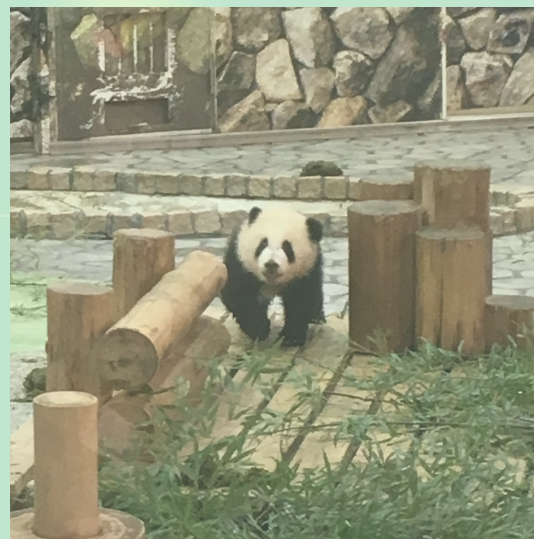


ハドロン共鳴状態の物理



兵藤 哲雄

首都大学東京

目次



導入



ハミルトニアンの固有状態としての共鳴

http://www.comp.tmu.ac.jp/hyodo/publication/Tohoku_Note1.pdf



散乱振幅の極としての共鳴

http://www.comp.tmu.ac.jp/hyodo/publication/Tohoku_Note2.pdf



まとめ

ハドロンの分類

観測されているハドロン

PDG2018 : <http://pdg.lbl.gov/>

観測されるハドロンは**カラー1重項のみ**

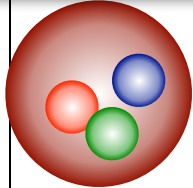
→ カラー閉じ込めの問題

フレーバー量子数は $qqq/q\bar{q}$ で記述できるもののみ

なぜ $qq\bar{q}\bar{q}$, $qqqq\bar{q}$, ... 状態が存在しないのか?

→ エキゾチックハドロンの問題

$\Lambda(2700)$ $13/2^+$ **	$\Lambda(1710)$ $1/2^-$ *	$\Sigma(3000)$ *
$\Lambda(1800)$ $1/2^-$ ***	$\Lambda(1810)$ $1/2^+$ ***	$\Sigma(3170)$ *
$\Lambda(1820)$ $5/2^+$ ****	$\Lambda(1830)$ $5/2^-$ ****	
$\Lambda(1890)$ $3/2^+$ ****	$\Lambda(2000)$ *	
$\Lambda(2020)$ $7/2^+$ *	$\Lambda(2100)$ $7/2^-$ ****	
$\Lambda(2110)$ $5/2^+$ ***	$\Lambda(2325)$ $3/2^-$ *	
$\Lambda(2350)$ $9/2^+$ ***	$\Lambda(2585)$ **	



Σ_b $1/2^+$ ***
Σ_b^- $3/2^+$ ***
Ξ_b^0 $1/2^+$ ***
$\Xi_b(5935)^-$ $1/2^+$ ***
$\Xi_b(5945)^0$ $3/2^+$ ***
$\Xi_b(5955)^-$ $3/2^+$ ***
Ω_b^- $1/2^+$ ***

バリオン ~ 150種

$a_1(1640)$ $1^-(1^{++})$	$a_0(2490)$ $1^-(6^{++})$	$D_0^*(2400)^0$ $1/2(0^+)$	BOTTOM, CHARMED ($B=C=\pm 1$)	$\chi_{b1}(1P)$ $0^-(1^{++})$
$f_2(1640)$ $0^+(2^{++})$	$f_0(2510)$ $0^+(6^{++})$	$D_0^*(2400)^{\pm}$ $1/2(0^+)$		$\chi_{b2}(1P)$ $0^+(2^{++})$
$\omega(1650)$ $0^-(1^-)$		$D_1(2420)^0$ $1/2(1^+)$		$\eta_b(2S)$ $0^+(0^{++})$
$\omega_3(1670)$ $0^-(3^-)$		$D_1(2420)^{\pm}$ $1/2(2^+)$		$\eta_b(2S)$ $0^-(1^-)$
$\pi_2(1670)$ $1^-(2^{++})$		$D_1(2430)^0$ $1/2(1^+)$		$\eta_b(2S)$ $0^-(2^{++})$
		$D_2(2460)^0$ $1/2(2^+)$		$\eta_b(2S)$ $0^-(0^{++})$
		$D_2(2460)^{\pm}$ $1/2(2^+)$		$\chi_{b3}(2P)$ $0^+(1^{++})$
		$D(2550)^0$ $1/2(0^-)$		$h_b(2P)$ $?^?(1^{++})$
		$D(2600)$ $1/2(?)$		$\chi_{b3}(2P)$ $0^+(2^{++})$
		$D^*(2640)^{\pm}$ $1/2(?)$		$\tilde{T}(3S)$ $0^-(1^-)$
		$D(2750)$ $1/2(?)$	$\chi_{b3}(3P)$ $0^+(1^{++})$	
			$\tilde{T}(4S)$ $0^-(1^-)$	

メソン ~ 210種

$\chi(10610)^{\pm}$ $1^+(1^+)$
$\chi(10610)^0$ $1^+(1^+)$
$\chi(10650)^{\pm}$ $?^+(1^+)$
$\gamma(10860)$ $0^-(1^-)$
$\gamma(11020)$ $0^-(1^-)$

全ての状態がQCDラグランジアンから出てくる

エキゾチックハドロンの候補

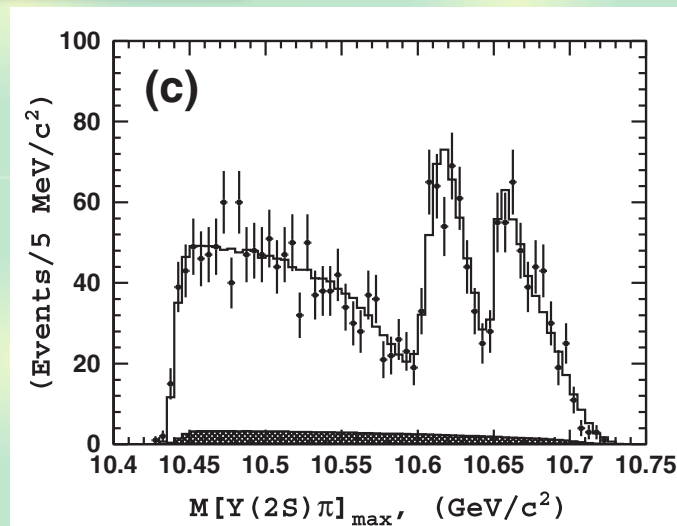
テトラクォーク (Belle)

: $Z_b(10610)$, $Z_b(10650)$

$$Y(5S) \rightarrow \pi^\pm + Z_b$$

$$\hookrightarrow Y(nS)(b\bar{b}) + \pi^\mp(u\bar{d}/d\bar{u})$$

A. Bondar, *et al.*, Phys. Rev. Lett. 108, 122001 (2012)



ペンタクォーク (LHCb)

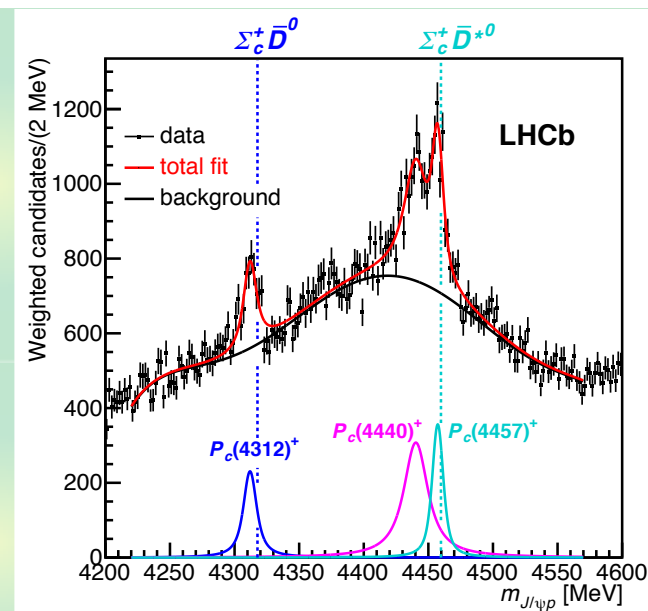
: $P_c(4450)$, $P_c(4380)$

$$\Lambda_b \rightarrow K^- + P_c$$

$$\hookrightarrow J/\psi(c\bar{c}) + p(uud)$$

R. Aaij, *et al.*, Phys. Rev. Lett. 115, 072001 (2015)

R. Aaij, *et al.*, arXiv:1904.03947[hep-ex]

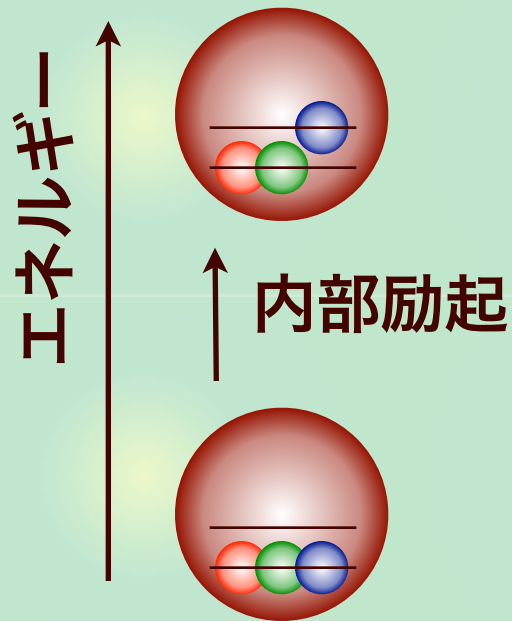


ごく少数しか観測されていない。なぜ少ないのか？

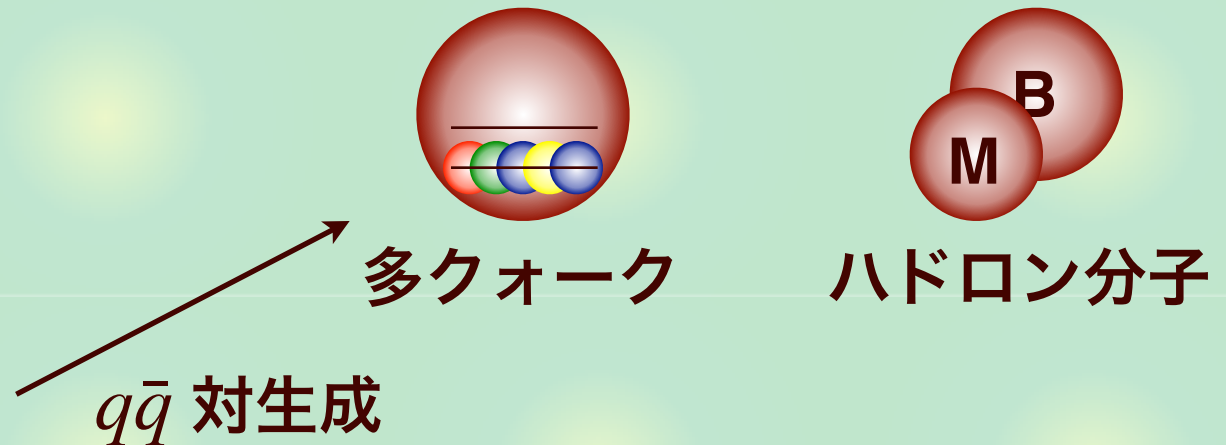
ハドロン励起状態の多様な構造

ハドロン励起状態の記述

通常 of 構造



エキゾチック構造



QCDでは qqq 以外の構造が自然に出てくる。

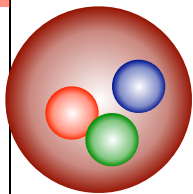
- バリオンは qqq とエキゾチック構造の重ね合わせ
- どのようにして異なる構造を区別するか？

強い相互作用で不安定なハドロン

ハドロンの共鳴状態

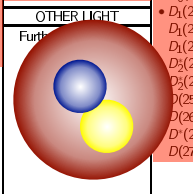
PDG2018 : <http://pdg.lbl.gov/>

p	$1/2^+$ ****	$\Delta(1232)$	$3/2^+$ ****	Σ^+	$1/2^+$ ****	Ξ^0	$1/2^+$ ****	Λ_c^+	$1/2^+$ ****
n	$1/2^+$ ****	$\Delta(1600)$	$3/2^+$ ***	Σ^0	$1/2^+$ ****	Ξ^-	$1/2^+$ ****	$\Lambda_c(2595)^+$	$1/2^-$ ***
$N(1440)$	$1/2^+$ ****	$\Delta(1620)$	$1/2^-$ ****	Σ^-	$1/2^+$ ****	$\Xi(1530)$	$3/2^+$ ****	$\Lambda_c(2625)^+$	$3/2^-$ **
$N(1520)$	$3/2^-$ ****	$\Delta(1700)$	$3/2^-$ ****	$\Sigma(1385)$	$3/2^+$ ****	$\Xi(1620)$	*	$\Lambda_c(2765)^+$	*
$N(1535)$	$1/2^-$ ****	$\Delta(1750)$	$1/2^+$ *	$\Sigma(1480)$	*	$\Xi(1690)$	*	$\Lambda_c(2880)^+$	$5/2^+$ ***
$N(1650)$	$1/2^-$ ****	$\Delta(1900)$	$1/2^-$ **	$\Sigma(1560)$	**	$\Xi(1820)$	$3/2^-$ ***	$\Lambda_c(2940)^+$	***
$N(1675)$	$5/2^-$ ****	$\Delta(1905)$	$5/2^+$ ****	$\Sigma(1580)$	$3/2^-$ *	$\Xi(1950)$	*	$\Sigma_c(2455)$	$1/2^+$ ****
$N(1680)$	$5/2^+$ ****	$\Delta(1910)$	$1/2^+$ ****	$\Sigma(1620)$	$1/2^-$ *	$\Xi(2030)$	$\geq \frac{5}{2}^?$ ***	$\Sigma_c(2520)$	$3/2^+$ ***
$N(1685)$	*	$\Delta(1920)$	$3/2^+$ ***	$\Sigma(1660)$	$1/2^+$ ***	$\Xi(2120)$	*	$\Sigma_c(2800)$	***
$N(1700)$	$3/2^-$ ***	$\Delta(1930)$	$5/2^-$ **	$\Sigma(1670)$	$3/2^-$ ****	$\Xi(2250)$	**	Ξ_c	$1/2^+$ ***
$N(1710)$	$1/2^+$ ***	$\Delta(1940)$	$3/2^-$ **	$\Sigma(1690)$	**	$\Xi(2370)$	**	Ξ_c	$1/2^+$ ***
$N(1720)$	$3/2^+$ ****	$\Delta(1950)$	$7/2^+$ ****	$\Sigma(1730)$	$3/2^+$ *	$\Xi(2500)$	*	Ξ_c	$1/2^+$ ***
$N(1860)$	$5/2^+$ **	$\Delta(2000)$	$5/2^+$ **	$\Sigma(1750)$	$1/2^-$ **	Ω^- $3/2^+$ ****			Ξ_c 2645 $3/2^+$ ***
$N(1875)$	$3/2^-$ ***	$\Delta(2150)$	$1/2^-$ *	$\Sigma(1770)$	$1/2^+$ **	$\Omega(2250)^-$ ****			Ξ_c 2790 $1/2^-$ ***
$N(1880)$	$1/2^+$ **	$\Delta(2200)$	$7/2^-$ *	$\Sigma(1775)$	$5/2^-$ ****	$\Omega(2380)^-$ **			Ξ_c 2815 $3/2^-$ ***
$N(1895)$	$1/2^-$ **	$\Delta(2300)$	$9/2^+$ **	$\Sigma(1840)$	$3/2^+$ *	$\Omega(2470)^-$ **			Ξ_c 2930 *
$N(1900)$	$3/2^+$ ***	$\Delta(2350)$	$5/2^-$ **	$\Sigma(1880)$	$1/2^+$ **	Ω_c^0 $1/2^+$ ***			Ξ_c 2980 **
$N(1990)$	$7/2^+$ **	$\Delta(2390)$	$7/2^+$ *	$\Sigma(1900)$	$1/2^-$ *	$\Omega_c(2770)^0$ $3/2^+$ ***			Ξ_c 3055 ***
$N(2000)$	$5/2^+$ **	$\Delta(2400)$	$9/2^-$ **	$\Sigma(1915)$	$5/2^+$ ****	Ξ_c 3080 ***			Ξ_c 3123 *
$N(2040)$	$3/2^+$ **	$\Delta(2420)$	$11/2^+$ ****	$\Sigma(1940)$	$3/2^+$ *	Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
$N(2060)$	$5/2^-$ **	$\Delta(2750)$	$13/2^-$ **	$\Sigma(1940)$	$3/2^-$ ***	$\Omega_c(2980)$ **			$\Omega_c(2980)$ **
$N(2100)$	$1/2^+$ *	$\Delta(2950)$	$15/2^+$ **	$\Sigma(2000)$	$1/2^-$ *	Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
$N(2120)$	$3/2^-$ **	Λ $1/2^+$ ****		$\Sigma(2030)$	$7/2^+$ ****	Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
$N(2190)$	$7/2^-$ ****	$\Lambda(1405)$	$1/2^-$ ****	$\Sigma(2070)$	$5/2^+$ *	$\Omega_c(2770)^0$ $3/2^+$ ***			$\Omega_c(2770)^0$ $3/2^+$ ***
$N(2220)$	$9/2^+$ ****	$\Lambda(1520)$	$3/2^-$ ****	$\Sigma(2080)$	$3/2^+$ **	Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
$N(2250)$	$9/2^-$ ****	$\Lambda(1600)$	$1/2^+$ ****	$\Sigma(2100)$	$7/2^-$ *	Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
$N(2300)$	$1/2^+$ ***	$\Lambda(1670)$	$1/2^-$ ****	$\Sigma(2250)$	***	Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
$N(2570)$	$5/2^-$ **	$\Lambda(1690)$	$3/2^-$ ****	$\Sigma(2455)$	**	Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
$N(2600)$	$11/2^-$ ***	$\Lambda(1710)$	$1/2^+$ *	$\Sigma(2620)$	**	Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
$N(2700)$	$13/2^+$ **	$\Lambda(1800)$	$1/2^-$ ***	$\Sigma(3000)$	*	Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
		$\Lambda(1810)$	$1/2^+$ ***	$\Sigma(3170)$	*	Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
		$\Lambda(1820)$	$5/2^+$ ****			Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
		$\Lambda(1830)$	$5/2^-$ ****			Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
		$\Lambda(1890)$	$3/2^+$ ****			Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
		$\Lambda(2000)$	*			Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
		$\Lambda(2020)$	$7/2^+$ *			Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
		$\Lambda(2050)$	$3/2^-$ *			Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
		$\Lambda(2100)$	$7/2^-$ ****			Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
		$\Lambda(2110)$	$5/2^+$ ***			Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
		$\Lambda(2325)$	$3/2^-$ *			Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***
		$\Lambda(2350)$	$9/2^+$ ***			Ξ_c 3055 ***			Ξ_c 3080 ***
		$\Lambda(2585)$	**			Ξ_c 3123 *			Ω_c^0 $1/2^+$ ***



バリオン ~ 150種

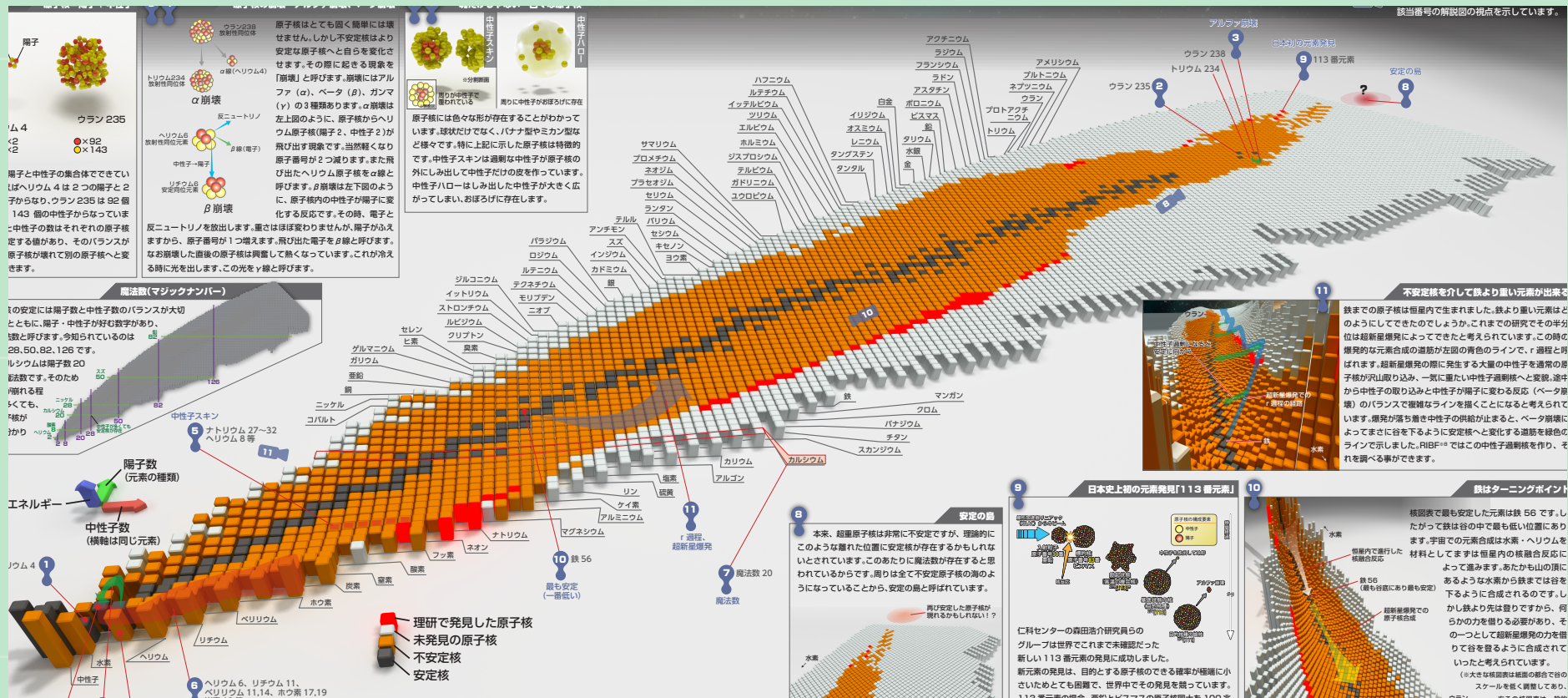
LIGHT UNFLAVORED ($S = C = B = 0$)		STRANGE ($S = \pm 1, C = B = 0$)		CHARMED, STRANGE ($C = S = \pm 1$)	$c\bar{c}$ $F_1(F_0)$
$F_1(F_0)$	$F_1(F_0)$	$F_1(F_0)$	$F_1(F_0)$	$F_1(F_0)$	$F_1(F_0)$
π^+ $1^-(0^-)$	ρ^+ $1^-(0^-)$	K^+ $1/2(0^-)$	D_s^+ $0(0^-)$	B_c^+ $0(0^-)$	$\eta_c(1S)$ $0^+(0^-)$
π^0 $1^-(0^-)$	ρ^0 $1^-(0^-)$	K^0 $1/2(0^-)$	D_s^0 $0(0^-)$	B_c^0 $0(0^-)$	$J/\psi(1S)$ $0^-(0^-)$
η $0^+(0^+)$	$\eta(500)$ $0^+(0^+)$	K_S^0 $1/2(0^-)$	$D_{s1}(2317)^+$ $0(0^+)$	$B_{c1}(2317)^+$ $0(0^+)$	$\chi_{c0}(1P)$ $0^+(0^+)$
$\omega(782)$ $0^-(1^-)$	$\eta(760)$ $0^-(1^-)$	K_L^0 $1/2(0^-)$	$D_{s1}(2460)^+$ $0(1^+)$	$B_{c1}(2460)^+$ $0(1^+)$	$\chi_{c1}(1P)$ $0^+(1^+)$
$\rho(770)$ $1^+(1^-)$	$\eta(1760)$ $0^-(0^+)$	$K_S^0(800)$ $1/2(0^+)$	$D_{s1}(2536)^+$ $0(1^+)$	$B_{c1}(2536)^+$ $0(1^+)$	$h_c(1P)$ $?^?(1^+)$
$\omega(1370)$ $0^-(1^-)$	$\eta(1600)$ $0^-(1^-)$	$K^*(892)$ $1/2(1^-)$	$D_{s1}(2573)$ $0(0^+)$	$B_{c1}(2573)$ $0(0^+)$	$\chi_{c2}(1P)$ $0^+(2^+)$
$\eta(958)$ $0^-(0^+)$	$\eta(1800)$ $1^-(0^+)$	$K_1^*(1270)$ $1/2(1^-)$	$D_{s1}(2700)^+$ $0(1^-)$	$B_{c1}(2700)^+$ $0(1^-)$	$\eta_c(2S)$ $0^+(0^+)$
$f_0(980)$ $0^+(0^+)$	$f_0(1810)$ $0^+(2^+)$	$K_1^*(1400)$ $1/2(1^-)$	$D_{s1}(2860)^+$ $0(0^+)$	$B_{c1}(2860)^+$ $0(0^+)$	$\psi(2S)$ $0^-(1^-)$
$a_0(980)$ $1^-(0^+)$	$X(1835)$ $?^?(2^+)$	$K^*(1410)$ $1/2(1^-)$	$D_{s1}(3004)^+$ $0(0^+)$	$B_{c1}(3004)^+$ $0(0^+)$	$\chi(3723)$ $?^?(2^+)$
$\phi(1020)$ $0^-(1^-)$	$X(1840)$ $?^?(2^+)$	$K_0^*(1430)$ $1/2(0^-)$			$X(3872)$ $0^+(1^+)$
$h_1(1170)$ $0^-(1^+)$	$\eta_2(1850)$ $0^-(3^-)$	$K_2^*(1430)$ $1/2(2^+)$			$X(3900)^0$ $?^?(1^+)$
$b_1(1235)$ $1^+(1^+)$	$\eta_2(1870)$ $0^-(2^+)$	$K(1460)$ $1/2(0^-)$			$X(3900)^0$ $?^?(2^+)$
$a_1(1260)$ $1^-(1^+)$	$\eta_2(1880)$ $1^-(2^+)$	$K(1580)$ $1/2(2^-)$			$\chi_{c0}(3915)$ $0^+(0^+)$
$f_2(1270)$ $0^+(2^+)$	$\eta_2(1900)$ $1^-(1^-)$	$K(1630)$ $1/2(2^+)$			$\chi_{c2}(3915)$ $0^+(2^+)$
$f_1(1285)$ $0^+(1^+)$	$f_2(1910)$ $0^+(2^+)$	$K(1650)$ $1/2(1^+)$			$X(3940)$ $?^?(2^+)$
$\eta(1295)$ $0^+(0^+)$	$f_2(1950)$ $0^+(2^+)$	$K^*(1680)$ $1/2(1^-)$			$X(4020)$ $?^?(2^+)$
$\pi(1300)$ $1^-(0^+)$	$f_2(1990)$ $1^+(3^-)$	$K_2^*(1770)$ $1/2(2^-)$			$\psi(4040)$ $0^-(1^-)$
$a_2(1320)$ $1^-(2^+)$	$f_2(2010)$ $0^+(2^+)$	$K_2^*(1780)$ $1/2(3^-)$			$X(4050)$ $?^?(2^+)$
$f_0(1370)$ $0^+(0^+)$	$f_2(2020)$ $0^+(0^+)$	$K_2^*(1820)$ $1/2(2^-)$			$X(4140)$ $0^+(2^+)$
$h_1(1380)$ $?^?(1^+)$	$a_4(2040)$ $1^-(4^+)$	$K(1830)$ $1/2(0^-)$			$\psi(4160)$ $0^-(1^-)$
$\eta_1(1400)$ $1^-(1^+)$	$f_4(2050)$ $0^+(4^+)$	$K_2^*(1950)$ $1/2(0^+)$			$X(4150)$ $?^?(2^+)$
$\eta(1405)$ $0^-(0^+)$	$\eta_2(2100)$ $1^-(2^+)$	$K_2^*(1980)$ $1/2(2^+)$			$X(4230)$ $?^?(1^-)$
$f_1(1420)$ $0^+(1^+)$	$f_2(2100)$ $0^+(0^+)$	$K_2^*(2045)$ $1/2(4^+)$			$X(4240)$ $?^?(2^+)$
$\omega(1420)$ $0^-(1^-)$	$f_2(2150)$ $0^+(2^+)$	$K_2^*(2250)$ $1/2(2^+)$			$X(4250)$ $?^?(2^+)$
$f_2(1430)$ $0^+(2^+)$	$\rho(2150)$ $1^+(1^-)$	$K_2^*(2380)$ $1/2(5^-)$			$X(4260)$ $?^?(1^-)$
$a_0(1450)$ $1^-(0^+)$	$\phi(2170)$ $0^-(1^-)$	$K_2^*(2400)$ $1/2(5^+)$			$X(4350)$ $0^+(2^+)$
$\rho(1450)$ $1^-(1^-)$	$f_2(2200)$ $0^+(0^+)$	$K_2^*(2430)$ $1/2(5^+)$			$X(4360)$ $?^?(1^-)$
$\eta(1475)$ $0^+(0^+)$	$f_2(2220)$ $0^+(2^+)$	$K(2450)$ $1/2(4^-)$			$\psi(4415)$ $0^-(1^-)$
$f_0(1500)$ $0^+(0^+)$	$\eta(2225)$ $0^+(0^+)$	$K(2450)$ $1/2(4^-)$			$X(4430)$ $?^?(1^+)$
$f_1(1510)$ $0^+(1^+)$	$\rho_3(2250)$ $1^+(3^-)$	$K(2450)$ $1/2(4^-)$			$X(4660)$ $?^?(1^-)$
$f_2^*(1525)$ $0^+(2^+)$	$f_2(2300)$ $0^+(2^+)$	B_c^0 $0(0^-)$			
$f_2^*(1565)$ $0^+(2^+)$	$f_2(2300)$ $0^+(4^+)$	B_c^+ $0(1^-)$			
$\rho(1570)$ $1^-(1^+)$	$f_2(2330)$ $0^+(0^+)$	$B_c^0(5830)^0$ $0(1^+)$			
$h_1(1595)$ $0^-(1^+)$	$f_2(2340)$ $0^+(2^+)$	$B_c^+(5840)^+$ $0(2^+)$			
$\eta_1(1600)$ $1^-(1^+)$	$\rho_3(2350)$ $1^+(5^-)$	$B_c^-(5850)$ $?^?(2^+)$			
$a_1(1640)$ $1^-(1^+)$	$a_2(2450)$ $1^-(6^+)$				
$f_2(1640)$ $0^+(2^+)$	$f_2(2510)$ $0^+(6^+)$				
$\rho_3(1645)$ $0^-(2^+)$					
$\omega(1650)$ $0^-(1^-)$					
$\omega_3(1670)$ $0^-(3^-)$					
$\rho_2(1670)$ $1^-(2^+)$					



メソン ~ 210種

- 強い相互作用に対し安定/不安定
- 励起状態はほとんど不安定 → 共鳴状態の構造？

安定核 (~300), 不安定核 (~2000)



<https://www.nishina.riken.jp/enjoy/kakuzu/index.html>

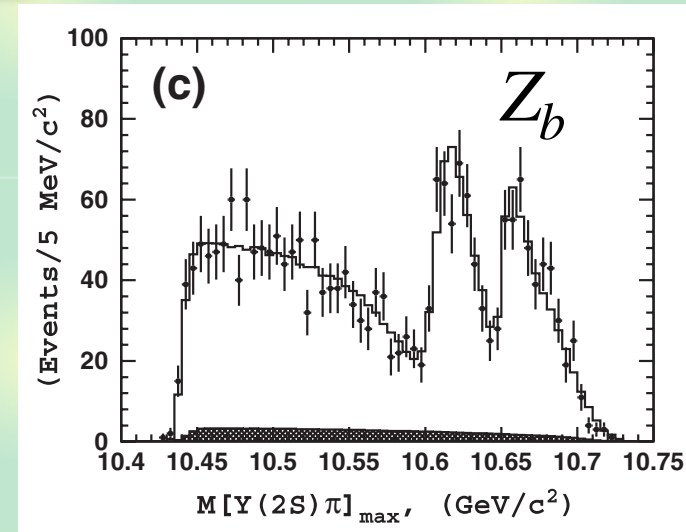
不安定核の構造

- クラスタ、ハロー原子核、エフィモフ効果

共鳴の特徴づけ

共鳴状態とは？

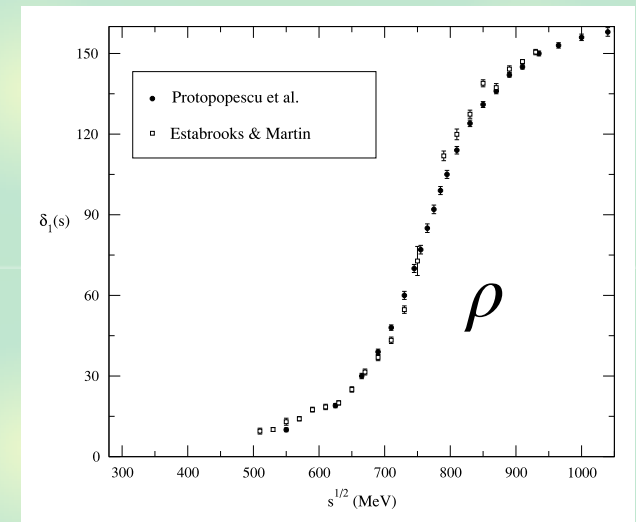
- 量子力学的の準安定な”状態”
- 時間がたつと崩壊する



様々な特徴づけ

- スペクトル、散乱断面積のピーク
- 位相差が $\pi/2$ を切るエネルギー
- 散乱振幅の極
- 複素エネルギー固有状態

A. Bondar, *et al.*, Phys. Rev. Lett. 108, 122001 (2012)

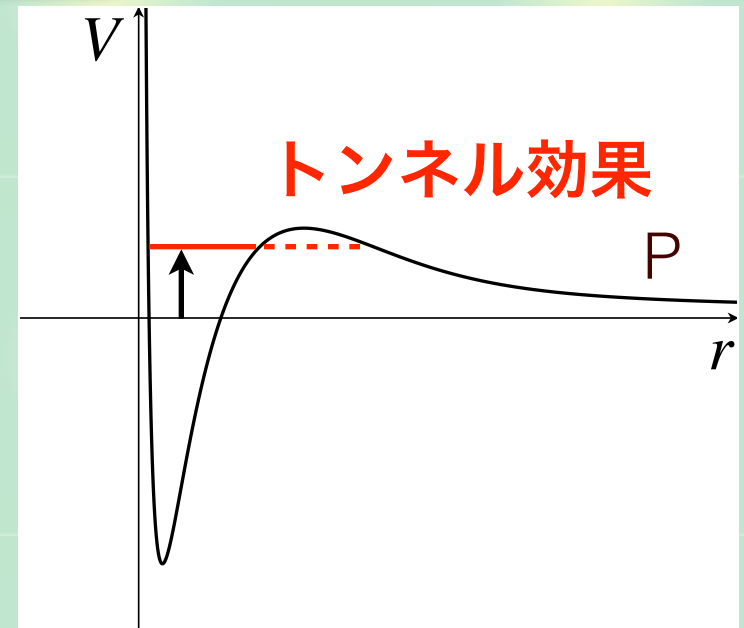


J.R. Pelaez, Phys. Rept. 658, 1 (2016)

共鳴状態の分類

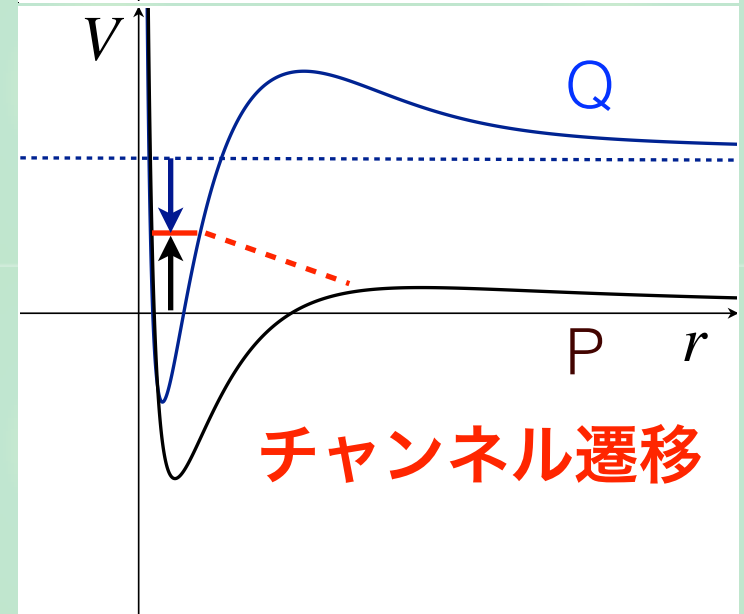
1) 形状（ポテンシャル）共鳴

- 1チャンネル問題 (P)
- ポテンシャル障壁 : $E > 0$
- トンネル効果で不安定



2) フェッシュバッハ共鳴

- チャンネル結合問題 ($P+Q$)
- Q の束縛状態: $E_Q < 0$, $E_P > 0$
- チャンネル遷移により不安定



両者は区別できるか？どのように？

ガモフ理論

α 崩壊の理論（ガモフ因子など）の論文

G. Gamow, Z. Phys. 51, 204 (1928)

- 固有エネルギーの虚部を手で導入

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, müssen wir annehmen, daß die Schwingungen gedämpft sind, und E komplex setzen:

$$E = E_0 + i \frac{\hbar \lambda}{4\pi},$$

wo E_0 die gewöhnliche Energie ist und λ das Dämpfungsdekrement (Zerfallskonstante). Dann sehen wir aber aus den Relationen (2a) und (2b),

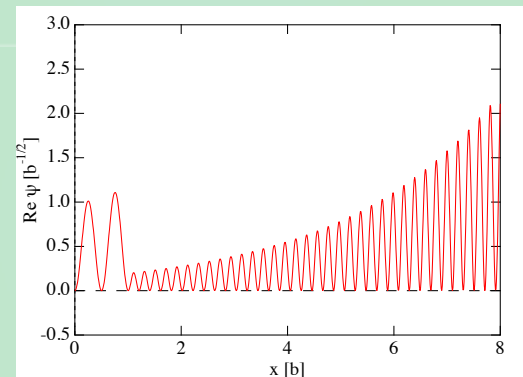
- 時間依存性（符号に注意）：確率が時間とともに減衰する

$$\psi = \Psi(q) \cdot e^{+\frac{2\pi i E}{\hbar} t} \propto e^{+iE_0 t/\hbar} e^{-(\lambda/2)t}, \quad |\psi|^2 \propto e^{-\lambda t}$$

- 問題点：固有運動量 p も複素数

$$\Psi \rightarrow e^{ipr} = e^{i\text{Re}[p]r} e^{-\text{Im}[p]r}$$

振動 発散



目次



導入



ハミルトニアンの固有状態としての共鳴

http://www.comp.tmu.ac.jp/hyodo/publication/Tohoku_Note1.pdf



散乱振幅の極としての共鳴

http://www.comp.tmu.ac.jp/hyodo/publication/Tohoku_Note2.pdf



まとめ

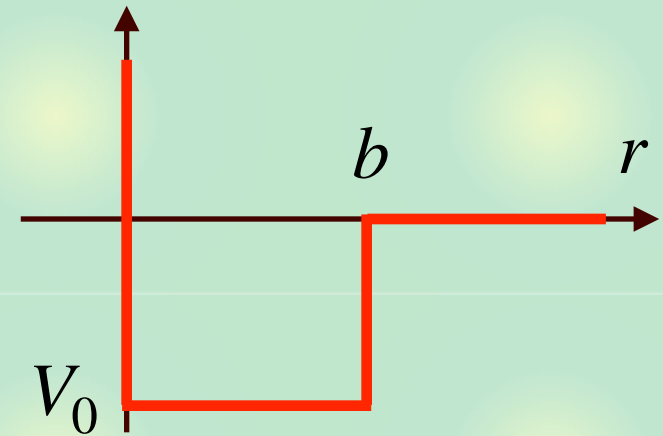
井戸型ポテンシャル問題

1次元量子力学 ($\hbar = 1$, $m = 1$, 3次元の動径方向)

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + V(r) \psi(r) = E \psi(r)$$

- 井戸型ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (0 \leq r \leq b) \\ 0 & (b < r) \end{cases}$$

- 散乱解 ($E > 0$, 連続固有状態、境界条件 $\psi(r = 0) = 0$)

$$\psi(r) = \begin{cases} \sin(\sqrt{2(E + V_0)}r) & (0 \leq r \leq b) \\ A^-(p)e^{-i\sqrt{2E}r} + A^+(p)e^{+i\sqrt{2E}r} & (b < r) \end{cases}$$

散乱解は規格化できない

束縛解

束縛解 ($E < 0$ 、離散固有状態)

- 固有運動量 $p = \sqrt{2E}$ は純虚数

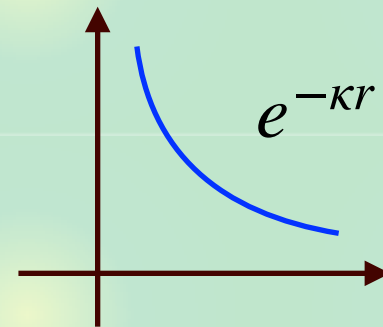
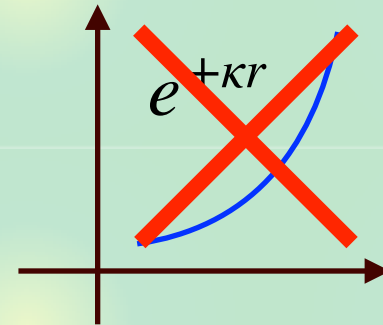
$$p = i\kappa, \quad \kappa > 0$$

- $b < r$ の波動関数

~~$$\psi(r) = A^-(p)e^{+\kappa r} + A^+(p)e^{-\kappa r}$$~~

- 境界条件 $\psi(r \rightarrow \infty) = 0$ より、 $A^-(p) = 0$

- $e^{-\kappa r} = e^{+ipr}$: 外向き (r が増える方向) の波

離散固有状態の境界条件： $r \rightarrow \infty$ で外向きの波のみ

共鳴解

束縛解の純虚数の運動量 $p = i\kappa$

- 物理的な運動量 p は実数
- 束縛状態は運動量を純虚数に解析接続して得られた解

共鳴解：運動量 p を複素数に解析接続した解

- 境界条件は「外向きの波のみ」： $A^-(p) = 0$

	$p \text{ [b}^{-1}\text{]}$	$E = p^2/2 \text{ [b}^{-2}\text{]}$
束縛状態	$+3.68i$	-6.78
第 1 共鳴	$1.06-1.02i$	$0.05-1.08i$
第 2 共鳴	$6.28-1.41i$	$18.8-8.86i$

共鳴解は無数個存在する

目次



導入



ハミルトニアンの固有状態としての共鳴

http://www.comp.tmu.ac.jp/hyodo/publication/Tohoku_Note1.pdf



散乱振幅の極としての共鳴

http://www.comp.tmu.ac.jp/hyodo/publication/Tohoku_Note2.pdf



まとめ

ヨスト関数、S行列、散乱振幅

散乱の波動関数の漸近形（運動量 p 、角運動量 $\ell = 0$ ）

$$\psi_p(r) \rightarrow J(p)e^{-ipr} - J(-p)e^{+ipr} \quad (r \rightarrow \infty)$$

- ヨスト関数 $J(p)$ ：内向きの波 e^{-ipr} の振幅

S行列：入射波（内向き）がどれだけ散乱（外向き）されたか

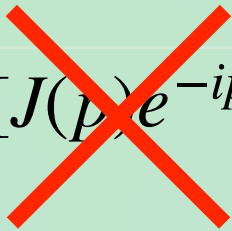
$$s(p) = \frac{J(-p)}{J(p)}$$

散乱振幅

$$f(p) = \frac{s(p) - 1}{2ip} = \frac{J(-p) - J(p)}{2ipJ(p)}$$

共鳴条件

「外向きの波のみ」の条件


$$\psi_p(r) \rightarrow [J(p)e^{-ipr} - J(-p)e^{+ipr}] \quad (r \rightarrow \infty)$$

- ヨスト関数の**ゼロ点** $J(p_R) = 0$ ただし p_R は複素数

S行列の**極**（発散するエネルギー、分母のゼロ点）

$$s(p_R) = \frac{J(-p_R)}{J(p_R)} \rightarrow \infty$$

散乱振幅の**極**

$$f(p_R) = \frac{J(-p_R) - J(p_R)}{2ip_R J(p_R)} \rightarrow \infty$$

複素エネルギーとリーマン面

エネルギーと運動量の関係

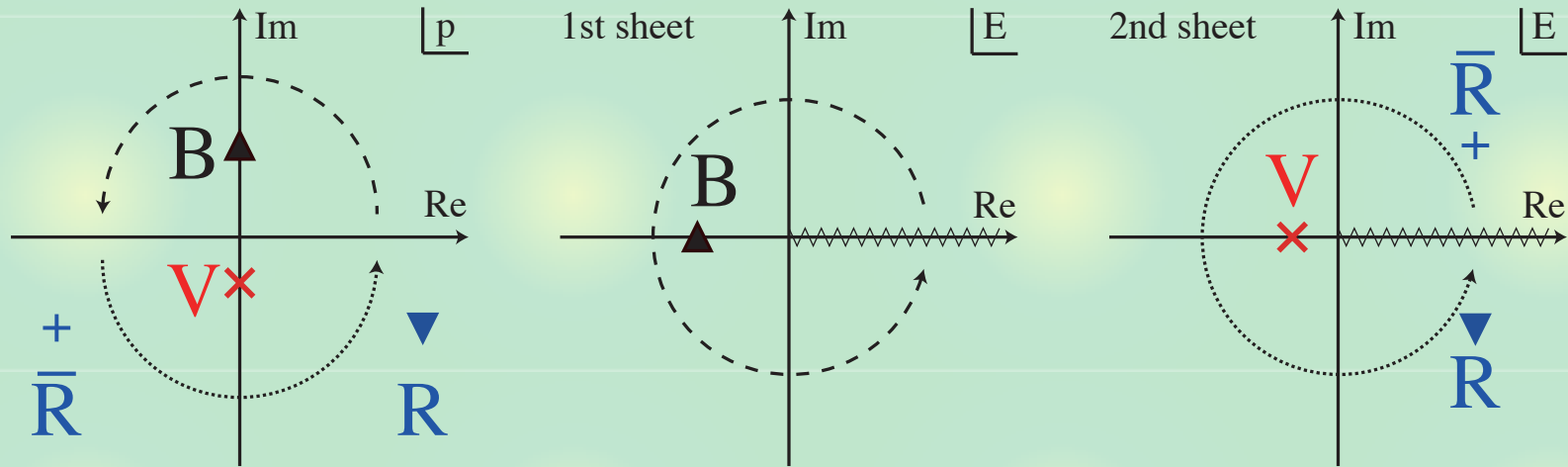
$$E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{|p|^2}{2\mu} e^{2i\theta_p}$$
$$= |E| e^{i\theta_E}$$

- 運動量を複素数にする： $p = |p| e^{i\theta_p}$
- θ_p が $0 \rightarrow 2\pi$ のとき θ_E は $0 \rightarrow 4\pi$
- p と $-p$ は $(\theta_p$ と $\theta_p + \pi)$ 同じ複素エネルギーを表す

運動量の関数はエネルギーのリーマン面2枚が必要

運動量とエネルギーの固有値

複素運動量平面と複素エネルギー平面



- ヨスト関数の性質 $J(p) = J(-p^*)$: p が解なら $-p^*$ も解
- 束縛状態(B) : 純虚数の解 ($p = -p^*$)

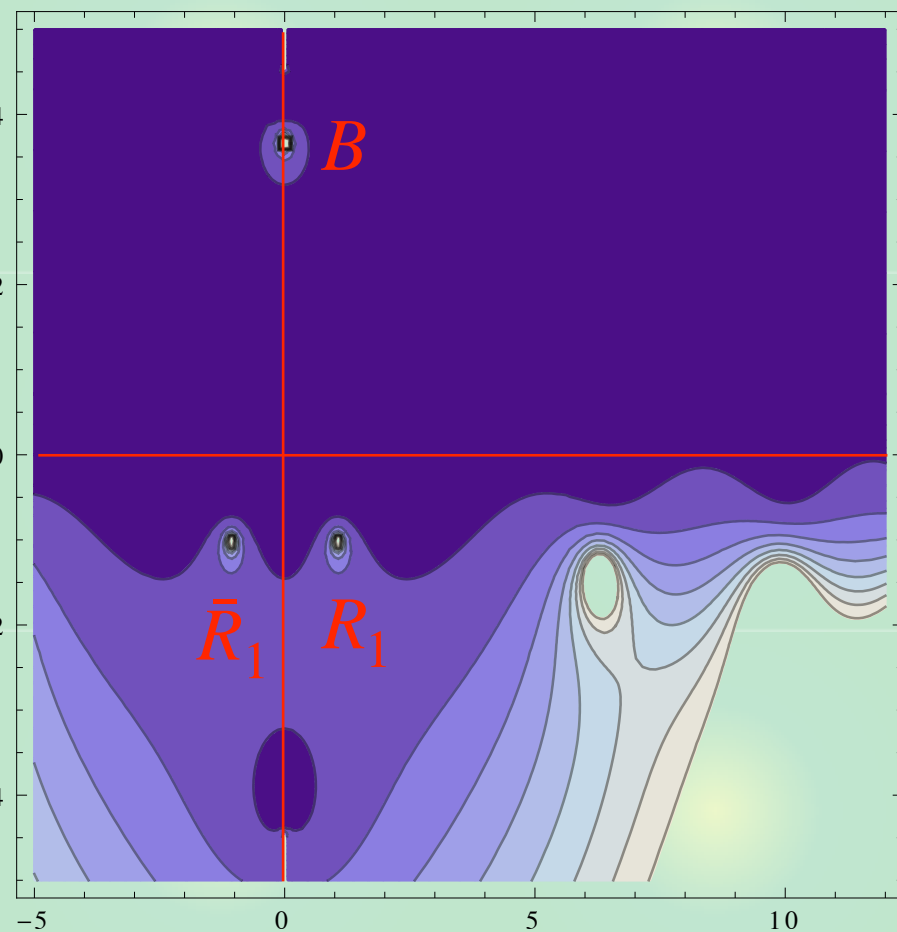
共鳴状態(R) : 複素数の解 ($-p^*$ は anti-resonance)

- 第2リーマン面の第4象限に存在

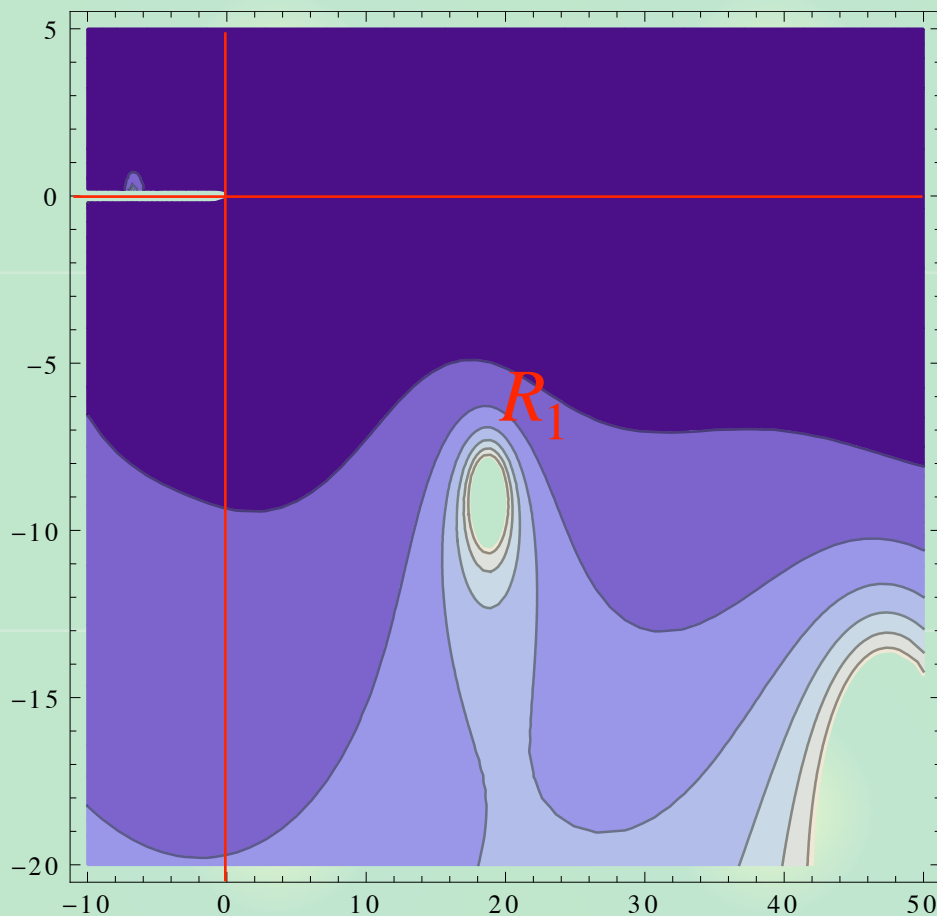
運動量とエネルギーの固有値

井戸型ポテンシャルの場合（ $1/J(p)$ のプロット）

運動量



エネルギー（第2リーマン面）



位相差への影響

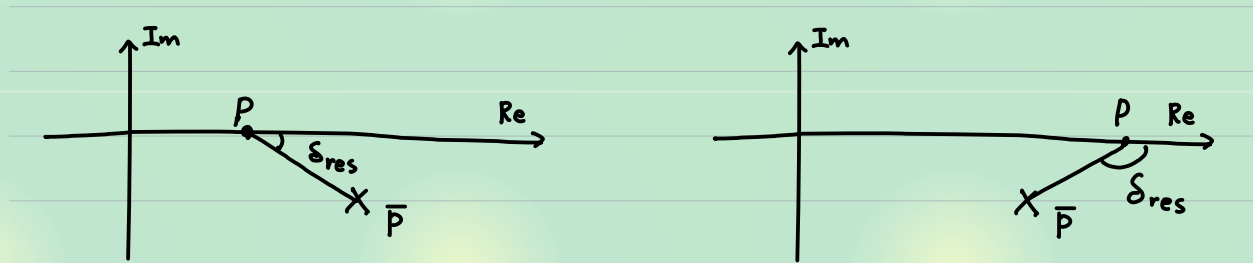
共鳴運動量 p_R の近くの実数の運動量 p に対して

$$J(p) = J(p_R) + \left. \frac{dJ(p)}{dp} \right|_{p_R} (p - p_R) + \cdots \simeq J'(p_R) \cdot (p - p_R)$$

散乱位相差 $s(p) = e^{2i\delta(p)}$

定数

$$\delta(p) = \frac{1}{2} \arg s(p) = \cdots \simeq -\arg J'(p_R) - \arg(p - p_R)$$



$p = \text{Re } p_R$ の近くで位相差が急速に増大し $\pi/2$ を切る

まとめ



共鳴状態：ハミルトニアンの離散固有状態

- 束縛状態：固有運動量を純虚数にした解
- 共鳴状態：固有運動量を複素数にした解
- どちらも同じ境界条件「外向きの波のみ」



共鳴状態：散乱振幅の極

- ヨスト関数のゼロ点 = 散乱振幅の極
- 複素エネルギー平面の第2リーマン面に存在
- 理想的な場合に位相差が $\pi/2$ を切る