

量子力学 II レポート課題 [第 3 回] 提出期限：2025.5.14 (2025.5.7 出題)

学修番号・名前

結果だけでなく途中の式と説明も書くこと。

直交座標変数 (x, y, z) と極座標変数 (r, θ, ϕ) の関係は

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

と与えられ、極座標変数の直交座標変数による微分は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} & -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \\ \sin \theta \sin \phi & \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} & \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

である。角運動量演算子 $\hat{\mathbf{L}}$ は、

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

と与えられ、球面調和関数の $\ell = 1, m = -1$ の場合の具体形 $Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ は

$$Y_1^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$$

である。次の問に答えよ。

1. $\hat{L}_z$ を極座標表示せよ。
2. $Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ が $\hat{L}_z$ および $\hat{\mathbf{L}}^2$ の固有関数になっていることを確かめ、それぞれの固有値を求めよ。

講義についての質問や、ご意見ご要望があれば末尾に書いてください。