

量子力学II レポート課題 [第5回] 提出期限：2024.6.19 (2024.6.12 出題)

学修番号・名前

結果だけでなく途中の式と説明も書くこと。

任意の方向を向いたスピン $1/2$ 状態は複素数 $c_\uparrow, c_\downarrow$ を用いて 2 成分スピノルで

$$|\sigma\rangle = \begin{pmatrix} c_\uparrow \\ c_\downarrow \end{pmatrix}, \quad c_\uparrow, c_\downarrow \in \mathbb{C}$$

と表される。ただし状態の規格化より $|c_\uparrow|^2 + |c_\downarrow|^2 = 1$ の関係がある。2 成分スピノルに作用するスピン演算子 $\hat{s}$ はパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて $\hat{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ (x, y, z が $1, 2, 3$ に対応) と行列表示できる。次の問に答えよ。

- $c_\uparrow, c_\downarrow$ が複素数であることに注意し、それぞれのスピンの方向の期待値 $\langle \sigma | \hat{s}_x | \sigma \rangle$ 、 $\langle \sigma | \hat{s}_y | \sigma \rangle$ 、 $\langle \sigma | \hat{s}_z | \sigma \rangle$ を $c_\uparrow, c_\downarrow$ を用いて表せ。
- $c_\uparrow = \cos \frac{\theta}{2}$ 、 $c_\downarrow = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$ のとき、 $\langle \sigma | \hat{s}_x | \sigma \rangle$ 、 $\langle \sigma | \hat{s}_y | \sigma \rangle$ 、 $\langle \sigma | \hat{s}_z | \sigma \rangle$ がそれぞれ長さ $1/2$ のベクトルの極座標表示に対応することを示せ。

講義についての質問や、ご意見ご要望があれば末尾に書いてください。