A.16　完全反対称テンソルを使った角運動量の計算

完全反対称テンソル ϵ_{ijk} と式 (172) の説明[8]

1) 添字 i, j, k は 1 から 3 の値をとる

2) $\epsilon_{123} = 1$ と定義

3) どの 2 つの添字の入れ替えに対しても反対称（– 符号が出る）

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad (i, j \text{ の入れ替え})$$
$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} \quad (j, k \text{ の入れ替え})$$

3) の性質より、同じ添字を含むものは 0 になる。例えば、ϵ_{iij} の i と i を入れ替えると（同じ添字を “入れ替え” ているので表記は変わらず – 符号のみが出る）

$$\epsilon_{iij} = -\epsilon_{iij}$$
$$2\epsilon_{iij} = 0$$
$$\epsilon_{iij} = 0$$

よって 0 でないのは i, j, k 全てが異なる値になった場合のみ。2) の定義を用いると

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$$
$$\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$$

であることがわかる。つまり

- 添字が 123 の偶置換（$1 \to 2 \to 3$ の順番に並んでいる）であれば $+1$
- 添字が 123 の奇置換（$3 \to 2 \to 1$ の順番に並んでいる）であれば -1
- それ以外（112、223、など全て）は 0

である。よく使う公式として

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

がある。ここでダミー添字（繰り返し添字）は和をとる規約を採用する。
ϵ_{ijk} を用いると外積は

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j$$

[8]本文では虚数単位 i、無次元の角運動量演算子 $\boldsymbol{j}$ と区別するために添え字は a, b, c を用いたが、補足では一般的によく使われる i, j, k などを用いる。どちらでも結果は同じ。

なので角運動量演算子は

$$\hat{L}_k = \epsilon_{ijk}\hat{r}_i\hat{p}_j$$

となる。角運動量の交換関係は（繰り返し添字は必ず他で使っていない文字を使う。左辺に i, j の添字があるので、計算のどの段階でも右辺各項には i, j が一つずつあるはず。$\delta_{ab}x_a = x_b$ などを使う。）

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= [\epsilon_{ik\ell}\hat{r}_k\hat{p}_\ell, \epsilon_{jmn}\hat{r}_m\hat{p}_n] \\
&= \epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmn}[\hat{r}_k\hat{p}_\ell, \hat{r}_m\hat{p}_n] \\
&= \epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmn}\{\hat{r}_k[\hat{p}_\ell, \hat{r}_m\hat{p}_n] + [\hat{r}_k, \hat{r}_m\hat{p}_n]\hat{p}_\ell\} \\
&= \epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmn}\{\hat{r}_k[\hat{p}_\ell, \hat{r}_m]\hat{p}_n + \hat{r}_m[\hat{r}_k, \hat{p}_n]\hat{p}_\ell\} \\
&= \epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmn}\{\hat{r}_k(-i\hbar\delta_{\ell m})\hat{p}_n + \hat{r}_m i\hbar\delta_{kn}\hat{p}_\ell\} \\
&= i\hbar\{-\epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmn}\delta_{\ell m}\hat{r}_k\hat{p}_n + \epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmn}\delta_{kn}\hat{r}_m\hat{p}_\ell\} \\
&= i\hbar\{-\epsilon_{ik\ell}\epsilon_{j\ell n}\hat{r}_k\hat{p}_n + \epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmk}\hat{r}_m\hat{p}_\ell\} \\
&= i\hbar\{\epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jn\ell}\hat{r}_k\hat{p}_n - \epsilon_{i\ell k}\epsilon_{jmk}\hat{r}_m\hat{p}_\ell\} \\
&= i\hbar\{(\delta_{ij}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jk})\hat{r}_k\hat{p}_n - (\delta_{ij}\delta_{\ell m} - \delta_{im}\delta_{j\ell})\hat{r}_m\hat{p}_\ell\} \\
&= i\hbar(\delta_{ij}\hat{r}_k\hat{p}_k - \hat{r}_j\hat{p}_i - \delta_{ij}\hat{r}_\ell\hat{p}_\ell + \hat{r}_i\hat{p}_j) \\
&= i\hbar(\hat{r}_i\hat{p}_j - \hat{r}_j\hat{p}_i)
\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}
i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k &= i\hbar\epsilon_{ijk}(\epsilon_{\ell mk}\hat{r}_\ell\hat{p}_m) \\
&= i\hbar(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell})\hat{r}_\ell\hat{p}_m \\
&= i\hbar(\delta_{i\ell}\delta_{jm}\hat{r}_\ell\hat{p}_m - \delta_{im}\delta_{j\ell}\hat{r}_\ell\hat{p}_k) \\
&= i\hbar(\hat{r}_i\hat{p}_j - \hat{r}_j\hat{p}_i)
\end{aligned}$$

であるので、

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

と式 (172) を得る。同様に

$$\begin{aligned}
[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_i] &= [\hat{L}_j\hat{L}_j, \hat{L}_i] \\
&= \hat{L}_j[\hat{L}_j, \hat{L}_i] + [\hat{L}_j, \hat{L}_i]\hat{L}_j \\
&= \hat{L}_j i\hbar\epsilon_{jik}\hat{L}_k + i\hbar\epsilon_{jik}\hat{L}_k\hat{L}_j \\
&= i\hbar\epsilon_{jik}\hat{L}_j\hat{L}_k + i\hbar\epsilon_{kij}\hat{L}_j\hat{L}_k \quad (\text{第 2 項で } k \text{ と } j \text{ のダミー添字を付け替え}) \\
&= i\hbar\epsilon_{jik}\hat{L}_j\hat{L}_k - i\hbar\epsilon_{jik}\hat{L}_j\hat{L}_k \quad (\text{第 2 項の } \epsilon \text{ の添字を入れ替え}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

と式 (173)、(174)、(175) も計算できる。