s}_y|\sigma(t)\rangle$ を計算せよ。
8. 同じ初期状態について、時刻 t での z 方向成分の期待値 $\langle\sigma(t)|\hat{s}_z|\sigma(t)\rangle$ を計算せよ。