量子力学 II 演習問題［第 5 回］提出の必要なし

直交座標変数 (x, y, z) と極座標変数 (r, θ, ϕ) は

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

という関係にある。多変数関数の偏微分の座標変換は

$$\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}$$

のように計算できる。次の問に答えよ。

1. 関数 $f(r,\theta,\phi)$ の y 微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を極座標変数を用いて表せ。

2. $\dfrac{\partial}{\partial \phi}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を極座標変数を用いて表せ。

3. 中心力ポテンシャル $V(r)$ 中の質量 μ の粒子に対するシュレディンガー方程式は極座標を用いて、

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\psi\right\}\right] + V(r)\psi = E\psi$$

   で与えられる。波動関数を $\psi(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta,\phi)$ と変数分離して、$R(r)$ と $Y(\theta,\phi)$ が満たす微分方程式を求めよ。変数分離の際の定数は λ とする。

4. 角度方向の波動関数を $Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ と変数分離して、$\Theta(\theta)$ と $\Phi(\phi)$ が満たす微分方程式を求めよ。変数分離の際の定数は m^2 とする。

5. $\Phi(\phi)$ に関する微分方程式の解のうち、$\hat{L}_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ の固有関数となるものを示せ。

6. 波動関数 $\Phi(\phi)$ が一価となる（$\Phi(2\pi) = \Phi(0)$ となる）ことを利用し、m の値に対する条件を示せ。

7. ルジャンドル多項式の具体形は

$$P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dz^\ell}(z^2-1)^\ell$$

   で与えられる。$\ell = 2$ の場合の多項式 $P_2(z)$ を計算せよ。

8. $P_2(z)$ が以下のルジャンドルの微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}P_\ell(z)\right] + \ell(\ell+1)P_\ell(z) = 0$$

9. $z = \cos\theta$ と変数変換することで $\displaystyle\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta = \int_{-1}^1 dz$ となることを示せ。
