

A.3 生成消滅演算子

調和振動子の生成消滅演算子 (50)、(51) に対する一つの考え方。

古典力学の調和振動子のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

を考える。ここでは x, p は演算子ではないことに注意。質量、長さ、時間を L, M, T のべきで表すと、各物理量の次元は

$$x \sim [L], \quad p \sim [LMT^{-1}], \quad m \sim [M], \quad \omega \sim [T^{-1}], \quad \hbar \sim [L^2MT^{-1}]$$

である。これらの組み合わせで無次元の位置 X 、運動量 P を作るには

$$X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad P = \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}p$$

とすれば良い。ハミルトニアンを無次元変数で書き直し、 $\hbar\omega$ をくくり出して形式的に因数分解すれば

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar\omega}{2} \left[\frac{p^2}{\hbar m\omega} + \frac{m\omega}{\hbar}x^2 \right] \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} [X^2 + P^2] \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} (X + iP)(X - iP) \\ &= \hbar\omega \left(\frac{X + iP}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{X - iP}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

とできる。ここで分解した各項は

$$\begin{aligned} \frac{X + iP}{\sqrt{2}} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}p = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}x + i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p \right) \sim a \\ \frac{X - iP}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}x - i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p \right) \sim a^\dagger \end{aligned}$$

と生成消滅演算子と同じ形をしている。つまり生成消滅演算子はハミルトニアンから $\hbar\omega$ (上記よりエネルギーの次元 $[L^2MT^{-2}]$ を持つ) をくくり出して“因数分解”して得たものと考えることができる。ただし演算子にすると \hat{x} と \hat{p} が交換しないため、ハミルトニアンとの関係に $+1/2$ の項が出ることに注意。

A.4 数演算子の固有値が非縮退であること

調和振動子の計算で $\hat{n}(\hat{a}|\lambda) = (\lambda - 1)(\hat{a}|\lambda)$ から $\hat{a}|\lambda = N_\lambda |\lambda - 1\rangle$ とできることの説明。

$\hat{n}(\hat{a}|\lambda) = (\lambda - 1)(\hat{a}|\lambda)$ から厳密にいえることは「状態 $(\hat{a}|\lambda)$ の \hat{n} の固有値は $\lambda - 1$ である」ということで、これが $|\lambda - 1\rangle$ (固有値は $\lambda - 1$) の定数倍になるためには、数演算子 \hat{n} の固有値が**非縮退 (縮退がない)** であるという条件が必要である。「固有値が非縮退」の意味は、ある固有値を持った固有ベクトルは定数倍を除いて一意的 (ひとつしかない) ということである。非縮退であれば、 $(\hat{a}|\lambda)$ と $|\lambda - 1\rangle$ は線形従属 (比例関係) になるので、 $\hat{a}|\lambda = N_\lambda |\lambda - 1\rangle$ とかけることが従う。

縮退の具体例として、行列 \hat{A} とベクトル $|a\rangle, |b\rangle$ を

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad |a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると、

$$\hat{A}|a\rangle = 1|a\rangle, \quad \hat{A}|b\rangle = 1|b\rangle$$

なので $|a\rangle$ と $|b\rangle$ はどちらも \hat{A} の固有値 1 の固有ベクトルであるが、 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ は線形独立、つまり $c_1|a\rangle + c_2|b\rangle = \mathbf{0}$ となるのは $c_1 = c_2 = 0$ しかない。この場合は、同じ固有値 1 を持つ固有ベクトルが 2 つあるので、固有値 1 は縮退しているという。定数 α に対して $|a\rangle \neq \alpha|b\rangle$ から明らかのように、縮退がある場合は、固有値が同じでも固有ベクトルが定数倍になるとは限らない。

調和振動子の数演算子の固有値が非縮退であることは、以下の 2 通りの方法で示すことができる。比較的簡単に示すには、

- 1次元量子力学の束縛状態の波動関数は非縮退

という性質を利用することができる⁴。この性質自体は、例えば国広悌二「量子力学」(東京図書)p.22などで説明されている。調和振動子の場合、数演算子 \hat{n} とハミルトニアン \hat{H} の固有状態が同じ (§2.5) であり、ハミルトニアンの固有状態は 1次元量子力学の束縛状態 (無限遠で波動関数が 0 になる状態) であるので、上記の性質が使え、 \hat{n} の固有状態が非縮退であることがわかる。もっと直接に

- 数演算子 \hat{n} の固有状態は非縮退

も示すことができるが (例えば清水明「新版 量子論の基礎」(サイエンス社)p.178 参照)、導出には状態空間についてのやや高度な知識が必要となる (同書内で解説されている)。

⁴空間 1次元以外の場合はこの性質は成り立たない。実際に §3 で扱うように空間 3次元では角運動量による固有値の縮退が生じる。