

量子力学II 演習問題 [第7回] 提出の必要なし

電子（位置 $\mathbf{r}_e$ 、質量 m_e ）と陽子（位置 $\mathbf{r}_p$ 、質量 m_p ）の2粒子系のハミルトニアンとシュレディンガー方程式は、波動関数を $\Phi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p)$ として

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_e^2}{2m_e} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_p^2}{2m_p} + V(|\hat{\mathbf{r}}_e - \hat{\mathbf{r}}_p|), \quad \hat{H}\Phi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p) = E\Phi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p)$$

で与えられる。ただしポテンシャルは2粒子の相対距離 $|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|$ のみの関数とする。重心座標 $\mathbf{R}$ 、相対座標 $\mathbf{r}$ 、全質量 M 、換算質量 μ は

$$\mathbf{R} = \frac{m_e \mathbf{r}_e + m_p \mathbf{r}_p}{m_e + m_p}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p, \quad M = m_e + m_p, \quad \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

とする。次の問に答えよ。

1. 全運動量 $\mathbf{P} = M d\mathbf{R}/dt$ と相対運動量 $\mathbf{p} = \mu d\mathbf{r}/dt$ を $\mathbf{p}_e = m_e d\mathbf{r}_e/dt$ と $\mathbf{p}_p = m_p d\mathbf{r}_p/dt$ を用いてあらわせ。
2. 2粒子系のハミルトニアンが重心部分 $\hat{H}_{\text{cm}}$ と相対部分 $\hat{H}_{\text{rel}}$ の和として

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{cm}} + \hat{H}_{\text{rel}}, \quad \hat{H}_{\text{cm}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}, \quad \hat{H}_{\text{rel}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\mathbf{r}}|)$$

と書けることを示せ（ $\hat{\mathbf{p}}_e$ と $\hat{\mathbf{p}}_p$ は交換する）。

3. 波動関数を $\Phi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p) = \Psi(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r})$ と変数分離し、重心運動量が消える（ $\hat{\mathbf{P}}$ の固有値が0になるように $\Psi(\mathbf{R})$ が選ばれている）座標系では相対座標のシュレディンガー方程式が

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\mathbf{r}}|) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

となることを示せ。

4. 動径方向の波動関数 $R_\ell(r)$ は、光速を c 、微細構造定数を α として微分方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r R_\ell(r)] + \left[-\frac{\hbar c \alpha}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] R_\ell(r) = E R_\ell(r)$$

に従う。 $E = -B$ と束縛エネルギー $B > 0$ を定義し、無次元変数 $\rho = \sqrt{8\mu B/(\hbar^2)} r$ と $\varepsilon = c\alpha\sqrt{\mu/(2B)}$ を使うと、 $f_\ell(\rho) = R_\ell(r)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2}{d\rho^2} f_\ell(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} f_\ell(\rho) - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} f_\ell(\rho) + \left(\frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{4} \right) f_\ell(\rho) = 0 \quad (1)$$

となることを示せ。

5. $f_\ell(\rho) = \rho^\ell e^{-\rho/2} L_\ell(\rho)$ として $df_\ell/d\rho$ を計算せよ。
6. $f_\ell(\rho) = \rho^\ell e^{-\rho/2} L_\ell(\rho)$ として $d^2 f_\ell/d\rho^2$ を計算せよ。
7. 式(1)に $f_\ell(\rho) = \rho^\ell e^{-\rho/2} L_\ell(\rho)$ を代入すると、 $L_\ell(\rho)$ に対する微分方程式が

$$\rho \frac{d^2}{d\rho^2} L_\ell(\rho) + (2\ell + 2 - \rho) \frac{d}{d\rho} L_\ell(\rho) + (\varepsilon - \ell - 1) L_\ell(\rho) = 0$$

となることを示せ（各項を $\rho^\ell e^{-\rho/2}$ に比例する形でまとめると見通しが良い）。