量子力学 II レポート課題［第 5 回］提出期限：**2025.6.18**（2025.6.11 出題）

学修番号・名前 ________________________________

結果だけでなく**途中の式と説明も書くこと**。

任意の方向を向いたスピン 1/2 状態は複素数 $c_\uparrow, c_\downarrow$ を用いて 2 成分スピノルで

$$|\sigma\rangle = \begin{pmatrix} c_\uparrow \\ c_\downarrow \end{pmatrix}, \quad c_\uparrow, c_\downarrow \in \mathbb{C}$$

と表される。ただし状態の規格化より $|c_\uparrow|^2 + |c_\downarrow|^2 = 1$ の関係がある。2 成分スピノルに作用するスピン演算子 $\hat{\boldsymbol{s}}$ はパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて $\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{\sigma}/2$（$x, y, z$ が 1,2,3 に対応）と行列表示できる。次の問に答えよ。

1. $c_\uparrow, c_\downarrow$ が複素数であることに注意し、それぞれのスピンの方向の期待値 $\langle\sigma|\,\hat{s}_x\,|\sigma\rangle$、$\langle\sigma|\,\hat{s}_y\,|\sigma\rangle$、$\langle\sigma|\,\hat{s}_z\,|\sigma\rangle$ を $c_\uparrow, c_\downarrow$ を用いて表せ。
2. $c_\uparrow = \cos\frac{\theta}{2}$、$c_\downarrow = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}$ のとき、$\langle\sigma|\,\hat{s}_x\,|\sigma\rangle$、$\langle\sigma|\,\hat{s}_y\,|\sigma\rangle$、$\langle\sigma|\,\hat{s}_z\,|\sigma\rangle$ がそれぞれ長さ 1/2 のベクトルの極座標表示に対応することを示せ。

講義についての質問や、ご意見ご要望があれば末尾に書いてください。