A.5　ガウス積分

ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{71}$$

の導出。

左辺を I と置いて、I^2 を計算すると

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \\ I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

I^2 の計算で、同じ積分変数を使ってはいけないことに注意。2 次元極座標 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ に変数変換すると、$dxdy = rdrd\theta$ より

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} dr\ r \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\alpha r^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dr\ r e^{-\alpha r^2} \end{aligned}$$

$X = r^2$ とすると、$dX = 2rdr$ なので

$$\begin{aligned} I^2 &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{dX}{2r}\ r e^{-\alpha X} = \pi \int_0^{\infty} dX e^{-\alpha X} = \pi \left[\frac{e^{-\alpha X}}{-\alpha} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\alpha} \\ I &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{aligned}$$

を得る。公式の両辺を α で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} &= \frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x^2} &= \sqrt{\pi} \frac{d}{d\alpha} \alpha^{-1/2} \\ -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2 e^{-\alpha x^2} &= \sqrt{\pi} \frac{-1}{2} \alpha^{-3/2} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2 e^{-\alpha x^2} &= \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{aligned}$$

のように、x の偶数ベキを挟んだガウス積分の公式も得られる。