

量子力学II レポート課題 [第2回] 提出期限：2025.4.30 (2024.4.23 出題)

学修番号・名前

結果だけでなく途中の式と説明も書くこと。

講義ノート (62) 式、(66) 式、(72) 式より、調和振動子の第 n 励起状態の波動関数は

$$\phi_n(x) = \langle x|n\rangle \propto \langle x|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \propto \left(\sqrt{m\omega}x - \frac{\hbar}{\sqrt{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)^n \phi_0(x), \quad \phi_0(x) \propto \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right\}, \quad (1)$$

とかける (関数形にのみ興味があるので定数係数は無視)。次の問に答えよ。

1. (1) 式の変数を x から無次元変数 $Q = \sqrt{m\omega}x/\sqrt{\hbar}$ に変換した場合の波動関数 $\psi_n(Q)$ が以下のようにかけることを示せ。

$$\psi_n(Q) \propto \left(Q - \frac{d}{dQ}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}Q^2\right\},$$

2. 以下の関係が成立することを示せ。左辺の微分は指数関数と $f(Q)$ の積に作用することに注意。

$$e^{\frac{1}{2}Q^2} \frac{d}{dQ} \left[e^{-\frac{1}{2}Q^2} f(Q) \right] = \left[-Q + \frac{d}{dQ} \right] f(Q)$$

この結果は、演算子の関係として以下が成立することを表している (これらの微分は右にあるもの全てにかかるという意味)。

$$e^{\frac{1}{2}Q^2} \frac{d}{dQ} e^{-\frac{1}{2}Q^2} = -Q + \frac{d}{dQ}$$

3. 上の結果を用いて、 $\psi_n(Q)$ がエルミート多項式 $H_n(Q)$ を用いて以下のようにかけることを示せ。

$$\psi_n(Q) = e^{-\frac{1}{2}Q^2} H_n(Q), \quad H_n(Q) = (-1)^n e^{Q^2} \frac{d^n}{dQ^n} e^{-Q^2}$$

講義についての質問や、ご意見ご要望があれば末尾に書いてください。