

散乱理論とハドロン物理

兵藤哲雄

2023年12月17日

概要

2023年新潟大学集中講義の講義ノート

目次

1	導入：ハドロン物理、共鳴状態、散乱理論	1
1.1	ハドロン物理	1
1.2	共鳴状態	4
1.3	§1 のまとめ	5
2	量子力学の散乱状態	6
2.1	基礎事項の確認	6
2.2	離散固有状態と連続状態	7
2.3	ハミルトニアンの固有状態としての共鳴	8
2.4	井戸型ポテンシャルの散乱解	9
2.5	§2 のまとめ	10
3	共鳴状態の波動関数	11
3.1	井戸型ポテンシャルの束縛解	11
3.2	井戸型ポテンシャルの共鳴解	11
3.3	§3 のまとめ	12
4	共鳴状態と期待値	13
4.1	束縛状態と期待値	13
4.2	ゼロレンジ極限	13
4.3	ゼロレンジ極限の共鳴波動関数	15
4.4	共鳴波動関数の規格化と期待値	16

5	散乱理論の基礎	17
5.1	準備	17
5.2	散乱振幅	18
5.3	コスト関数	19
6	散乱理論と共鳴状態	21
6.1	散乱振幅の極としての共鳴	21
6.2	固有エネルギーとリーマン面	21
6.3	固有状態の分類	22
6.4	共鳴状態と観測量	23
6.5	有効レンジ展開	24
7	チャンネル結合とフェッシュバッハ共鳴	25
7.1	概要	25
7.2	2チャンネルハミルトニアン	25
7.3	1共鳴近似	26
7.4	散乱振幅と共鳴状態	27
7.5	§7 のまとめ	29

1 導入：ハドロン物理、共鳴状態、散乱理論

参考文献

- 全体
教科書：永江-兵藤 [1]
物理学会誌：兵藤哲雄 [2]
2021 年原子核三者若手夏の学校の講義 [3]
都立大大学院講義 [4]
- 量子力学での共鳴状態
教科書：羽田野-井村 [5], A. Bohm [6], Kukulín-Krasnopol'sky-Horacek [7], N. Moiseyev [8]
レビュー論文：Ashida-Gong-Ueda [9]
- 散乱理論
教科書：J.R. Taylor [10], R.G. Newton [11]
レビュー論文：Hyodo-Niiyama [12]
- フェッシュバッハ共鳴
レビュー論文：Köhler-Góral-Julienne [13], Chin-Grimm-Julienne-Tiesinga [14]

1.1 ハドロン物理

ハドロンとは

- ハドロン：強い相互作用をする粒子の総称
- 観測されているハドロン [15]
 - バリオン ($p, n, \Lambda, \dots$)：約 170 種
 - メソン ($\pi, K, \eta, \dots$)：約 210 種
- 全てのハドロンは基礎理論である QCD から出てくる

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \bar{q}(i\not{D} - m_q)q \quad (1)$$

クォーク ($\bar{q}, q$)、グルーオン ($G_{\mu\nu}, D_\mu$) はカラー電荷をもつ

- クォークは 6 種のフレーバーを持つ (u, d, s, c, b, t)
- ハドロンはクォーク、反クォークの複合粒子
 - qqq バリオン： $p \sim uud, n \sim udd, \dots$
 - $\bar{q}q$ メソン： $\pi^+ \sim \bar{d}u, K^- \sim \bar{u}s, \dots$

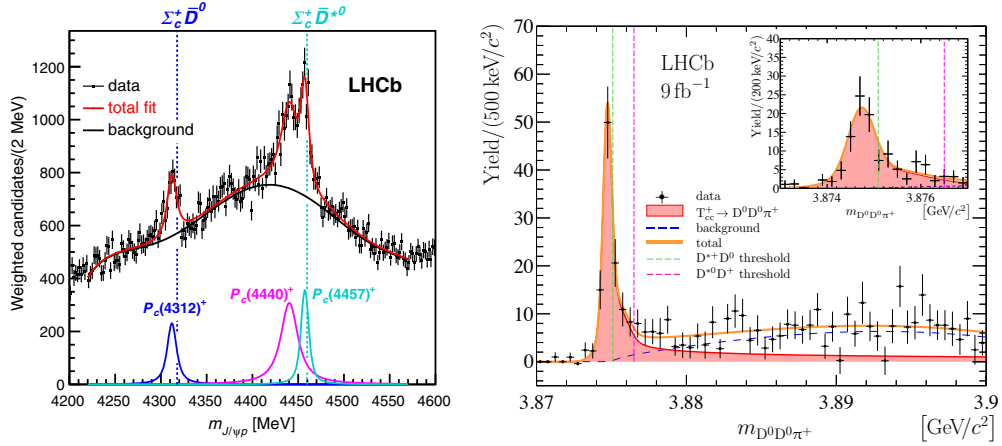


図 1: エキゾチックハドロンのスペクトルの例。左：ペンタクォーク P_c のスペクトル、R. Aaij *et al.*, (LHCb collaboration), Phys. Rev. Lett. **122**, 222001 (2019) より引用。右：テトラクォーク T_{cc} のスペクトル、R. Aaij *et al.* (LHCb collaboration), Nature Phys. **18**, 751 (2022) より引用。

観測されている状態の規則性

- 観測されるハドロンはカラー電荷中性
QCD にカラーを持った状態 ($qq, qqqq, \dots$) を禁止する明確な条件はない
→ カラー閉じ込めの問題
- カラー電荷中性の状態
 $\bar{q}q, qqq, \underbrace{\bar{q}\bar{q}qq, \bar{q}qqqq, qqqqqq, \bar{q}\bar{q}\bar{q}qqq, \dots}_{\text{エキゾチックハドロン}}$
- 観測されるハドロンのフレーバーはほとんど qqq または $\bar{q}q$
QCD に $\bar{q}\bar{q}qq, \bar{q}qqqq$ などの状態を禁止する明確な条件はない
→ **エキゾチックハドロン**の問題

エキゾチック構造の候補

- ペンタクォーク $P_c(4312), P_c(4440), P_c(4457)$ [16, 17] (2015 年、2019 年、図 1 左)

$$P_c(c\bar{c}uud) \rightarrow J/\psi(\bar{c}c) + p(uud)$$

- テトラクォーク T_{cc} [18, 19] (2021 年、図 1 右)

$$T_{cc}^+(cc\bar{u}\bar{d}) \rightarrow D^0(\bar{u}c)D^0(\bar{u}c)\pi^+(\bar{d}u)$$

- 380 種のうち数種のみ

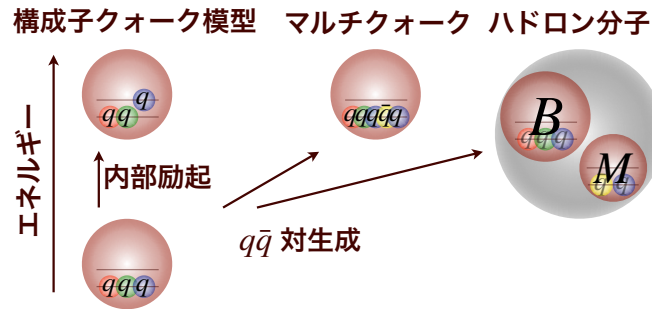


図 2: バリオンの励起機構の模式図。文献 [2] より引用。

励起ハドロンの内部構造

- $\Lambda(1405)$: $S = -1$, $I = 0$, $J^P = 1/2^-$ [20, 12, 1]
- 構成子クォーク模型の描像: 内部励起 (図 2)
軌道角運動量 $\ell = 1$ の uds 状態 $\rightarrow M \sim 1600\text{-}1700$ MeV
実験値: $M \sim 1400$ MeV?
- QCD では $\bar{q}q$ 対生成による励起が可能
マルチクォーク状態: 4 つ以上のクォークからなる状態
ハドロン分子状態: ハドロンを構成要素としてハドロン間相互作用で形成される状態
- 同じ量子数を持つ状態は互いに混合する

$$|\Lambda(1405)\rangle = C_{3q}|uds\rangle + C_{5q}|uds\bar{q}q\rangle + C_{MB}|MB\rangle + \dots \quad (2)$$

どのようにして重み C_i を決定するか? そもそも分解は well-defined か?

強い相互作用による崩壊

- 興味のあるハドロンは強い相互作用に対し不安定

$$P_c \rightarrow J/\psi + p$$

$$T_{cc} \rightarrow D^0 + D^0 + \pi^+$$

$$\Lambda(1405) \rightarrow \pi + \Sigma$$

安定なハドロンは $\sim 20/380$

- 不安定状態は**ハドロン散乱中の共鳴状態**として扱う
不安定な共鳴状態の“構造”をどう定義するか?
そもそも共鳴“状態”とは何なのか?

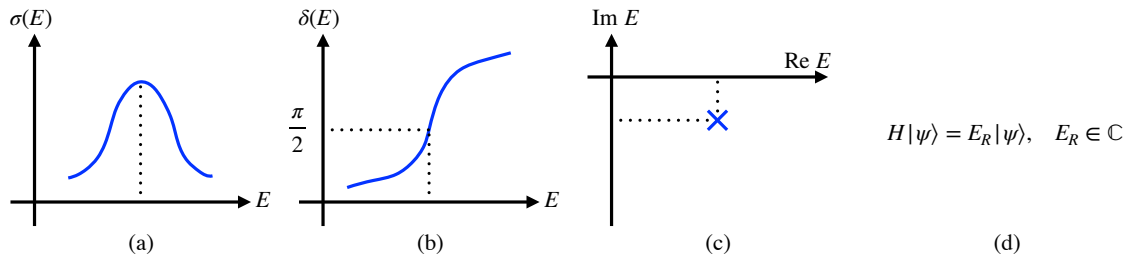


図 3: 共鳴状態の特徴づけの模式図。(a): 散乱断面積 $\sigma(E)$ のピーク、(b): 位相差 $\delta(E)$ が $\pi/2$ を切るエネルギー、(c): 散乱振幅の極、(d): 複素エネルギー固有状態。

1.2 共鳴状態

共鳴状態と散乱状態

- 共鳴状態：量子力学的に形成される準安定な“状態”、時間がたつと**崩壊**する
- シュレディンガー方程式は時間反転対称
 $\leftrightarrow$ 共鳴状態は崩壊するのみ、つまり時間反転対称でない
 解が理論（方程式）の対称性を破る：自発的破れ？
- 崩壊先は散乱状態（連続状態） $\rightarrow$ 散乱理論が必要
 例) $\Lambda(1405) \rightarrow \pi\Sigma$: $\Lambda(1405)$ は $\pi\Sigma$ 散乱の共鳴状態
- 非弾性散乱と散乱**チャンネル**
 - 弾性散乱：始状態 = 終状態 ($\pi\Sigma \rightarrow \pi\Sigma$)
 - 非弾性散乱：異なる終状態へ遷移 ($\pi\Sigma \rightarrow \bar{K}N$, $\pi\Sigma \rightarrow \pi\pi\Sigma$, etc.)
 - チャンネル：始状態、終状態を指定する粒子の組 ($\pi\Sigma$, $\bar{K}N$, $\pi\pi\Sigma$, etc.)
- **閾値**：散乱が起こる最低エネルギー（粒子の質量の和）

共鳴の特徴づけ

- 様々な定義：これらの関係は？
 - スペクトル/散乱断面積のピーク：図 3(a)
 - 位相差 (phase shift) $\delta(E)$ が $\pi/2$ を切る：図 3(b)
 - 複素エネルギー平面での散乱振幅の極：図 3(c)
 - ハミルトニアン（複素エネルギー）固有状態：図 3(d)

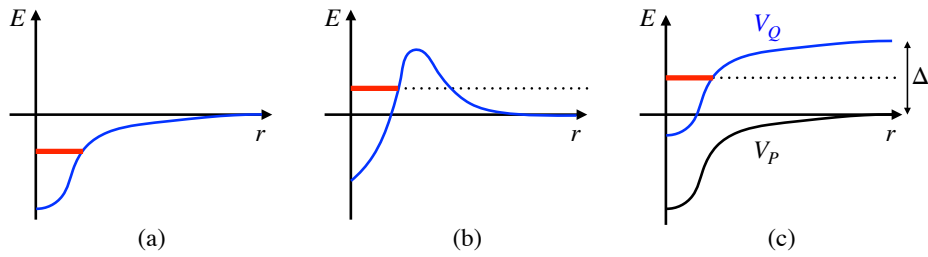


図 4: 共鳴状態の説明。(a): 束縛状態、(b): 形状共鳴、(c): フェッシュバッハ共鳴。

形状共鳴とフェッシュバッハ共鳴

- 共鳴状態は大きく 2 種に分類される
- **形状共鳴** (shape resonance, potential resonance): 図 4(b)
 - 1 チャンネル散乱問題
典型的なポテンシャル: 短距離引力 + 斥力障壁
 - エネルギー $E > 0$
 - トンネル効果により不安定
- **フェッシュバッハ共鳴** (Feshbach resonance): 図 4(c)
 - チャンネル結合散乱問題
 P : entrance channel、 Q : closed channel
 - P の閾値を $E = 0$ として Q の閾値が $E = \Delta > 0$
 - Q チャンネルの束縛状態が $0 < E < \Delta$ に存在
 - $Q \rightarrow P$ 遷移により不安定
- 両者は起源が異なる: 区別する方法 → 複合性

1.3 §1 のまとめ

- 目標: 不安定なハドロン共鳴の内部構造を明らかにしたい
- 共鳴状態のさまざまな特徴づけ → 関係を整理する
- 共鳴状態は連続状態に崩壊 → 散乱理論が必要

2 量子力学の散乱状態

2.1 基礎事項の確認

- 自然単位系： $c = 1, \hbar = 1$

SI の単位にするには c や $\hbar$ をかけて調整

例) $M_p = 940 \text{ MeV}$ (自然単位系)

$$\Rightarrow M_p = 940 \text{ MeV}/c^2 \text{ (SI)} \simeq 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

- 波動関数 $\Psi(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}$

粒子の存在確率 $P(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}$

規格化

$$\int d\mathbf{r} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = 1 \quad (3)$$

- 時間依存シュレディンガー方程式：波動関数の時間発展

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

- ハミルトニアン (ポテンシャル V 中の質量 μ の粒子)

$$H = \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}}_{\text{運動項 } H_0} + \underbrace{V(\mathbf{r})}_{\text{ポテンシャル項}} \quad (5)$$

- ポテンシャルが時間に依存しない場合

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\psi(\mathbf{r}) \exp(-iEt)}_{\text{時間依存性}} \quad (6)$$

定常状態のシュレディンガー方程式

$$H\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\nabla^2}{2\mu}\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (7)$$

ハミルトニアン演算子に関する **固有値方程式**

与えられた $V(\mathbf{r})$ に対し微分方程式を解く $\rightarrow$ 固有エネルギー E 、波動関数 $\psi(\mathbf{r})$

- 波動関数の規格化

$$\int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 = 1 \quad (8)$$

- **中心力** $V(\mathbf{r}) = V(r)$ の場合

$$\psi(\mathbf{r}) = \underbrace{R_\ell(r)}_{\text{動径波動関数}} \underbrace{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}})}_{\text{球面調和関数}}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (9)$$

ℓ : 角運動量の大きさ、非負整数

m : 磁気量子数、 $-\ell \leq m \leq \ell$ の整数

- 動径シュレディンガー方程式 $R_\ell(r) = u_\ell(r)/r$

$$-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} u_\ell(r) + V(r)u_\ell(r) + \underbrace{\frac{\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}}_{\text{遠心力障壁}} u_\ell(r) = E u_\ell(r) \quad (10)$$

- 動径波動関数の規格化

$$\int_0^\infty dr |u_\ell(r)|^2 = 1 \quad (11)$$

- **2 粒子系**：粒子 1（位置 $\mathbf{r}_1$ 、質量 m_1 ）と粒子 2（位置 $\mathbf{r}_2$ 、質量 m_2 ）

$$H\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left[\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (12)$$

- ポテンシャルが 2 粒子の相対座標 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ のみに依存する場合、

$$H = \underbrace{\frac{\mathbf{P}^2}{2M}}_{\text{重心}} + \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}}_{\text{相対}} + V(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r}) \quad (13)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p} = \frac{m_2\mathbf{p}_1 - m_1\mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (14)$$

重心系（ $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ）では相対波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は式 (7) に従う

2.2 離散固有状態と連続状態

- 以下全て中心力の場合を考える
- 動径シュレディンガー方程式 (10) は r に関する 2 階微分方程式
2 つの境界条件（ $r \rightarrow 0$ 、 $r \rightarrow \infty$ ）を与えると解が確定
- $r \rightarrow 0$ の境界条件

$$u_\ell(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0) \quad (15)$$

（ $r \rightarrow 0$ で $V(r) \sim r^{-2+\epsilon}$ （ $\epsilon > 0$ ）と振る舞う）

- $r \rightarrow \infty$ での境界条件： $V(r)$ に応じて決まる

– $r \rightarrow \infty$ で $V(r) \rightarrow \infty$ の場合

例）調和振動子 $V(r) \propto r^2$ 、無限に高い井戸（図 5）

$r \rightarrow \infty$ での存在確率が消えることから

$$u_\ell(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (16)$$

固有状態は**離散固有値**（とびとびの値）を持つ**束縛状態**

波動関数は式 (11) の規格化に従う

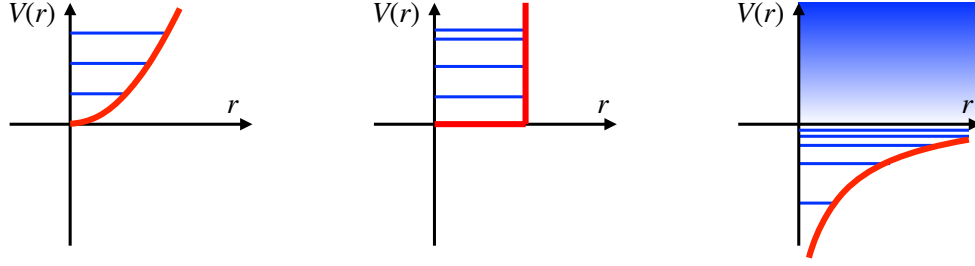


図 5: ポテンシャルと固有エネルギーの模式図。左: 調和振動子ポテンシャル、中: 無限に高い井戸型ポテンシャル、右: クーロンポテンシャル。

- $r \rightarrow \infty$ で $V(r) = 0$ の場合

例) クーロンポテンシャル $V(r) \propto 1/r$ 、相互作用なし $V(r) = 0$

$E < 0$ に解が存在する場合、束縛状態（離散固有値）、境界条件は式 (16)

任意の $E > 0$ に対して連続固有値を持つ散乱状態が存在

散乱状態は $r \rightarrow \infty$ の境界条件は無し

- 相互作用なし ($V(r) = 0$) の動径シュレディンガー方程式 (10) の一般解

$$R_\ell(r) = A j_\ell(pr) + B n_\ell(pr) = C^- h_\ell^-(pr) + C^+ h_\ell^+(pr), \quad p = \sqrt{2\mu E} \quad (17)$$

$j_\ell(pr)$ 球ベッセル関数、原点で正則 ($j_0(z) = \sin(z)/z$)

$n_\ell(pr)$ 球ノイマン関数、原点で発散 ($n_0(z) = \cos(z)/z$)¹

$h_\ell^\pm(pr)$ 球ハンケル関数 ($h_0^\pm(z) = e^{\pm iz}/z$)

式 (15) を満たすのは $j_\ell(pr)$

- 3次元シュレディンガー方程式 (7) の一般解

$$\psi(\mathbf{r}) = C e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad p = \sqrt{2\mu E} \quad (18)$$

運動量 $\mathbf{p}$ で進行する平面波、任意の $E > 0$ で解

規格化できないので C を決定できない

$$\int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 = |C|^2 \int d\mathbf{r} \rightarrow \infty \quad (19)$$

2.3 ハミルトニアン固有状態としての共鳴

- 共鳴状態の一つの定義: ハミルトニアンの複素エネルギー固有状態

¹ノイマン関数の定義は $n_0(z) = -\cos z/z$ のように - 符号付きであることが多いが、散乱理論では $n_0(z) = +\cos z/z$ の定義がよく使われる。

- 文献 [21]：原子核の α 崩壊
固有エネルギーの虚部を手で導入（符号は現在の定義 $\text{Im } E < 0$ と逆）

$$E = E_0 + i\frac{\hbar\lambda}{4\pi} = E_0 + i\frac{\hbar\lambda}{2} \quad (20)$$

λ ：崩壊定数、崩壊幅 $\Gamma = \hbar\lambda$

- 波動関数の時間発展（符号は式 (6) の現在の定義と逆）

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \propto \exp\{+iEt/\hbar\} = \exp\{+iE_0t/\hbar\} \exp\{-\lambda t/2\} \quad (21)$$

存在確率が指数関数的に減少 $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \propto \exp\{-\lambda t\}$

- 「エルミート演算子の固有値は実数」と矛盾？
← 演算子の作用する空間（定義域 $D(H)$ ）を指定する必要がある
c.f. エルミート共役の定義： $\langle H^\dagger \Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, H\Phi \rangle$, $\Psi, \Phi \in D(H)$

- 固有値が実数なのは $D(H)$ がヒルベルト空間のとき（ ~ 2 乗可積分な関数空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ ）

$$\int d\mathbf{r} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 < \infty \quad (22)$$

拡張された定義域では H は複素固有値を持ちうる

- 2 乗可積分でない波動関数の例：平面波 (18)
共鳴は崩壊を通じて散乱状態と結合：2 乗可積分でない波動関数を持つ

2.4 井戸型ポテンシャルの散乱解

- s 波 ($\ell = 0$) のシュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) \right) u_0(r) = E u_0(r), \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (23)$$

- 引力井戸型ポテンシャル ($V_0 > 0$ 、図 6(a))

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq b \\ 0 & b < r \end{cases} \quad (24)$$

- 一般解（境界条件なし）

$$u_0(r) \propto \begin{cases} e^{\pm ikr} & 0 \leq r \leq b, \quad k = \sqrt{2\mu(E + V_0)} \\ e^{\pm ipr} & b < r, \quad p = \sqrt{2\mu E} \end{cases} \quad (25)$$

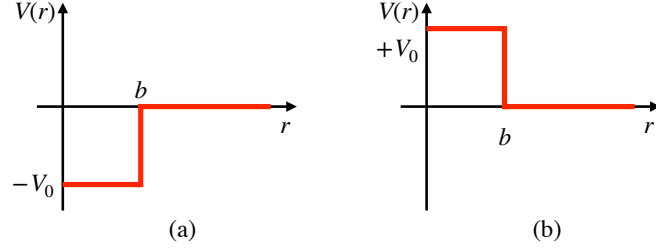


図 6: 幅 b の角型ポテンシャル。(a): 深さ V_0 の引力、(b): 高さ V_0 の斥力。

- 散乱解 ($r \rightarrow 0$ での境界条件 (15))

$$u_0(r) = \begin{cases} C \sin(kr) & 0 \leq r \leq b \\ A^-(p)e^{-ipr} + A^+(p)e^{+ipr} & b < r \end{cases} \quad (26)$$

$$A^\pm(p) = \frac{C}{2} \left[\sin(kb) \mp i \frac{k}{p} \cos(kb) \right] e^{\mp ipb} \quad (27)$$

- 散乱解は規格化できない ($r \rightarrow \infty$ で 0 にならない)
→ 全体の規格化 C は任意
- $A^\pm(p)$ は u_0 と du_0/dr の $r = b$ での連続性で決まる
- 散乱解は任意の $E > 0$ でシュレディンガー方程式 (23) を満たす: 連続固有状態
- $e^{\pm ipr}$ は $\pm r$ 方向に進む波: A^+ (A^-) は **外向き (内向き) の波** の振幅
- 相互作用なしの波動関数 ($r \rightarrow 0$ での境界条件 (15))

$$u_0(r) = C \sin(pr) \quad (28)$$

相互作用ありの波動関数 (26) は $D \sin(pr + \delta)$ と書ける
→ 相互作用によって遠方で位相のずれ δ が生じる

2.5 §2 のまとめ

- 動径シュレディンガー方程式の離散固有状態: $r \rightarrow 0$ と $r \rightarrow \infty$ の境界条件、規格化できる
- 離散固有状態: $r \rightarrow 0$ の境界条件、規格化できない
- 散乱波動関数は外向き波と内向き波の線形結合

3 共鳴状態の波動関数

3.1 井戸型ポテンシャルの束縛解

- 離散固有状態は $r \rightarrow 0$ と $r \rightarrow \infty$ 両方の境界条件を課すことで得られる
- 束縛状態の解：固有エネルギーは $E < 0 \Leftrightarrow$ 固有運動量 $p = \sqrt{2\mu E}$ は純虚数

$$p = i\kappa, \quad \kappa > 0 \quad (29)$$

とすると、 $r \rightarrow \infty$ の波動関数は

$$u_0(r) = A^-(i\kappa)e^{+\kappa r} + A^+(i\kappa)e^{-\kappa r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (30)$$

- 境界条件： $u_0(r)$ が 2 乗可積分 $\rightarrow$ 発散する成分 $e^{+\kappa r}$ を消去

$$A^-(i\kappa) = 0 \quad (31)$$

$p = i\kappa$ に対して、内向きの波 (e^{-ipr}) が消えて外向きの波 (e^{+ipr}) のみになる

- $A^-(p) = 0$ ：外向き (Siegert) 境界条件 [22]

$$\tan(\sqrt{p^2 + 2\mu V_0} b) = -i \frac{\sqrt{p^2 + 2\mu V_0}}{p} \quad (32)$$

$p = i\kappa$ を代入すると通常の井戸型ポテンシャルの解の条件 $\kappa = -k \cot(kb)$

3.2 井戸型ポテンシャルの共鳴解

- 束縛状態： p が純虚数で式 (32) を満たす解
 $\leftrightarrow$ 物理的な散乱は実で正の p で起こる
 $\Rightarrow$ 束縛解は (32) の解析接続から得られる
- 共鳴状態： p が複素数で式 (32) を満たす解
- 引力井戸型ポテンシャルは無限個の共鳴解を持つ [23, 8]
 表 1： $V_0 = 10\mu^{-1}b^{-2}$ の場合の式 (32) の数値解
 複素 p 平面で $1/|A^-(p)|$ をプロットしたときの極 (図 7、左)
- 固有運動量の虚部が負

$$p = p_R - ip_I, \quad p_R, p_I > 0 \quad (33)$$

波動関数の振る舞い

$$u_0(r) \rightarrow A^+(p)e^{ipr} \propto \underbrace{e^{ip_R r}}_{\text{振動}} \underbrace{e^{+p_I r}}_{\text{増大}} \quad (34)$$

$u_0(r)$ は $r \rightarrow \infty$ で振動しながら発散、2 乗可積分でない (図 7、右)

表 1: 式 (32) で $V_0 = 10\mu^{-1}b^{-2}$ の場合の数値解 (引力井戸型ポテンシャルの離散固有状態)。

	p [b^{-1}]	$E = p^2/(2\mu)$ [$\mu^{-1}b^{-2}$]
束縛状態 B	$+ 3.68i$	$- 6.78$
第 1 共鳴 R_1	$1.06 - 1.02i$	$0.05 - 1.08i$
第 2 共鳴 R_2	$6.29 - 1.41i$	$18.8 - 8.86i$
第 3 共鳴 R_3	$9.90 - 1.69i$	$47.6 - 16.8i$
$\vdots$		

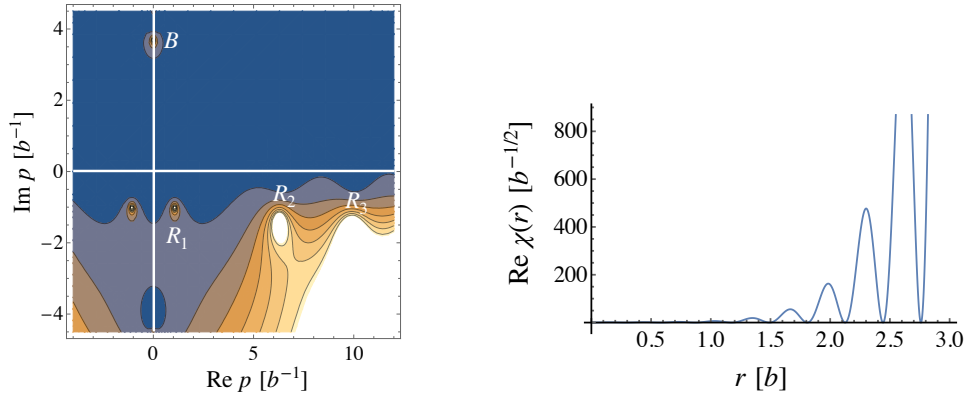


図 7: 左: $V_0 = 10\mu^{-1}b^{-2}$ の場合の井戸型ポテンシャル (24) の $1/|A^-(p)|$ の等高線プロット。右: 第 3 共鳴 R_3 の波動関数の実部。

3.3 §3 のまとめ

- 離散固有状態 ← 外向き境界条件
- 共鳴: ハミルトニアンの複素エネルギー固有状態 (束縛と同じ、固有運動量の解析接続)
- 共鳴の波動関数は $r \rightarrow \infty$ で発散

4 共鳴状態と期待値

4.1 束縛状態と期待値

- 束縛状態のブラケット表示

$$H|B\rangle = -B|B\rangle \quad (35)$$

$B > 0$: 束縛エネルギー

- 座標表示波動関数

$$\langle \mathbf{r} | B \rangle = \psi_B(\mathbf{r}), \quad \langle B | \mathbf{r} \rangle = [\psi_B(\mathbf{r})]^* \quad (36)$$

- 規格化

$$\langle B | B \rangle = 1 \quad (37)$$

確認：完全系

$$1 = \int d\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| \quad (38)$$

より

$$\langle B | B \rangle = \int d\mathbf{r} \langle B | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | B \rangle = \int d\mathbf{r} [\psi_B(\mathbf{r})]^* \psi_B(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dr |u_0(r)|^2 = 1 \quad (39)$$

- 規格化された束縛状態による演算子 O の期待値

$$\langle O \rangle = \langle B | O | B \rangle = \int d\mathbf{r} \langle B | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | O | B \rangle = \int_0^\infty dr [u_0(r)]^* O u_0(r) \quad (40)$$

4.2 ゼロレンジ極限

- 引力井戸型ポテンシャルの束縛解： $p = i\kappa$ 、式 (26)、(31) より

$$u_0(r) = \begin{cases} C \sin(kr) & 0 \leq r \leq b \\ A^+(i\kappa) e^{-\kappa r} & b < r \end{cases} \quad (41)$$

解の条件

$$\kappa = -k \cot(kb), \quad \kappa = \sqrt{2\mu B}, \quad k = \sqrt{2\mu(V_0 - B)} \quad (42)$$

- ポテンシャルの変形と束縛エネルギー

– 井戸の幅 b を固定し深さ V_0 を増やす：引力増加で B 増加

– 井戸の深さ V_0 を固定し幅 b を減らす：引力減少で B 減少

- 井戸の幅 b を減らしつつ B を変えないように深さ V_0 を増やす：

$$\sqrt{2\mu(V_0 - B)} \cot(\sqrt{2\mu(V_0 - B)}b) = \sqrt{2\mu(V'_0 - B)} \cot(\sqrt{2\mu(V'_0 - B)}b') \quad (43)$$

を満たすように $b \rightarrow b'$ 、 $V_0 \rightarrow V'_0$ とする

- $b' \rightarrow 0$ ：ゼロレンジ極限

V'_0 が有限だと右辺は発散、左辺は有限

→ 右辺全体が有限になるように $V'_0 \rightarrow \infty$ となる

ポテンシャルは δ 関数になる

- ゼロレンジ極限の波動関数

$$u_0(r) = A^+(i\kappa)e^{-\kappa r} \quad (0 < r) \quad (44)$$

規格化

$$1 = |A^+(i\kappa)|^2 \int_0^\infty dr e^{-2\kappa r} = |A^+(i\kappa)|^2 \left[\frac{e^{-2\kappa r}}{-2\kappa} \right]_0^\infty = \frac{|A^+(i\kappa)|^2}{2\kappa} \quad (45)$$

位相は任意なので正の実数を選択すると

$$A^+(i\kappa) = \sqrt{2\kappa} \Rightarrow u_0(r) = \sqrt{2\kappa} e^{-\kappa r} \quad (46)$$

- $r \rightarrow 0$ の境界条件？

$$u_0(0) = \sqrt{2\kappa} \neq 0 \quad (47)$$

$u_0(0) = 0 \Leftarrow r \rightarrow 0$ で $V(r) \sim r^{-2+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) と振る舞う（ハミルトニアンが自己共役）

3次元 δ 関数ポテンシャルは原点での特異性が強く正則化が必要

接触相互作用の非相対論的有效場の理論の繰り込みに相当

- エネルギーの期待値：式 (10)、(40) より

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int_0^\infty dr \sqrt{2\kappa} e^{-\kappa r} \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} \right) \sqrt{2\kappa} e^{-\kappa r} = -\frac{1}{2\mu} 2\kappa \int_0^\infty dr e^{-\kappa r} (-\kappa)^2 e^{-\kappa r} \\ &= -\frac{\kappa^2}{2\mu} = -B \end{aligned} \quad (48)$$

- 平均 2 乗半径 [25]

$$\langle r^2 \rangle = 2\kappa \int_0^\infty dr r^2 e^{-2\kappa r} = 2\kappa \int_0^\infty dr \left(-\frac{1}{2} \frac{d}{d\kappa} \right)^2 e^{-2\kappa r} = \frac{\kappa}{2} \frac{d^2}{d\kappa^2} \frac{1}{2\kappa} = \frac{1}{2\kappa^2} \quad (49)$$

波動関数の広がりオーダー $1/\kappa$ の長さスケール

4.3 ゼロレンジ極限の共鳴波動関数

- 複素エネルギー固有状態 $|R\rangle$

$$H|R\rangle = \left(E_R - \frac{i\Gamma_R}{2}\right)|R\rangle \quad (50)$$

$E_R > 0$: 共鳴エネルギー、 $\Gamma_R > 0$: 崩壊幅

- ゼロレンジ極限の波動関数

$$u_0(r) = A^+(p)e^{ipr}, \quad p = \sqrt{2\mu \left(E_R - \frac{i\Gamma_R}{2}\right)} \quad (51)$$

- $E_R > 0$ かつ $\Gamma_R > 0$ のとき (c.f. 式 (33))

$$p = p_R - ip_I, \quad p_R, p_I > 0 \quad (52)$$

- 通常の規格化

$$\langle \mathbf{r} | R \rangle \propto u_0(r) \propto e^{ipr} = e^{ip_R r} e^{+ip_I r} \quad (53)$$

$$\langle R | \mathbf{r} \rangle \propto [u_0(r)]^* \propto e^{-ip^* r} = e^{-i(p_R + ip_I)r} = e^{-ip_R r} e^{+ip_I r} \quad (54)$$

より規格化できない

$$\langle R | R \rangle \propto \int_0^\infty dr e^{2p_I r} \rightarrow \infty \quad (55)$$

- $\langle R |$ の固有値 : 式 (50) に対し

$$\langle R | H = \left(E_R + \frac{i\Gamma_R}{2}\right) \langle R | \quad (56)$$

座標表示で確認 :

$$\left(-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2}\right) e^{-ip^* r} = -\frac{(-ip^*)^2}{2\mu} e^{-ip^* r} = \frac{(p^*)^2}{2\mu} e^{-ip^* r} = \left(\frac{p^2}{2\mu}\right)^* e^{-ip^* r} \quad (57)$$

$\langle R |$ は $|R\rangle$ と異なる固有値を持つ

エルミートでない演算子に対しては、左固有ベクトルは右固有ベクトルの共役でない

- **ガモフベクトル** $\langle \tilde{R} | : |R\rangle$ と同じ複素固有値を与える左固有ベクトル

$$\langle \tilde{R} | H = \left(E_R - \frac{i\Gamma_R}{2}\right) \langle \tilde{R} | \quad (58)$$

$$\langle \tilde{R} | \mathbf{r} \rangle = u_0(r) \propto e^{ipr} \quad (59)$$

4.4 共鳴波動関数の規格化と期待値

- 共鳴状態の規格化条件

$$\langle \tilde{R} | R \rangle = \int_0^\infty dr [u_0(r)]^2 = 1 \quad (60)$$

絶対値でなく複素数の2乗

- 座標表示：一見発散している？

$$\langle \tilde{R} | R \rangle = [A^+(p)]^2 \int_0^\infty dr e^{2ipr} = [A^+(p)]^2 \int_0^\infty dr e^{2ip_R r} \underbrace{e^{+2p_I r}}_{\text{増大}} \quad (61)$$

- Zel'dovich 正則化（解析接続）[24]

$$J(z) = \int_0^\infty dr e^{zr} = \begin{cases} -\frac{1}{z} & \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \\ \text{収束しない} & 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \arg z < 2\pi \end{cases} \quad (62)$$

$$\bar{J}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dr e^{-\varepsilon r^2} e^{zr} = \begin{cases} -\frac{1}{z} & \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \\ \text{収束しない} & 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \leq \arg z < 2\pi \end{cases} \quad (63)$$

- 共鳴状態の波動関数

$$\int_0^\infty dr e^{2ipr} = \frac{1}{-2ip} \quad (64)$$

$$A^+(p) = \sqrt{-2ip} \Rightarrow u_0(r) = \sqrt{-2ip} e^{ipr} \quad (65)$$

共鳴波動関数の位相は任意に選べない

$p = i\kappa$ で式 (46) に帰着

- 演算子の期待値

$$\langle O \rangle = \langle \tilde{R} | O | R \rangle = \int_0^\infty dr u_0(r) O u_0(r) \quad (66)$$

- エネルギー：式 (50)、(60)

$$\langle H \rangle = \langle \tilde{R} | H | R \rangle = \langle \tilde{R} | \left(E_R - \frac{i\Gamma_R}{2} \right) | R \rangle = \left(E_R - \frac{i\Gamma_R}{2} \right) \langle \tilde{R} | R \rangle = E_R - \frac{i\Gamma_R}{2} \quad (67)$$

- 平均2乗半径 [25]

$$\langle r^2 \rangle = (-2ip) \int_0^\infty dr e^{ipr} r^2 e^{ipr} = (-2ip) \left(\frac{1}{2i} \frac{d}{dp} \right)^2 \int_0^\infty dr e^{2ipr} = \frac{1}{-2p^2} \in \mathbb{C} \quad (68)$$

有限だが半径が複素数？解釈は確定していない

5 散乱理論の基礎

5.1 準備

系の定義

- 区別できる粒子 1、粒子 2（質量 m_1 、 m_2 ）の量子力学的散乱
- ハミルトニアン $H = H_0 + V$ （ H_0 ：運動項、 V ：ポテンシャル）
- 空間 3 次元、非相対論的、 $\hbar = 1$
- 内部自由度（スピン、フレーバーなど）なし
- 弾性散乱（始状態 = 終状態、チャンネル結合なし）
- 回転対称性 $\Leftrightarrow$ 球対称ポテンシャル $V(r) \Leftrightarrow [H, \mathbf{L}] = 0$
- 短距離力（遠方 $r \rightarrow \infty$ でポテンシャル $V(r)$ が十分はやく消える）

散乱のキネマティクス

- キネマティクスは相対運動量で指定（図 8）
 - 始状態： $\mathbf{p}$ （式 (14) より重心系では $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}$ ）
 - 終状態： $\mathbf{p}'$
- 弾性散乱では運動量の大きさが不変： $p \equiv |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$
- 散乱過程を特徴づけるパラメーターは 2 つ
 - 散乱角

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{p^2} \quad (69)$$

- 散乱エネルギー（または運動量 p ）

$$E = \frac{p^2}{2\mu} \quad (70)$$

- 物理的な散乱は $E > 0$ 、 $p > 0$ で起こる²
- 波動関数はエネルギー E の定常状態シュレディンガー方程式を解いて得られる (§3)

²物理的な散乱には E 、 p どちらを用いても良いが、複素平面への解析接続を考える際には以下で与えられる S 行列や散乱振幅は p の有理型関数として考える。

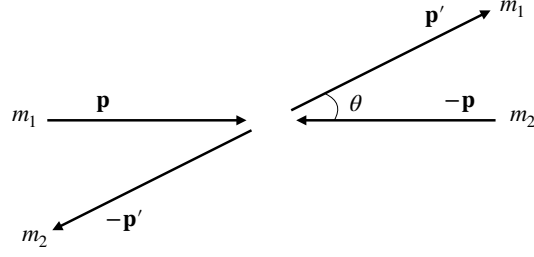


図 8: 散乱のキネマティクスの模式図。

状態ベクトル

- 運動量表示：始状態 $|\mathbf{p}\rangle$ 、終状態 $\langle \mathbf{p}'|$ 、規格化は

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad (71)$$

H_0 の固有状態（漸近状態）、 $H_0|\mathbf{p}\rangle = \frac{p^2}{2\mu}|\mathbf{p}\rangle$

式 (38) より座標表示の波動関数は平面波 $\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}/(2\pi)^{3/2}$

- 角運動量表示：始状態 $|E, \ell, m\rangle$ 、終状態 $\langle E', \ell', m'|$ 、規格化は

$$\langle E', \ell', m' | E, \ell, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm} \quad (72)$$

- 両者の関係：

$$\langle \mathbf{p}' | E, \ell, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \delta(E' - E) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{p}}'), \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{p} \quad (73)$$

5.2 散乱振幅

- 散乱演算子：始状態と終状態の遷移

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{iH_0 t} e^{-iHt}] \lim_{t \rightarrow -\infty} [e^{iHt} e^{-iH_0 t}] \quad (74)$$

$\Omega_\pm$: Møller 演算子

- S 行列要素 (S 行列とも呼ばれる) : $s_\ell(E) \in \mathbb{C}$

$$\langle E', \ell', m' | S | E, \ell, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm} s_\ell(E) \quad (75)$$

- 位相差 : $\delta_\ell(E) \in \mathbb{R}$

$$s_\ell(E) = \exp\{2i\delta_\ell(E)\} \quad (76)$$

- T 行列： $t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \in \mathbb{C}$

$$\langle \mathbf{p}' | (S - 1) | \mathbf{p} \rangle = -2\pi i \delta(E' - E) t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \quad (77)$$

- 散乱振幅： $f(E, \theta) \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(E, \theta) &= -(2\pi)^2 \mu t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \\ &= \sum_{\ell} (2\ell + 1) f_{\ell}(E) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (\text{部分波展開}) \end{aligned} \quad (78)$$

S 行列のとの関係 ($p = \sqrt{2\mu E}$)

$$f_{\ell}(E) = \frac{s_{\ell}(E) - 1}{2ip} \quad (79)$$

- $s_{\ell}, \delta_{\ell}, f_{\ell}$ は部分波 ℓ ごとに E のみの関数

5.3 ヨスト関数

散乱振幅と波動関数との関係

- Riccati 関数

- $V = 0$ の 3 次元波動関数 $\psi(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = [A j_{\ell}(pr) + B n_{\ell}(pr)] Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{r}}) = [C^{-} h_{\ell}^{-}(pr) + C^{+} h_{\ell}^{+}(pr)] Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (80)$$

$j_{\ell}(z)$ [$n_{\ell}(z)$] : 球ベッセル (ノイマン) 関数、 $h^{\pm}(z)$: 球ハンケル関数

- 動径波動関数 $u_{\ell}(r) \propto r\psi(\mathbf{r})$
- Riccati-Bessel/Neumann 関数： $u_{\ell}(r)$ を展開するのに便利

$$\hat{j}_{\ell}(z) = z j_{\ell}(z), \quad \hat{n}_{\ell}(z) = z n_{\ell}(z), \quad (81)$$

- Riccati-Hankel 関数

$$\hat{h}_{\ell}^{\pm}(z) = z h_{\ell}^{\pm}(z) \rightarrow \exp\{\pm i(z - \ell\pi/2)\} \quad z \rightarrow \infty \quad (82)$$

つまり $\hat{h}_{\ell}^{+}(pr) \sim e^{+ipr}$ ($\hat{h}_{\ell}^{-}(pr) \sim e^{-ipr}$) は **外向き (内向き) の波**

- Regular solution $\phi_{\ell,p}(r)$: 固有運動量 p の $u_{\ell}(r)$ を以下のように規格化

$$\frac{\phi_{\ell,p}(r)}{\hat{j}_{\ell}(pr)} \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow 0) \quad (83)$$

$\phi_{\ell,p}(r) \rightarrow 0$ に加えて、大きさ (原点での傾き) も指定

- $\phi_{\ell,p}(r)$ の $r \rightarrow \infty$ での漸近形： $V = 0$ なので Riccati 関数の線形結合でかける

$$\phi_{\ell,p}(r) \rightarrow \frac{i}{2} \left[\not\!\!/\ell(p) \hat{h}_{\ell}^{-}(pr) - [\not\!\!/\ell(p)]^* \hat{h}_{\ell}^{+}(pr) \right] \quad (r \rightarrow \infty) \quad (84)$$

原点での傾きが実数で、動径シュレディンガー方程式は i を含まないため $\phi_{\ell,p}(r)$ は実数
 $\Rightarrow \phi_{\ell,p}(r) = C^{-} \hat{h}_{\ell}^{-}(pr) + C^{+} \hat{h}_{\ell}^{+}(pr)$ のとき $C^{+} = [C^{-}]^*$ ($[\hat{h}^{\pm}(z)]^* = \hat{h}^{\mp}(z)$)

- ヨスト (Jost) 関数 $\not\!\!/\ell(p)$ ：内向き波の振幅 $\leftarrow$ 式 (82)

$$\not\!\!/\ell(p) = 1 + \frac{2\mu}{p} \int_0^{\infty} dr \hat{h}_{\ell}^{+}(pr) V(r) \phi_{\ell,p}(r), \quad (85)$$

- 外向き境界条件 = ヨスト関数 $\not\!\!/\ell(p)$ のゼロ点

- ヨスト関数は p の解析関数 ($\sim$ 多項式、特異性を持たない)³
- $\not\!\!/\ell(p)$ の p が小さい時の展開：積分表示 (85) を用いて以下が示せる

$$\not\!\!/\ell(p) = 1 + \underbrace{[\alpha_{\ell} + \beta_{\ell} p^2 + \mathcal{O}(p^4)]}_{p \text{ の偶数べき}} + i \underbrace{[\gamma_{\ell} p^{2\ell+1} + \mathcal{O}(p^{2\ell+3})]}_{p \text{ の奇数べき}}, \quad \alpha_{\ell}, \beta_{\ell}, \gamma_{\ell}, \dots \in \mathbb{R} \quad (86)$$

- ヨスト関数の複素共役 (複素 p に解析接続) $\leftarrow$ 式 (86)

$$[\not\!\!/\ell(p)]^* = \not\!\!/\ell(-p^*) \quad (87)$$

$\Rightarrow$ 物理的な散乱 ($p > 0$) の場合、式 (88) は

$$\phi_{\ell,p}(r) \rightarrow \frac{i}{2} \left[\not\!\!/\ell(p) \hat{h}_{\ell}^{-}(pr) - \not\!\!/\ell(-p) \hat{h}_{\ell}^{+}(pr) \right] \quad (r \rightarrow \infty) \quad (88)$$

具体例

- s 波 ($\ell = 0$) の場合： $\hat{j}_0(pr) = \sin(pr)$ 、 $\hat{h}_0^{\pm}(pr) = e^{\pm i pr}$
- §2.4 の井戸型ポテンシャルの解 (26)

$$u_0(r) \rightarrow C \sin(kr) = Ckr + \mathcal{O}(r^3)$$

- 式 (83) の規格化： $\hat{j}_0(pr) = pr + \mathcal{O}(r^3)$ より

$$\phi_{\ell,p}(r) = u_0(r) \Big|_{C=\frac{p}{k}}$$

- 井戸型ポテンシャルのヨスト関数

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \not\!\!/\!_0^{\text{井戸}}(p) &= A^{-}(p) \Big|_{C=\frac{p}{k}} \\ \not\!\!/\!_0^{\text{井戸}}(p) &= \left[\cos(kb) - i \frac{p}{k} \sin(kb) \right] e^{ipb} \end{aligned}$$

³厳密には式 (85) からポテンシャルの性質によって複素 p 平面で解析的な領域が決まる。

6 散乱理論と共鳴状態

6.1 散乱振幅の極としての共鳴

- §3：共鳴はハミルトニアン $\hat{H}$ の離散固有状態 ← 外向き境界条件
- §5：外向き境界条件はヨスト関数のゼロ点 $\mathcal{J}_\ell(p) = 0$
- 波動関数による S 行列：入射（内向き）波で規格化された散乱（外向き）波の振幅

$$u_\ell(r) \rightarrow \hat{h}_\ell^-(pr) - s_\ell(p)\hat{h}_\ell^+(pr) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (89)$$

式 (88) と比較すると S 行列がヨスト関数で表される

$$s_\ell(p) = \frac{\mathcal{J}_\ell(-p)}{\mathcal{J}_\ell(p)} \quad (90)$$

⇒ 離散固有状態は **S 行列の極** で表される

- 散乱振幅：式 (79) より

$$f_\ell(p) = \frac{s_\ell(p) - 1}{2ip} = \frac{\mathcal{J}_\ell(-p) - \mathcal{J}_\ell(p)}{2ip\mathcal{J}_\ell(p)} \quad (91)$$

⇒ 離散固有状態は **散乱振幅の極** で表される（図 9）

- $s_\ell(p)$ 、 $f_\ell(p)$ は p の有理型関数（～多項式/多項式、極以外の特異性を持たない）

6.2 固有エネルギーとリーマン面

- 物理的領域 $p > 0$ で定義された $\mathcal{J}_\ell(p)$ 、 $s_\ell(p)$ 、 $f_\ell(p)$ を複素平面に解析接続
- 複素運動量 p 、複素エネルギー E

$$p = |p|e^{i\theta_p}, \quad E = |E|e^{i\theta_E} \quad (92)$$

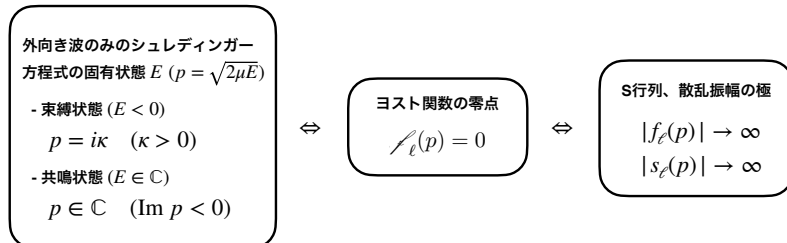


図 9: 共鳴状態の種々の条件。波動関数の外向き境界条件は、ヨスト関数のゼロ点を通じて散乱振幅の極と関係している。文献 [1] から引用。

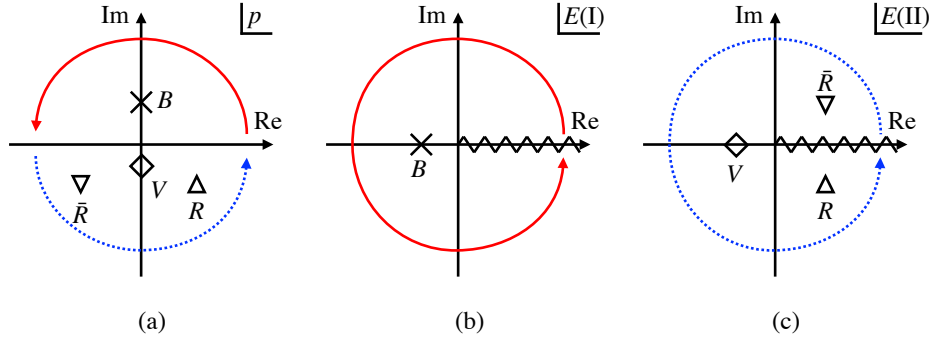


図 10: 複素平面の極。(a): 複素 p 平面、(b): 複素 E 平面 (第 1 リーマン面)、(c): 複素 E 平面 (第 2 リーマン面)。 B 、 V 、 R 、 $\bar{R}$ はそれぞれ束縛状態、virtual 状態、共鳴状態、Anti-resonance。

• 関係

$$E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{|p|^2}{2\mu} e^{2i\theta_p} \Rightarrow |E| = \frac{|p|^2}{2\mu}, \quad 2\theta_p = \theta_E \quad (93)$$

- θ_p が $0 \rightarrow 2\pi$ 変化するとき、 θ_E は $0 \rightarrow 4\pi$ と動く
- p と $-p$ (θ_p と $\theta_p + \pi$) は同じ E に写像される

• p の有理型関数 ($s_\ell(p)$ 、 $f_\ell(p)$) は E の 2 枚のリーマン面上で定義される

$0 \leq \theta_E < 2\pi$: E の第 1 リーマン面 (p の上半面 $0 \leq \theta_p < \pi$)

$2\pi \leq \theta_E < 4\pi$: E の第 2 リーマン面 (p の下半面 $\pi \leq \theta_p < 2\pi$)

• 複素 p 、 E 平面: 図 10

E 平面の実軸上に cut ($E = 0$ に branch point)

6.3 固有状態の分類

• ハミルトニアン H の固有状態: ヨスト関数のゼロ点 $\mathcal{J}_\ell(p) = 0$

• 式 (87) より、 $\mathcal{J}_\ell(p) = 0$ のとき

$$\mathcal{J}_\ell(-p^*) = [\mathcal{J}_\ell(p)]^* = 0 \quad (94)$$

$\Rightarrow p$ が解なら $-p^*$ (虚軸に対して対称な点) も解

• $p = -p^*$ の解 (虚軸上)

- 束縛状態 (bound state, B): 図 10 の $\times$

$$\text{Re } [p_B] = 0, \quad \text{Im } [p_B] > 0 \quad (95)$$

エネルギー E_B は実で負 (第 1 リーマン面)

- Virtual 状態 (anti-bound state, V): $\diamond$

$$\operatorname{Re} [p_V] = 0, \quad \operatorname{Im} [p_V] < 0 \quad (96)$$

エネルギー E_V は実で負 (第 2 リーマン面)

極の留数 ($\sim$ ノルム) が負: 物理的自由度ではない? [26]

- $p \neq -p^*$ の解 (必ず対で出る)

- 解は p の下半面にのみ存在
 $\leftarrow$ 複素 E は波動関数が 2 乗可積分でない場合のみ許される
- 共鳴状態 (resonance, R): $\triangle$

$$\operatorname{Re} [p_R] > 0, \quad \operatorname{Im} [p_R] < 0 \quad (97)$$

エネルギーは $\operatorname{Re} [E_R] > 0$, $\operatorname{Im} [E_R] < 0$ (第 2 リーマン面)

- Anti-resonance ($\bar{R}$): ∇

$$\operatorname{Re} [p_{\bar{R}}] < 0, \quad \operatorname{Im} [p_{\bar{R}}] < 0 \quad (98)$$

共鳴状態と対になって存在

時間と共に増大する解 [27] (共鳴の “共役”)

6.4 共鳴状態と観測量

- 実験で調べられるのは実エネルギーのみ
- 部分波 ℓ にある $E = E_R = M_R - i\Gamma_R/2$ の共鳴極が観測量に与える影響
- 散乱振幅を $E = E_R$ のまわりでローラン展開

$$f_\ell(E) = f_{\ell,\text{BW}}(E) + f_{\ell,\text{BG}}(E), \quad (99)$$

Breit-Wigner 項 $f_{\ell,\text{BW}}(E)$: 共鳴極の寄与

$$f_{\ell,\text{BW}}(E) = \frac{Z_R}{E - E_R} = \frac{Z_R(E - M_R - i\Gamma_R/2)}{(E - M_R)^2 + \Gamma_R^2/4}, \quad Z_R = -\frac{\Gamma_R}{2p_R} \quad (100)$$

非共鳴項 $f_{\ell,\text{BG}}(E)$: $E = E_R$ で解析的

- 実エネルギー $E \sim M_R$ では $f_{\ell,\text{BW}}(E)$ の寄与が大きくなる (特に幅 Γ_R が狭い場合)
- $f_{\ell,\text{BG}}(E)$ が小さく無視できると **仮定した** 場合

$$f_\ell(E) \approx f_{\ell,\text{BW}}(E) \quad (f_{\ell,\text{BG}}(E) \rightarrow 0). \quad (101)$$

- 実エネルギーでの共鳴現象

($f_{\ell,\text{BG}}(E)$ を無視した場合にのみ成立)

- (i) $E = M_R$ で $\text{Re} [f_\ell(E)] = 0$ かつ $\text{Im} [f_\ell(E)]$ が極大
 $\leftarrow Z = -\Gamma_R/(2p) < 0$ と式 (100) (留数 Z は実軸上で与えられる)
 - (ii) 散乱断面積 $\sigma(E)$ が $E = M_R$ でピークを持つ
 $\leftarrow$ (i) と光学定理
 - (iii) 位相差 $\delta_\ell(E)$ が急速に増加し $E = M_R$ で $\frac{\pi}{2}$ を切る
 $\leftarrow$ 式 (79) より $\text{Re} [f_\ell(M_R)] = 0$ のとき $\text{Im} [s_\ell(M_R)] = 0$
 相互作用無し ($\delta_\ell = 0$) 以外で $\text{Im} [s_\ell(M_R)] = 0$ となるためには $\delta_\ell = \pi/2$ (modulo π)
- $f_{\ell,\text{BG}}(E)$ が無視できない場合、干渉項が影響

$$|f_\ell(E)|^2 = |f_{\ell,\text{BW}}(E)|^2 + |f_{\ell,\text{BG}}(E)|^2 + 2\text{Re} [f_{\ell,\text{BW}}(E)f_{\ell,\text{BG}}^*(E)], \quad (102)$$

- 単にピークを fit するのではなく**精密な解析で共鳴極を決定**することが重要

6.5 有効レンジ展開

- 散乱振幅 $f_\ell(p)$: (79) より

$$f_\ell(p) = \frac{s_\ell(p) - 1}{2ip} = \frac{p^{2\ell}}{p^{2\ell+1} \cot \delta_\ell(p) - ip^{2\ell+1}} \quad (103)$$

- **有効レンジ展開** : ヨスト関数の展開 (86) より低エネルギー (p 小) では

$$p^{2\ell+1} \cot \delta_\ell(p) = -\frac{1}{a_\ell} + \frac{r_\ell}{2}p^2 + \mathcal{O}(p^4) \quad (104)$$

- s 波 ($\ell = 0$) の場合

$$f_0(p) = \frac{1}{-\frac{1}{a_0} + \frac{r_0}{2}p^2 + \mathcal{O}(p^4) - ip} \quad (105)$$

a_0 : 散乱長 (scattering length)、ハドロン物理では逆符号が使われることもある

r_0 : 有効レンジ (effective range) $\sim$ 相互作用距離、ただし負になることもある

- 低エネルギー散乱 : p の高次項が無視できる場合

$$f_0(p) \approx \frac{1}{-1/a_0 - ip} \quad (106)$$

極を $p = \frac{i}{a_0}$ に持つ

- $a_0 > 0$: 上半面の極、束縛状態、 $E = -\frac{1}{2\mu a_0^2}$
- $a_0 < 0$: 下半面の極、Virtual 状態、 $E = -\frac{1}{2\mu a_0^2}$

7 チャンネル結合とフェッシュバッハ共鳴

7.1 概要

- フェッシュバッハ共鳴：チャンネル結合散乱問題での共鳴状態
- フェッシュバッハの原論文 [28, 29]：複合核反応の理論（図 11、左）
- 冷却原子系での実現 [30]：外部磁場による散乱長 a_0 の制御（図 11、右）

ANNALS OF PHYSICS: **5**, 357–390 (1958)

Unified Theory of Nuclear Reactions*

HERMAN FESHBACH

Department of Physics and Laboratory for Nuclear Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts

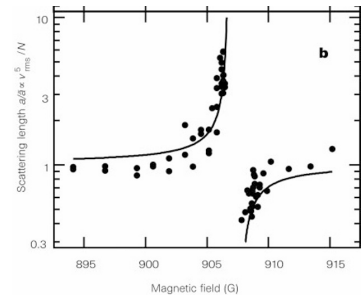


図 11: 左：フェッシュバッハの原論文、H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958)。右：磁場による冷却原子系の散乱長の制御、S. Inouye, Nature (London) **5392**, 151 (1998) より引用。

7.2 2チャンネルハミルトニアン

- チャンネルは P 、 Q の 2 つ、 P の閾値をエネルギーの原点 $E_{\text{th}}(P) = 0$ とする [31]
- 行列形式のシュレディンガー方程式

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (107)$$

$$H = \begin{pmatrix} H_{PP} & H_{PQ} \\ H_{QP} & H_{QQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_P} + V_P & V_t \\ V_t & \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_Q} + \Delta + V_Q \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} |P\rangle \\ |Q\rangle \end{pmatrix} \quad (108)$$

- V_P, V_Q ：チャンネル内ポテンシャル（図 4）、 $r \rightarrow \infty$ で消える
- V_t ：チャンネル遷移ポテンシャル ($P \leftrightarrow Q$)
- $\Delta > 0$ ：閾値エネルギー差 $E_{\text{th}}(Q) - E_{\text{th}}(P)$
- $0 < E < \Delta$ のエネルギー領域： P が open チャンネル、 Q が closed チャンネル

- **チャンネル P の有効ハミルトニアン**： $|Q\rangle$ を消去
式 (107) の下成分より

$$\begin{aligned} H_{QP}|P\rangle + H_{QQ}|Q\rangle &= E|Q\rangle \\ H_{QP}|P\rangle &= (E - H_{QQ})|Q\rangle \\ |Q\rangle &= (E - H_{QQ})^{-1}H_{QP}|P\rangle \end{aligned}$$

式 (107) の上成分に代入

$$\begin{aligned} H_{PP}|P\rangle + H_{PQ}|Q\rangle &= E|P\rangle \\ H_{PP}|P\rangle + H_{PQ}(E - H_{QQ})^{-1}H_{QP}|P\rangle &= E|P\rangle \end{aligned}$$

より

$$H^{\text{eff}}(E)|P\rangle = E|P\rangle, \quad (109)$$

$$H^{\text{eff}}(E) = H_{PP} + H_{PQ}(E - H_{QQ})^{-1}H_{QP} \quad (110)$$

H^{eff} は Q の効果をくりこんだ P の有効ハミルトニアン

- 式 (109) は P の 1 チャンネル（行列でない）シュレディンガー方程式
- 近似は行なっていない $\Rightarrow$ 式 (109) の解は式 (107) の $|P\rangle$ と等価
- $H^{\text{eff}}(E)$ はエネルギー依存（離散固有値を出す際には式 (109) を self-consistent に解く）

7.3 1 共鳴近似

- H_{QQ} の固有状態（図 12）：束縛状態 $|\phi_i\rangle$ 、エネルギー ϵ でラベルした連続状態 $|\phi(\epsilon)\rangle$

$$H_{QQ}|\phi_i\rangle = \epsilon_i|\phi_i\rangle, \quad (111)$$

$$H_{QQ}|\phi(\epsilon)\rangle = \epsilon|\phi(\epsilon)\rangle \quad (112)$$

$|\phi\rangle$ ： $V_t = 0$ でポテンシャルが V_Q のみの場合の固有状態、 $|\phi\rangle \neq |Q\rangle$

- スペクトル分解（連続状態は $\epsilon = \Delta$ から始まる）

$$1 = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| + \int_{\Delta}^{\infty} d\epsilon |\phi(\epsilon)\rangle\langle\phi(\epsilon)| \quad (113)$$

これにより H^{eff} は

$$H^{\text{eff}}(E) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_P} + V_P + \sum_i \frac{H_{PQ}|\phi_i\rangle\langle\phi_i|H_{QP}}{E - \epsilon_i} + \int_{\Delta}^{\infty} d\epsilon \frac{H_{PQ}|\phi(\epsilon)\rangle\langle\phi(\epsilon)|H_{QP}}{E - \epsilon + i0^+} \quad (114)$$

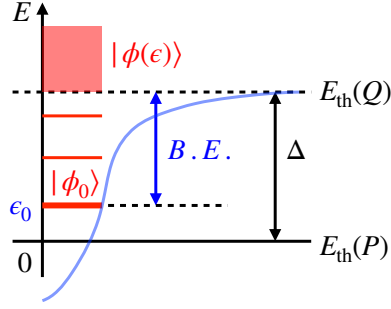


図 12: $\hat{H}_{QQ}$ の固有状態の模式図

- 式 (114) の第 3 項は $E > \Delta$ で虚部を持つ

$$\int dx \frac{f(x)}{x - a + i0^+} = \mathcal{P} \int dx \frac{f(x)}{x - a} - i\pi f(a) \quad (x = a \text{ が積分区間に含まれるとき})$$

- ϵ_0 が $E = 0$ に十分近いとき、 $E \ll \Delta$ の低エネルギーでは

$$H^{\text{eff}}(E) \approx \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_P} + \frac{H_{PQ}|\phi_0\rangle\langle\phi_0|H_{QP}}{E - \epsilon_0}, \quad (115)$$

- ϵ_0 は P の閾値 ($E = 0$) から測ったエネルギー、 Q の閾値 ($E = \Delta$) からの束縛エネルギーは

$$B.E. = \Delta - \epsilon_0$$

$B.E.$ は H_{QQ} によって固定 $\Rightarrow \Delta$ が外部磁場に比例するとき、 ϵ_0 が外部磁場で可変

7.4 散乱振幅と共鳴状態

- H^{eff} は P に対する 1 チャンネルハミルトニアン $\Rightarrow$ §5 の散乱理論を適用

$$H^{\text{eff}} = H_0 + V, \quad H_0|\mathbf{p}\rangle = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_P}|\mathbf{p}\rangle, \quad V = \frac{H_{PQ}|\phi_0\rangle\langle\phi_0|H_{QP}}{E - \epsilon_0} \quad (116)$$

- グリーン演算子 (レゾルベント)

$$G(E) = (E - H_0)^{-1}$$

- T 演算子に対する Lippmann-Schwinger 方程式

$$T(E) = V + VG(E)T(E) \quad (117)$$

- (on-shell) T 行列との関係

$$\langle \mathbf{p}' | T(E + i0^+) | \mathbf{p} \rangle = t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^2 \mu_P} f(E, \theta)$$

- T 行列に対する Lippmann-Schwinger 方程式

$$t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle + \int d\mathbf{q} \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{q} \rangle \frac{1}{E - \mathbf{q}^2/(2\mu_P) + i0^+} t(\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{p})$$

$t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ に対する積分方程式

- 分離型相互作用 ($\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ の関数の積)

$$\langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle = \lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p}) \quad (118)$$

このとき T 行列は解析的に解けて

$$f(E, \theta) = -(2\pi)^2 \mu t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = -(2\pi)^2 \mu \frac{F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p})}{\frac{1}{\lambda} - \int d\mathbf{q} \frac{F(\mathbf{q}) F(\mathbf{q})}{E - \mathbf{q}^2/(2\mu_P) + i0^+}} \quad (119)$$

- 式 (116) の V は分離型ポテンシャル

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | V(E) | \mathbf{p} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p}' | V_t | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | V_t | \mathbf{p} \rangle}{E - \epsilon_0} \\ \Rightarrow \quad \lambda &= \frac{1}{E - \epsilon_0}, \quad F(\mathbf{p}) = \langle \phi_0 | V_t | \mathbf{p} \rangle \quad (\text{形状因子}) \end{aligned}$$

- P チャンネルの散乱振幅

$$\begin{aligned} f(E, \theta) &= -\frac{N(E, \theta)}{E - \epsilon_0 - \Sigma(E)}, \quad N(E, \theta) = (2\pi)^2 \mu \langle \mathbf{p}' | V_t | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | V_t | \mathbf{p} \rangle \\ \Sigma(E) &= \int d\mathbf{q} \frac{\langle \phi_0 | V_t | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | V_t | \phi_0 \rangle}{E - \mathbf{q}^2/(2\mu_P) + i0^+} \quad (\text{自己エネルギー}) \end{aligned}$$

極の条件：

$$0 = E - \epsilon_0 - \Sigma(E) \quad (120)$$

- $V_t = 0$ の場合、 $\Sigma(E) = 0$ なので極の位置は

$$E = \epsilon_0 \in \mathbb{R}$$

H_{QQ} のみによる束縛状態に対応

- $V_t \neq 0$ の場合、一般には (120) の解だが、 V_t が弱ければ

$$E \approx \epsilon_0 + \Sigma(\epsilon_0) \quad (\text{摂動近似})$$

$\epsilon_0 > 0$ のとき、 $\Sigma(\epsilon_0)$ は虚部を持つ ($d\mathbf{q}$ 積分の下限は $q = 0$)

$\Rightarrow$ 複素固有値を持つ共鳴状態

- 物理的には H_{QQ} による束縛状態が P の連続状態に遷移して崩壊幅を持つ

7.5 §7 のまとめ

- P と Q のチャンネル結合ハミルトニアン
- チャンネル Q を消去し P の有効ハミルトニアン
- Q の束縛状態 $|\phi_0\rangle$ が P と結合し複素エネルギー状態

参考文献

- [1] 永江知文, 兵藤哲雄, *K 中間子原子核の物理* (共立出版, 2023).
- [2] 兵藤哲雄, 日本物理学会誌「最近の研究から」 第 75 巻第 8 号 478 (2020).
https://doi.org/10.11316/butsuri.75.8_478
- [3] 兵藤哲雄, ハドロン共鳴状態とその構造, 原子核三者若手夏の学校 2021
<https://hyodo.fpark.tmu.ac.jp/lecture.html#lec5>
- [4] 兵藤哲雄, 原子核ハドロン物理特論, 講義ノート
<https://hyodo.fpark.tmu.ac.jp/2023Tokuron.html>
- [5] 羽田野直道, 井村健一郎, 非エルミート量子力学 (KS 物理専門書, 2023).
- [6] A. Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications, 3rd edition* (Springer, 2001).
- [7] V. I. Kukulin, V. M. Krasnopol'sky, and J. Horacek, *Theory of Resonances* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989).
- [8] N. Moiseyev, *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [9] Y. Ashida, Z. Gong, and M. Ueda, Adv. Phys. **69**, 249 (2021), arXiv:2006.01837 [cond-mat.mes-hall].
- [10] J. R. Taylor, *Scattering Theory: The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions* (Wiley, New York, 1972).
- [11] R. Newton, *Scattering theory of waves and particles, 2nd edition* (Springer, Berlin, 2014).
- [12] T. Hyodo and M. Niiyama, Prog. Part. Nucl. Phys. **120**, 103868 (2021), arXiv:2010.07592 [hep-ph].
- [13] T. Kohler, K. Goral, and P. S. Julienne, Rev. Mod. Phys. **78**, 1311 (2006).
- [14] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
- [15] Particle Data Group, R. L. Workman, PTEP **2022**, 083C01 (2022).
- [16] LHCb Collaboration, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. Lett. **115**, 072001 (2015), arXiv:1507.03414 [hep-ex].
- [17] LHCb Collaboration, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. Lett. **122**, 222001 (2019), arXiv:1904.03947 [hep-ex].

- [18] LHCb Collaboration, R. Aaij *et al.*, Nature Phys. **18**, 751 (2022), arXiv:2109.01038 [hep-ex].
- [19] LHCb Collaboration, R. Aaij *et al.*, Nature Commun. **13**, 3351 (2022), arXiv:2109.01056 [hep-ex].
- [20] T. Hyodo and D. Jido, Prog. Part. Nucl. Phys. **67**, 55 (2012), arXiv:1104.4474 [nucl-th].
- [21] G. Gamow, Z. Phys. **51**, 204 (1928).
- [22] A. J. F. Siegert, Phys. Rev. **56**, 750 (1939).
- [23] T. A. Weber, C. L. Hammer, and V. S. Zidell, Am. J. Phys. **50**, 839 (1982).
- [24] T. Berggren, Nucl. Phys. A **109**, 265 (1968).
- [25] K. Miyahara and T. Hyodo, Phys. Rev. C **93**, no.1, 015201 (2016), arXiv:1506.05724 [nucl-th].
- [26] T. Hyodo, Phys. Rev. Lett. **111**, 132002 (2013), arXiv:1305.1999 [hep-ph].
- [27] N. Hatano, K. Sasada, H. Nakamura, and T. Petrosky, Prog. Theor. Phys. **119**, 187 (2008), arXiv:0705.1388 [quant-ph].
- [28] H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958).
- [29] H. Feshbach, Ann. Phys. **19**, 287 (1962).
- [30] S. Inouye *et al.*, Nature (London) **392**, 151 (1998).
- [31] A. Moerdijk, B. Verhaar, and A. Axelsson, Phys. Rev. **A51**, 4852 (1995).