

散乱理論とハドロン共鳴状態の構造

兵藤哲雄

2023 年 8 月 14 日

概要

2023 年度大阪大学集中講義「散乱理論とハドロン共鳴状態の構造」の講義ノート

目次

1 導入：ハドロン物理の共鳴状態	3
2 量子力学での共鳴状態	7
2.1 共鳴状態概観	7
2.2 ハミルトニアン固有状態としての共鳴	8
2.3 井戸型ポテンシャル	9
2.4 共鳴状態の波動関数の局在	12
2.5 §2 のまとめ	13
3 散乱理論の基礎	14
3.1 準備	14
3.2 散乱振幅	15
3.3 ユニタリー性と散乱弾面積	16
3.4 コスト関数	17
4 散乱理論での共鳴状態	20
4.1 散乱振幅の極としての共鳴	20
4.2 固有エネルギーとリーマン面	20
4.3 固有状態の分類	21
4.4 共鳴状態と観測量	22
4.5 有効レンジ展開	23
4.6 §3 と §4 のまとめ	24
5 フェッシュバッハ共鳴の理論	25
5.1 概要	25
5.2 2チャンネルハミルトニアン	25
5.3 1共鳴近似	26

5.4	散乱振幅と共鳴状態	27
5.5	磁場による散乱長の制御	30
5.6	§5 のまとめ	31
6	非相対論的有効場の理論	32
6.1	有効場の理論	32
6.2	ゼロレンジ模型	34
6.3	ボソン 2 体散乱	36
6.4	くりこみ	38
6.5	§6 のまとめ	38
7	複合性と弱束縛関係式	39
7.1	導入	39
7.2	弱束縛関係式	39
7.3	有効場の理論での複合性	40
7.4	有効場の理論での弱束縛関係式	42
7.5	不安定状態への拡張	43

1 導入：ハドロン物理の共鳴状態

ハドロンとは

- ハドロン：強い相互作用をする粒子の総称
- 現在までに観測されているハドロン [11]
 - バリオン ($p, n, \Lambda, \dots$)：約 170 種
 - メソン ($\pi, K, \eta, \dots$)：約 210 種
- 全ての状態がカラー SU(3) ゲージ理論である QCD から出てくる

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \bar{q}(i\not{D} - m_q)q$$

カラー 3 重項のクォーク： $\bar{q}, q$

カラー 8 重項のグルーオンは $G_{\mu\nu}, D_\mu$ 内に含まれる

- クォークは 6 種のフレーバーを持つ (u, d, s, c, b, t)

観測されている状態の規則性

- ハドロンはカラー 1 重項
QCD にカラーを持った状態を禁止する明確な条件はない
→ カラー閉じ込めの問題
- ハドロンのフレーバー量子数は qqq または $\bar{q}q$ で記述できる
QCD に $\bar{q}\bar{q}qq, \bar{q}qqqq$ などの状態を禁止する明確な条件はない
→ エキゾチックハドロン (genuine exotics) の問題
- 実験事実でありクォーク模型は関係ない
- J^{PC} エキゾチックなメソンは観測されている： $\pi_1(1400)$ と $\pi_1(1600)$ は $J^{PC} = 1^{-+}$

エキゾチック構造の候補 (ヘビークォーク系： c, b)

- ペンタクォーク $P_c(4312), P_c(4440), P_c(4457)$ [2, 3] (図 1 左)

$$P_c \rightarrow J/\psi(\bar{c}c) + p(ud)$$

- テトラクォーク T_{cc} [5, 4] (図 1 右)

$$T_{cc}^+ \rightarrow D^0(\bar{u}c)D^0(\bar{u}c)\pi^+(\bar{d}u)$$

- 360 種のうち数種 (~ 8) のみ
- 内部構造 (マルチクォーク、ハドロン分子、...) は確定していない
- フレーバー量子数は $P_c \sim uud$ で記述可能
しかしヘビークォーク対なしで質量を説明するのは不自然

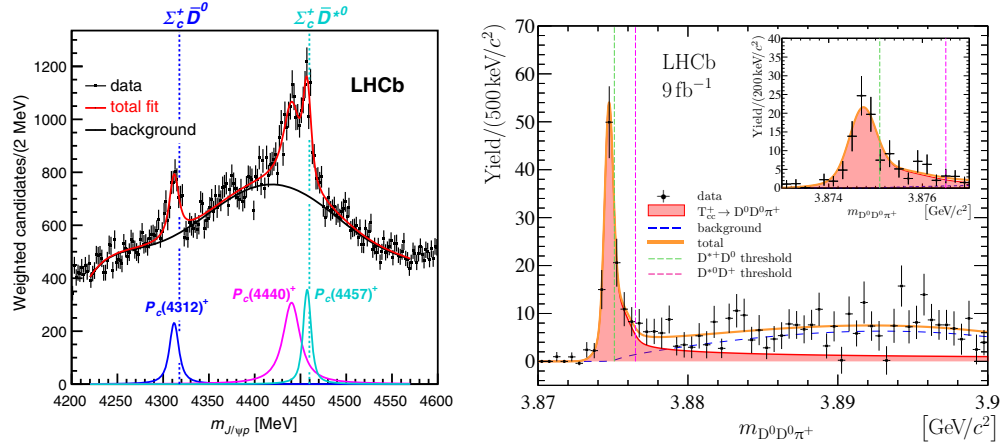


図 1: エキゾチックハドロンのスペクトルの例。左：ペンタクォーク P_c のスペクトル、R. Aaij *et al.*, (LHCb collaboration), Phys. Rev. Lett. **122**, 222001 (2019) より引用。右：テトラクォーク T_{cc} のスペクトル、R. Aaij *et al.* (LHCb collaboration), Nature Phys. **18**, 751 (2022) より引用。

エキゾチック構造の候補（軽いクォーク系： u, d, s ）

- $\Lambda(1405)$ ： $S = -1$, $I = 0$, $J^P = 1/2^-$ [6, 7, 8]
 - クォーク模型による記述の困難
軌道角運動量 $\ell = 1$ の uds 状態 $\rightarrow \sim 1.6\text{--}1.7$ GeV
実験値： ~ 1400 MeV
 - $\bar{K}N$ 分子状態？ペンタクォーク？
- スカラーメソン： $\sigma, \kappa, f_0(980), a_0(980)$, $J^P = 0^+$ [9]
 - クォーク模型による記述の困難
 $\bar{q}q$ 状態の質量： $\bar{n}n(I=0, I=1) < \bar{n}s, \bar{s}n < \bar{s}s(I=0)$
実験値： $\sigma(I=0) < \kappa < f_0, a_0(I=0, I=1)$
 - メソン・メソン分子状態？テトラクォーク？
- フレーバー量子数は $\Lambda(1405) \sim uds$ 、スカラーメソン $\sim \bar{q}q$ で記述可能

ハドロンの励起機構

- 構成子クォーク模型の励起：内部励起（図 2）
- QCD では $\bar{q}q$ 対生成による励起が可能 $\rightarrow$ マルチクォーク、ハドロ分子など
- 同じ量子数を持つ状態は互いに混合する

$$|\Lambda(1405)\rangle = C_{3q}|uds\rangle + C_{5q}|uds\bar{q}q\rangle + C_{MB}|MB\rangle + \dots$$

どのようにして重み C_i を決定するか？そもそも分解は well-defined か？

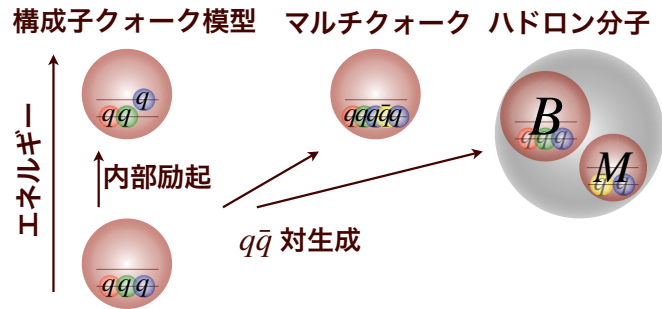


図 2: バリオンの励起機構の模式図。文献 [10] より引用。

強い相互作用による崩壊

- 興味のあるハドロンは強い相互作用に対し不安定

$$P_c \rightarrow J/\psi + p$$

$$T_{cc} \rightarrow D^0 + D^0 + \pi^+$$

$$\Lambda(1405) \rightarrow \pi + \Sigma$$

$$\sigma \rightarrow \pi + \pi, \quad \kappa \rightarrow \pi + K, \quad \dots$$

そもそも安定なハドロンは $\sim 20/380$

- 不安定状態は**ハドロン散乱中の共鳴状態**として扱う

講義の目標と計画

- エキゾチックハドロンの構造
不安定な共鳴状態の“構造”をどう定義するか？
- そもそも共鳴“状態”とは何なのか？
 - §2 量子力学での共鳴状態
→ 複素エネルギー固有状態
 - §3 散乱理論の基礎
→ 散乱振幅の定義
 - §4 散乱理論での共鳴状態
→ 散乱振幅の極
 - §5 フェッシュバッハ共鳴の理論
→ 連続状態に埋め込まれた束縛状態
 - §6 非相対論的有效場の理論
→ 低エネルギー散乱の記述
 - §7 複合性と弱束縛関係式
→ ハドロン系への応用

他分野との関連

- 原子核物理
閾値近傍の励起状態のクラスター構造： ${}^8\text{Be} \sim \alpha\alpha$, ホイル状態 ${}^{12}\text{C} \sim \alpha\alpha\alpha$, etc.
- 素粒子物理
ヒッグス粒子： $H \rightarrow \gamma\gamma$, $H \rightarrow ZZ$ 、標準理論のヒッグスか、新粒子の複合状態か？
既知の粒子への崩壊を通じて観測 → 共鳴
- 宇宙物理
ブラックホール準固有振動：減衰する重力波（減衰振動）
- 原子物理
冷却原子でのフェッシュバッハ共鳴 [11] → 外部磁場によって散乱長を制御
Broad/narrow フェッシュバッハ共鳴：entrance channel fraction $\approx$ 複合性

参考文献

- 量子力学での共鳴
教科書：羽田野-井村 [12], A. Bohm [13], Kukulin-Krasnopol'sky-Horacek [14], N. Moiseyev [15]
レビュー論文：Ashida-Gong-Ueda [16]
- 散乱理論
教科書：J.R. Taylor [17], R.G. Newton [18], 永江-兵藤 [8]
レビュー論文：Hyodo-Niiyama [7]
- フェッシュバッハ共鳴
レビュー論文：Köhler-Góral-Julienne [19], Chin-Grimm-Julienne-Tiesinga [20]
- 有効場の理論
レビュー論文：Braaten-Kusunoki-Zhang [21]
- 複合性と弱束縛関係式
原著論文：S. Weinberg [22], Kamiya-Hyodo [23, 24]
レビュー論文：T. Hyodo [25]
物理学会誌：兵藤哲雄 [10]
- この講義は部分的に羽田野直道氏（京都大学基礎物理学研究所、2017年2月）および西田祐介氏（京都大学基礎物理学研究所、2014年2月）の集中講義を参考にしています。
- 2021年原子核三者若手夏の学校の講義
<https://hyodo.fpark.tmu.ac.jp/lecture.html#lec5>
でも関連する内容を扱っています。

2 量子力学での共鳴状態

2.1 共鳴状態概観

共鳴状態と散乱状態

- 共鳴状態：量子力学的に形成される準安定な“状態”、時間がたつと崩壊する
- シュレディンガー方程式は時間反転対称
 $\leftrightarrow$ 共鳴状態は崩壊するのみ、つまり時間反転対称でない
 解が理論（方程式）の対称性を破る：自発的破れ？
- 崩壊先は散乱状態（連続状態） $\rightarrow$ 散乱理論が不可欠
 例) $\Lambda(1405) \rightarrow \pi\Sigma$: $\Lambda(1405)$ は $\pi\Sigma$ 散乱の共鳴状態
- 非弾性散乱と散乱チャンネル
 - － 弾性散乱：始状態 = 終状態 ($\pi\Sigma \rightarrow \pi\Sigma$)
 - － 非弾性散乱：異なる終状態へ遷移 ($\pi\Sigma \rightarrow \bar{K}N$, $\pi\Sigma \rightarrow \pi\pi\Sigma$, etc.)
 - － チャンネル：始状態、終状態を指定する粒子の組 ($\pi\Sigma$, $\bar{K}N$, $\pi\pi\Sigma$, etc.)
- 閾値：散乱状態の始まる最低エネルギー
 例) ポテンシャルが $r \rightarrow \infty$ で消える場合、 $E = 0$ が閾値

共鳴の特徴づけ

- 様々な定義：これらの関係は？
 - － スペクトル/散乱断面積のピーク：図 3(a)
 - － 位相差 (phase shift) $\delta(E)$ が $\pi/2$ を切る：図 3(b)
 - － 複素エネルギー平面での散乱振幅の極：図 3(c)
 - － ハミルトニアンの（複素エネルギー）固有状態：図 3(d)

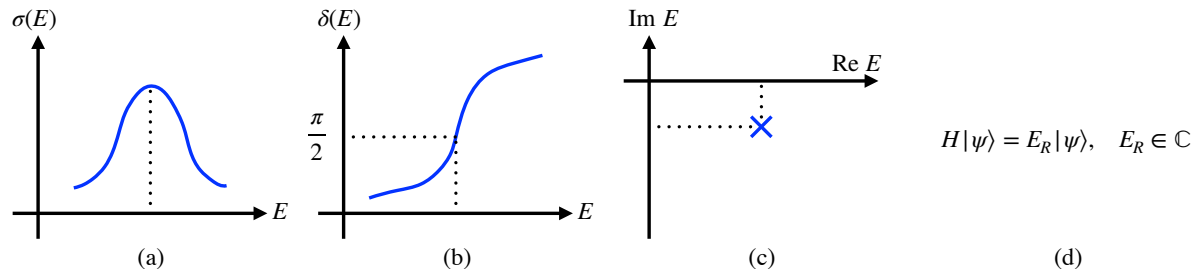


図 3: 共鳴状態の特徴づけの模式図。(a)：散乱断面積 $\sigma(E)$ のピーク、(b)：位相差 $\delta(E)$ が $\pi/2$ を切るエネルギー、(c)：散乱振幅の極、(d)：複素エネルギー固有状態。

形状共鳴とフェッシュバッハ共鳴

- 共鳴状態は大きく 2 種に分類される
- 形状共鳴 (shape resonance, potential resonance) : 図 4(b)
 - 1 チャンネル散乱問題
典型的なポテンシャル：短距離引力+斥力障壁
 - エネルギー $E > 0$
 - トンネル効果により不安定
- フェッシュバッハ共鳴 (Feshbach resonance) : 図 4(c)
 - チャンネル結合散乱問題
 P : entrance channel, Q : closed channel
 - P の閾値を $E = 0$ として Q の閾値が $E = \Delta > 0$
 - Q チャンネルの束縛状態が $0 < E < \Delta$ に存在
 - $Q \rightarrow P$ 遷移により不安定
- 両者は起源が異なる：区別する方法 → 複合性

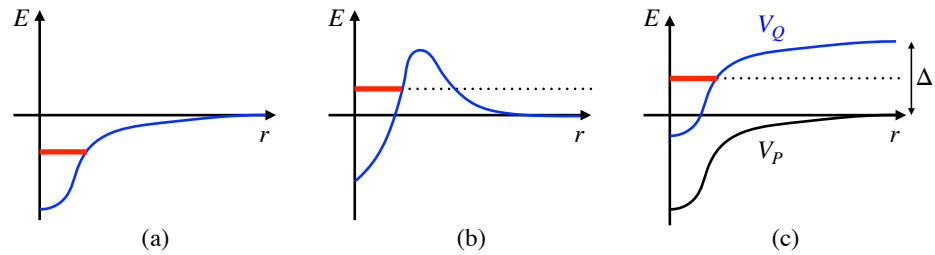


図 4: 共鳴状態の説明。(a)：束縛状態、(b)：形状共鳴、(c)：フェッシュバッハ共鳴。

2.2 ハミルトニアン固有状態としての共鳴

- 文献 [26]：原子核の α 崩壊を記述するために固有エネルギーの虚部を手で導入（符号は現在の定義 $\text{Im } E < 0$ と逆）

$$E = E_0 + i \frac{\hbar \lambda}{4\pi} = E_0 + i \frac{\hbar \lambda}{2}$$

λ ：崩壊定数、崩壊幅と $\Gamma = \hbar \lambda$ の関係

- 波動関数の時間発展（符号は現在の定義 $e^{-iEt/\hbar}$ と逆）

$$\Psi(t) \propto \exp\{+iEt/\hbar\} = \exp\{+iE_0t/\hbar\} \exp\{-\lambda t/2\}$$

確率が指数関数的に減少 $|\Psi(t)|^2 \propto \exp\{-\lambda t\}$

- 「エルミート演算子の固有値は実数」と矛盾？

← 演算子の作用する空間（定義域 $D(H)$ ）を指定する必要がある

c.f. エルミート共役の定義： $\langle H^\dagger \Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, H\Phi \rangle$, $\Psi, \Phi \in D(H)$

- 固有値が実数になるのは $D(H)$ がヒルベルト空間のとき（ ~ 2 乗可積分な関数空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ ）

$$\int |\Psi(x)|^2 dx < \infty$$

拡張された定義域では H は複素固有値を持ちうる

- 2 乗可積分でない波動関数の例：平面波 $\Psi(x) \sim e^{\pm ipx}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dx \rightarrow \infty$$

共鳴は崩壊を通じて散乱状態と結合：2 乗可積分でない波動関数

問題 1

1) $x \in [0, L]$ で定義された 1 次元の量子力学を考える。 $E > 0$ として以下の自由なシュレディンガー方程式（ $\hbar = 1, m = 1$, §1.3 参照）の境界条件 $\phi(0) = \phi(L) = 0$ を満たす固有関数 $\phi_n(x)$ を整数 n を用いて表せ。

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = E\phi(x).$$

2) 固有関数 $\{\phi_n\}$ に対し、運動量演算子 $p = -id/dx$ がエルミートであること、つまり以下を示せ。

$$\int_0^L \phi_n^*(x) p \phi_m(x) dx = \int_0^L [p \phi_n(x)]^* \phi_m(x) dx.$$

3) 固有関数 $\{\phi_n\}$ に対し、演算子 p^3 がエルミートかどうか調べよ（表面項に注意）。

2.3 井戸型ポテンシャル

定義と散乱状態

- シュレディンガー方程式（ $\hbar = 1, m = 1$ ）

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) \right) \chi(r) = E\chi(r), \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (1)$$

- この単位系では物理量は長さの次元で表現される

$$(\text{エネルギー}) = (\text{長さ})^{-2}, \quad (\text{運動量}) = (\text{長さ})^{-1}$$

- $\chi(r) \sim$ 球対称 3 次元ポテンシャルの s 波動径波動関数： $\psi_{\ell, m}(\mathbf{r}) = \frac{\chi_{\ell}(r)}{r} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{r}})$

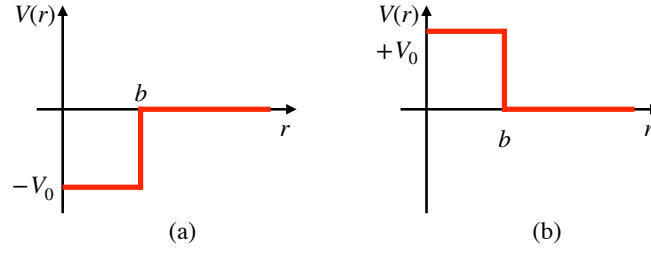


図 5: 幅 b の角型ポテンシャル。(a): 深さ V_0 の引力、(b): 高さ V_0 の斥力。

- 引力井戸型ポテンシャル ($V_0 > 0$ 、図 5(a))

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq b \\ 0 & b < r \end{cases} \quad (2)$$

- 一般解 (境界条件なし)

$$\chi(r) \propto \begin{cases} e^{\pm ikr} & 0 \leq r \leq b, \quad k = \sqrt{2(E + V_0)} \\ e^{\pm ipr} & b < r, \quad p = \sqrt{2E} \end{cases}$$

- 散乱解 (境界条件 $\chi(r \rightarrow 0) = 0$)

$$\chi(r) = \begin{cases} C \sin(kr) & 0 \leq r \leq b \\ A^-(p)e^{-ipr} + A^+(p)e^{ipr} & b < r \end{cases} \quad (3)$$

$$A^\pm(p) = \frac{C}{2} \left[\sin(kb) \mp i \frac{k}{p} \cos(kb) \right] e^{\mp ipb}$$

- 散乱解は規格化できない ($r \rightarrow \infty$ で 0 にならない)
→ 全体の規格化 C は任意
- $A^\pm(p)$ は χ と $d\chi/dr$ の $r = b$ での連続性で決まる
- $r \rightarrow \infty$ の波動関数から位相差が決まる (§3 参照)
- 散乱解は任意の $E > 0$ でシュレディンガー方程式 (II) を満たす: 連続固有状態
- 波 $e^{\pm ipr}$ は $\pm r$ 方向に進む: A^+ (A^-) は外向き (内向き) の波の振幅

離散固有状態と境界条件

- 離散固有状態は $r \rightarrow 0$ と $r \rightarrow \infty$ 両方の境界条件を課すことで得られる
- 束縛状態の解: 固有エネルギーは $E < 0 \Leftrightarrow$ 固有運動量 $p = \sqrt{2E}$ は純虚数

$$p = i\kappa, \quad \kappa > 0$$

とすると、 $r \rightarrow \infty$ の波動関数は

$$\chi(r) = A^-(i\kappa)e^{+\kappa r} + A^+(i\kappa)e^{-\kappa r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

表 1: 式 (4) で $V_0 = 10b^{-2}$ の場合の数値解 (引力井戸型ポテンシャルの離散固有状態)。

	$p [b^{-1}]$	$E = p^2/2 [b^{-2}]$
束縛状態 B	$+ 3.68i$	$- 6.78$
第 1 共鳴 R_1	$1.06 - 1.02i$	$0.05 - 1.08i$
第 2 共鳴 R_2	$6.29 - 1.41i$	$18.8 - 8.86i$
第 3 共鳴 R_3	$9.90 - 1.69i$	$47.6 - 16.8i$
$\vdots$		

- 境界条件: $\chi(r)$ が 2 乗可積分 $\rightarrow$ 発散する成分 $e^{+\kappa r}$ を消去

$$A^-(i\kappa) = 0$$

$p = i\kappa$ に対して、内向きの波 (e^{-ipr}) が消えて外向きの波 (e^{+ipr}) のみになる

- $A^-(p) = 0$: 外向き (Siegert) 境界条件 [30]

$$\tan(\sqrt{p^2 + 2V_0} b) = -i \frac{\sqrt{p^2 + 2V_0}}{p} \quad (4)$$

$p = i\kappa$ を代入すると通常の井戸型ポテンシャルの解の条件 $\kappa = -k \cot(kb)$

共鳴解

- 束縛状態: p が純虚数で式 (4) を満たす解
 $\leftrightarrow$ 物理的な散乱は実で正の p で起こる
 $\Rightarrow$ 束縛解は (4) の解析接続から得られる
- 共鳴状態: p が複素数で式 (4) を満たす解
- 引力井戸型ポテンシャルは無限個の共鳴解を持つ [27, 15]
 表 1: $V_0 = 10b^{-2}$ の場合の式 (4) の数値解
 複素 p 平面で $1/|A^-(p)|$ をプロットしたときの極 (図 6、左)
- 固有運動量の虚部が負

$$p = p_R - ip_I, \quad p_R, p_I > 0$$

波動関数の振る舞い

$$\chi(r) \rightarrow A^+(p)e^{ipr} \propto \underbrace{e^{ip_R r}}_{\text{振動}} \underbrace{e^{+p_I r}}_{\text{増大}}$$

$\chi(r)$ は $r \rightarrow \infty$ で振動しながら発散、2 乗可積分でない (図 6、右)

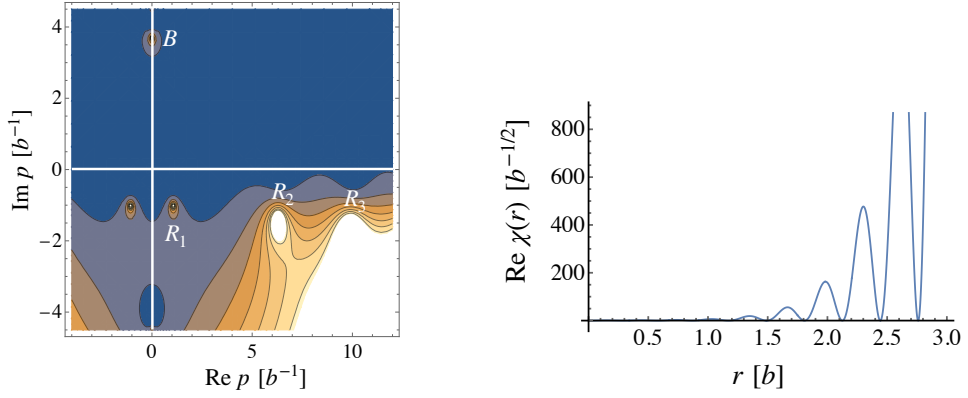


図 6: 左: $V_0 = 10b^{-2}$ の場合の井戸型ポテンシャル (2) の $1/|A^-(p)|$ の等高線プロット。右: 第 3 共鳴 R_3 の波動関数の実部。

2.4 共鳴状態の波動関数の局在

実エネルギーでの共鳴現象

- 実験で調べられるのは実エネルギーのみ
- 斥力障壁ポテンシャル ($V_0 > 0$ 、図 5(b)) [15, 28]

$$V(r) = \begin{cases} +V_0 & 0 \leq r \leq b \\ 0 & b < r \end{cases}$$

(引力の解は特殊な例なので局在を見るには不適當)

- 解の条件: 引力の場合の条件で $V_0 \rightarrow -V_0$ と置き換え

$$\tan(\sqrt{p^2 - 2V_0} b) = -i \frac{\sqrt{p^2 - 2V_0}}{p} \quad (5)$$

- 束縛解はなく、共鳴解は $\text{Re } E > V_0$ の領域に無限個存在 (表 2)
(エネルギーの原点を $E = +V_0$ にずらせば $r > b$ で引力)
- 実エネルギーの散乱波動関数の振る舞い (図 7)
 - 共鳴に近いエネルギーで波動関数は $r < b$ (相互作用領域) に局在
 - 共鳴から離れるとほぼ平面波

局在の定量化

- 相互作用領域と外側との振幅の比

$$\chi(r) = \begin{cases} C \sin(kr) & 0 \leq r \leq b \\ C^{\text{out}} \sin(pr + \delta) & b < r, \quad \delta: \text{位相差} \end{cases}$$

表 2: 式 (5) で $V_0 = 10b^{-2}$ の場合の数値解（斥力障壁ポテンシャルの離散固有状態）。

	$p [b^{-1}]$	$E = p^2/2 [b^{-2}]$
第 1 共鳴 R_1	$5.37 - 0.36i$	$14.4 - 1.9i$
第 2 共鳴 R_2	$7.56 - 0.92i$	$28.2 - 6.9i$
$\vdots$		

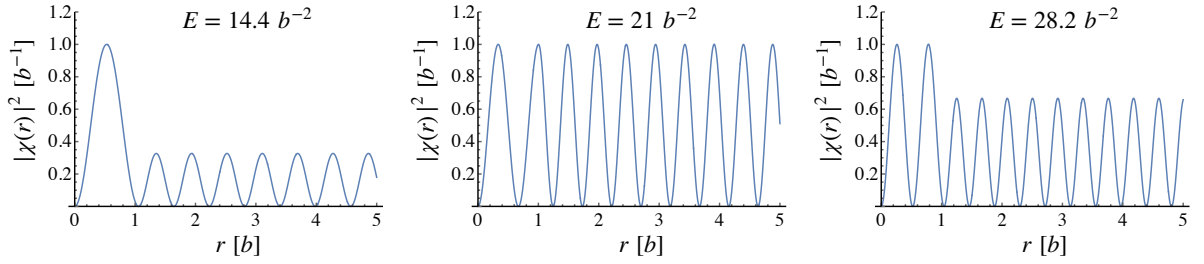


図 7: 波動関数の局在。斥力井戸型ポテンシャルで $V_0 = 10b^{-2}$ の場合の共鳴に近いエネルギー $E = 14.4b^{-2}$ 、 $E = 28.2b^{-2}$ と共鳴から遠いエネルギー $E = 21b^{-2}$ の波動関数。

- 局在率 R : $r = b$ での連続の条件より

$$R = \left| \frac{C}{C_{\text{out}}} \right|^2 = \left(1 + \frac{k^2 - p^2}{p^2} \cos^2(kb) \right)^{-1}$$

$$p = \sqrt{2E}, k = \sqrt{2(E - V_0)}, V_0 > 0 \text{ より } k < p, \text{ よって } R \geq 1$$

- 数値計算：虚部の小さい（幅の狭い）共鳴がより局在

$$R = \begin{cases} 3.05 & (E = 14.4b^{-2}, \text{ 第 1 共鳴}) \\ 1.00 & (E = 21b^{-2}) \\ 1.49 & (E = 28.2b^{-2}, \text{ 第 2 共鳴}) \end{cases}$$

2.5 §2 のまとめ

- 離散固有状態 ← 外向き境界条件
- 共鳴：ハミルトニアンの複素エネルギー固有状態
(束縛と同じ、固有運動量の解析接続)
- 共鳴の波動関数は
 - $r \rightarrow \infty$ で発散（複素 p ）
 - 相互作用領域に局在（実 p ）

3 散乱理論の基礎

3.1 準備

系の定義

- 区別できる粒子 1、粒子 2 (質量 m_1 、 m_2) の量子力学的散乱
- ハミルトニアン $H = H_0 + V$ (H_0 : 運動項、 V : ポテンシャル)
- 空間 3 次元、非相対論的、 $\hbar = 1$
- 内部自由度 (スピン、フレーバーなど) なし
- 弾性散乱 (始状態 = 終状態、チャンネル結合なし)
- 回転対称性 $\Leftrightarrow$ 球対称ポテンシャル $V(r) \Leftrightarrow [H, \mathbf{L}] = 0$
- 短距離力 (遠方 $r \rightarrow \infty$ でポテンシャル $V(r)$ が十分はやく消える)

散乱のキネマティクス

- キネマティクスは相対運動量で指定 (図 8)
 - 始状態: $\mathbf{p}$ (重心系では粒子 1 の運動量が $\mathbf{p}$ 、粒子 2 が $-\mathbf{p}$)
 - 終状態: $\mathbf{p}'$
- 弾性散乱では運動量の大きさが不変: $p \equiv |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$
- 散乱過程を特徴づけるパラメーターは 2 つ

- 散乱角

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{p^2}$$

- 散乱エネルギー (または運動量 p)

$$E = \frac{p^2}{2\mu}$$

換算質量は $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

- 物理的な散乱は $E > 0$ 、 $p > 0$ で起こる¹
- 波動関数はエネルギー E の時間非依存シュレディンガー方程式を解いて得られる (§2)

¹物理的な散乱には E 、 p どちらを用いても良いが、複素平面への解析接続を考える際には以下で与えられる S 行列や散乱振幅は p の有理型関数として考える。

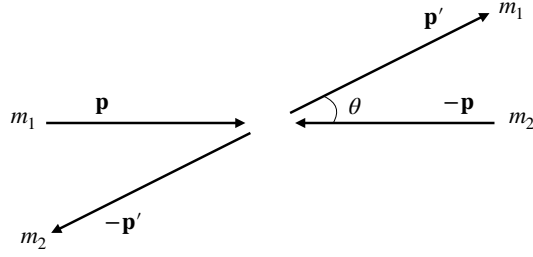


図 8: 散乱のキネマティクスの模式図。

状態ベクトル

- 運動量表示：始状態 $|\mathbf{p}\rangle$ 、終状態 $\langle \mathbf{p}'|$ 、規格化は

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad (6)$$

これらは H_0 の固有状態（漸近状態）、 $H_0|\mathbf{p}\rangle = \frac{p^2}{2\mu}|\mathbf{p}\rangle$

座標基底の完全系を $1 = \int d\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|$ とすると、座標表示の波動関数は $\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} / (2\pi)^{3/2}$

- 角運動量表示：始状態 $|E, \ell, m\rangle$ 、終状態 $\langle E', \ell', m'|$ 、規格化は

$$\langle E', \ell', m' | E, \ell, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm} \quad (7)$$

- 両者の関係：

$$\langle \mathbf{p}' | E, \ell, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \delta(E' - E) Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{p}}'), \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{p} \quad (8)$$

これは座標表示が相互作用のない場合の解なので球ベッセル関数と球面調和関数の積に比例して

$$\langle \mathbf{r} | E, \ell, m \rangle = i^{\ell} \sqrt{\frac{2\mu p}{\pi}} j_{\ell}(pr) Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{r}})$$

であり、球ベッセル関数に対して

$$\int_0^{\infty} dr r^2 j_{\ell}(p'r) j_{\ell}(pr) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{p^2} \delta(p' - p).$$

が成り立つことから示される

3.2 散乱振幅

- 散乱演算子：始状態と終状態の遷移

$$S = \Omega_{-}^{\dagger} \Omega_{+} = \lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{iH_0 t} e^{-iHt}] \lim_{t \rightarrow -\infty} [e^{iHt} e^{-iH_0 t}] \quad (9)$$

$\Omega_{\pm}$: Møller 演算子

- S 行列要素 (S 行列とも呼ばれる) : $s_\ell(E) \in \mathbb{C}$

$$\langle E', \ell', m' | S | E, \ell, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm} s_\ell(E) \quad (10)$$

- 位相差 : $\delta_\ell(E) \in \mathbb{R}$

$$s_\ell(E) = \exp\{2i\delta_\ell(E)\} \quad (11)$$

- T 行列 : $t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \in \mathbb{C}$

$$\langle \mathbf{p}' | (S - 1) | \mathbf{p} \rangle = -2\pi i \delta(E' - E) t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$$

- 散乱振幅 : $f(E, \theta) \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(E, \theta) &= -(2\pi)^2 \mu t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \\ &= \sum_{\ell} (2\ell + 1) f_\ell(E) P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{部分波展開}) \end{aligned} \quad (12)$$

S 行列のとの関係

$$f_\ell(E) = \frac{s_\ell(E) - 1}{2ip} \quad (13)$$

- $s_\ell, \delta_\ell, f_\ell$ は部分波 ℓ ごとに E のみの関数

3.3 ユニタリー性と散乱弾面積

- 定義 (9) より S 演算子はユニタリー (H がエルミートするとき)

$$S^\dagger S = 1$$

時間発展でノルム (確率) が保存

- 完全性 $1 = \int dE \sum_{\ell, m} |E, \ell, m\rangle \langle E, \ell, m|$ と定義 (10) より

$$s_\ell^*(E) s_\ell(E) = |s_\ell(E)|^2 = 1 \quad (14)$$

これより位相差は実 ($E > 0$ のとき)

$$\exp\{2i(\delta_\ell(E) - \delta_\ell^*(E))\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Im } \delta_\ell(E) = 0$$

- 散乱弾面積

$$\sigma(E) = \int d\Omega |f(E, \theta)|^2 = \sum_{\ell} 4\pi(2\ell + 1) |f_\ell(E)|^2$$

式 (13) を代入すると

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \sum_{\ell} \sigma_\ell(E) \\ \sigma_\ell(E) &= \frac{2\pi(2\ell + 1)}{\mu E} \sin^2 \delta_\ell(E) \end{aligned} \quad (15)$$

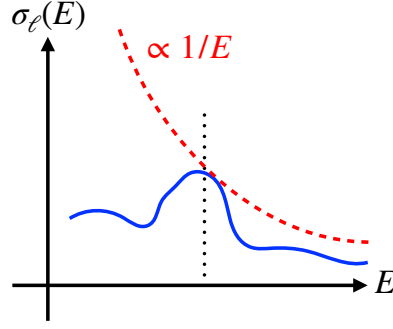


図 9: 断面積の模式図。破線はユニタリティ限界 $2\pi(2\ell+1)/(\mu E)$ を表す。

- ユニタリティ限界: $\sin^2 \delta_\ell(E) \leq 1$ より断面積には上限がある (図 9)

$$\sigma_\ell(E) \leq \frac{2\pi(2\ell+1)}{\mu E}$$

等号成立は $\sin \delta_\ell = \pm 1$ つまり $\delta_\ell = \frac{\pi}{2}$ (modulo π)

- $E \rightarrow 0$ のとき、 $\sigma_\ell(E)$ の上限は ∞ (ユニタリ極限)

3.4 ヨスト関数

散乱振幅と波動関数との関係

- Riccati 関数

- $V = 0$ の 3 次元波動関数 $\psi_{\ell,m}(\mathbf{r})$ ($p = \sqrt{2\mu E}$):

$$\psi_{\ell,m}(\mathbf{r}) = [A j_\ell(pr) + B n_\ell(pr)] Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) = [C h_\ell^-(pr) + D h_\ell^+(pr)] Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}})$$

$j_\ell(z)$ [$n_\ell(z)$]: 球 Bessel (Neumann) 関数、 $h^\pm(z)$: 球 Hankel 関数²

- 動径波動関数 $\chi_\ell(r) \propto r \psi_{\ell,m}(\mathbf{r})$
- Riccati-Bessel/Neumann 関数: $\chi_\ell(r)$ を展開するのに便利

$$\hat{j}_\ell(z) = z j_\ell(z), \quad \hat{n}_\ell(z) = z n_\ell(z),$$

- Riccati-Hankel 関数

$$\hat{h}_\ell^\pm(z) = z h_\ell^\pm(z) \rightarrow \exp\{\pm i(z - \ell\pi/2)\} \quad z \rightarrow \infty \quad (16)$$

つまり $\hat{h}_\ell^+(pr) \sim e^{+ipr}$ ($\hat{h}_\ell^-(pr) \sim e^{-ipr}$) は外向き (内向き) の波

²Neumann 関数の定義は $n_0(z) = -\cos z/z$ のように $-$ 符号付きであることが多いが、散乱理論では $n_0(z) = +\cos z/z$ の定義がよく使われる。

- Regular solution $\phi_{\ell,p}(r)$: 固有運動量 p の $\chi_{\ell}(r)$ を以下のように規格化

$$\frac{\phi_{\ell,p}(r)}{\hat{j}_{\ell}(pr)} \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow 0) \quad (17)$$

$\phi_{\ell,p}(r) \rightarrow 0$ に加えて、大きさ（原点での傾き）も指定

- $\phi_{\ell,p}(r)$ の $r \rightarrow \infty$ での漸近形 : $V = 0$ なので Riccati 関数の線形結合でかける

$$\phi_{\ell,p}(r) \rightarrow \frac{i}{2} \left[\not\!/\ell(p) \hat{h}_{\ell}^{-}(pr) - [\not\!/\ell(p)]^* \hat{h}_{\ell}^{+}(pr) \right] \quad (r \rightarrow \infty) \quad (18)$$

原点での傾きが実数で、動径シュレディンガー方程式は i を含まないため $\phi_{\ell,p}(r)$ は実数
 $\Rightarrow \phi_{\ell,p}(r) = C \hat{h}_{\ell}^{-}(pr) + D \hat{h}_{\ell}^{+}(pr)$ のとき $D = C^*$ ($[\hat{h}^{\pm}(z)]^* = \hat{h}^{\mp}(z)$)

- ヨスト (Jost) 関数 $\not\!/\ell(p)$: 内向き波の振幅 $\leftarrow$ 式 (16)

$$\not\!/\ell(p) = 1 + \frac{2\mu}{p} \int_0^{\infty} dr \hat{h}_{\ell}^{+}(pr) V(r) \phi_{\ell,p}(r), \quad (19)$$

- 外向き境界条件 = ヨスト関数 $\not\!/\ell(p)$ のゼロ点

- ヨスト関数は p の解析関数 ($\sim$ 多項式、特異性を持たない)³
- $\not\!/\ell(p)$ の p が小さい時の展開 : 積分表示 (19) を用いて以下が示せる

$$\not\!/\ell(p) = 1 + \underbrace{[\alpha_{\ell} + \beta_{\ell} p^2 + \mathcal{O}(p^4)]}_{p \text{ の偶数べき}} + i \underbrace{[\gamma_{\ell} p^{2\ell+1} + \mathcal{O}(p^{2\ell+3})]}_{p \text{ の奇数べき}}, \quad \alpha_{\ell}, \beta_{\ell}, \gamma_{\ell}, \dots \in \mathbb{R} \quad (20)$$

- ヨスト関数の複素共役（複素 p に解析接続） $\leftarrow$ 式 (20)

$$[\not\!/\ell(p)]^* = \not\!/\ell(-p^*) \quad (21)$$

$\Rightarrow$ 物理的な散乱 ($p > 0$) の場合、式 (22) は

$$\phi_{\ell,p}(r) \rightarrow \frac{i}{2} \left[\not\!/\ell(p) \hat{h}_{\ell}^{-}(pr) - \not\!/\ell(-p) \hat{h}_{\ell}^{+}(pr) \right] \quad (r \rightarrow \infty) \quad (22)$$

具体例

- s 波 ($\ell = 0$) の場合 : $\hat{j}_0(pr) = \sin(pr)$ 、 $\hat{h}_0^{\pm}(pr) = e^{\pm i pr}$
- §2.3 の井戸型ポテンシャルの解 (3)

$$\chi(r) \rightarrow C \sin(kr) = Ckr + \mathcal{O}(r^3)$$

- 式 (17) の規格化 : $\hat{j}_0(pr) = pr + \mathcal{O}(r^3)$ より

$$\phi_{\ell,p}(r) = \chi(r) \Big|_{C=\frac{p}{k}}$$

³厳密には式 (19) からポテンシャルの性質によって複素 p 平面で解析的な領域が決まる。

- 井戸型ポテンシャルのヨスト関数

$$\begin{aligned}\frac{i}{2} \not\! \! \! \nearrow_0^{\text{井戸}}(p) &= A^-(p) \Big|_{C=\frac{p}{k}} \\ \not\! \! \! \nearrow_0^{\text{井戸}}(p) &= \left[\cos(kb) - i \frac{p}{k} \sin(kb) \right] e^{ipb}\end{aligned}$$

問題 2

- 1) 散乱振幅 $f_\ell(E)$ を位相差 $\delta_\ell(E)$ で表すことで、式 (15) を示せ。
- 2) ルジャンドル多項式の規格化に注意して、以下の光学定理を示せ。

$$\text{Im } f(E, \theta = 0) = \frac{p}{4\pi} \sigma(E).$$

4 散乱理論での共鳴状態

4.1 散乱振幅の極としての共鳴

- §2: 共鳴はハミルトニアン $\hat{H}$ の離散固有状態 (複素 p) $\leftarrow$ 外向き境界条件
- §3: 散乱理論での外向き境界条件はヨスト関数のゼロ点 $\mathcal{J}_\ell(p) = 0$
- 波動関数による S 行列: 入射 (内向き) 波で規格化された散乱 (外向き) 波の振幅

$$\chi_\ell(r) \rightarrow \hat{h}_\ell^-(pr) - s_\ell(p) \hat{h}_\ell^+(pr) \quad (r \rightarrow \infty)$$

式 (22) と比較すると S 行列がヨスト関数で表される

$$s_\ell(p) = \frac{\mathcal{J}_\ell(-p)}{\mathcal{J}_\ell(p)}$$

$\Rightarrow$ 離散固有状態は **S 行列の極** で表される

- 式 (21) より、ユニタリー性の条件 (14) が確認できる ($p \notin \mathbb{R}$ では $s_\ell^*(p)s_\ell(p) \neq 1$)

$$s_\ell^*(p)s_\ell(p) = \frac{[\mathcal{J}_\ell(-p)]^* \mathcal{J}_\ell(-p)}{[\mathcal{J}_\ell(p)]^* \mathcal{J}_\ell(p)} = \frac{\mathcal{J}_\ell(p^*) \mathcal{J}_\ell(-p)}{\mathcal{J}_\ell(-p^*) \mathcal{J}_\ell(p)} = 1 \quad (p > 0)$$

- 散乱振幅: 式 (13) より

$$f_\ell(p) = \frac{s_\ell(p) - 1}{2ip} = \frac{\mathcal{J}_\ell(-p) - \mathcal{J}_\ell(p)}{2ip\mathcal{J}_\ell(p)} \quad (23)$$

$\Rightarrow$ 離散固有状態は **散乱振幅の極** で表される

- $s_\ell(p)$ 、 $f_\ell(p)$ は p の有理型関数 ($\sim$ 多項式/多項式、極以外の特異性を持たない)

4.2 固有エネルギーとリーマン面

- 物理的領域 $p > 0$ で定義された $\mathcal{J}_\ell(p)$ 、 $s_\ell(p)$ 、 $f_\ell(p)$ を複素平面に解析接続
- 複素運動量 p 、複素エネルギー E

$$p = |p|e^{i\theta_p}, \quad E = |E|e^{i\theta_E}$$

- 関係

$$E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{|p|^2}{2\mu} e^{2i\theta_p} \Rightarrow |E| = \frac{|p|^2}{2\mu}, \quad 2\theta_p = \theta_E$$

- θ_p が $0 \rightarrow 2\pi$ 変化するとき、 θ_E は $0 \rightarrow 4\pi$ と動く
- p と $-p$ (θ_p と $\theta_p + \pi$) は同じ E に写像される

- p の有理型関数 ($s_\ell(p)$ 、 $f_\ell(p)$) は E の 2 枚のリーマン面上で定義される
 $0 \leq \theta_E < 2\pi$: E の第 1 リーマン面 (p の上半面 $0 \leq \theta_p < \pi$)
 $2\pi \leq \theta_E < 4\pi$: E の第 2 リーマン面 (p の下半面 $\pi \leq \theta_p < 2\pi$)
- 複素 p 、 E 平面: 図 10
 E 平面の実軸上に cut ($E = 0$ に branch point)

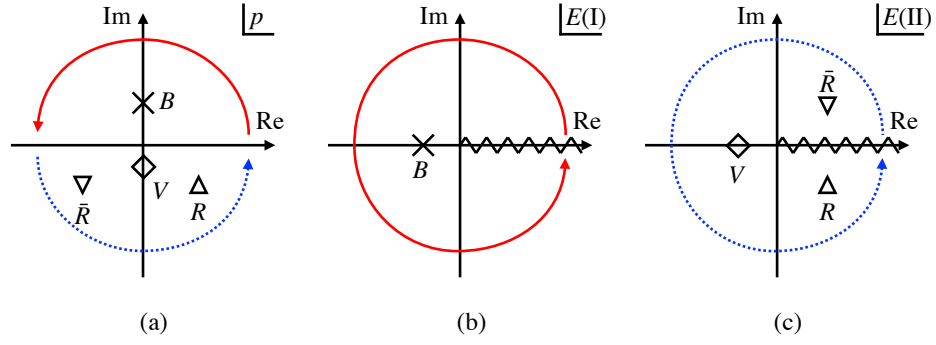


図 10: 複素平面の極。(a): 複素 p 平面、(b): 複素 E 平面 (第 1 リーマン面)、(c): 複素 E 平面 (第 2 リーマン面)。 B 、 V 、 R 、 $\bar{R}$ はそれぞれ束縛状態、virtual 状態、共鳴状態、Anti-resonance を表す。

4.3 固有状態の分類

- ハミルトニアン固有状態: ヨスト関数のゼロ点 $\not\ell(p) = 0$

- 式 (21) より、 $\not\ell(p) = 0$ のとき

$$\not\ell(-p^*) = [\not\ell(p)]^* = 0$$

$\Rightarrow p$ が解なら $-p^*$ (虚軸に対して対称な点) も解

- $p = -p^*$ の解 (虚軸上)

- 束縛状態 (bound state, B): 図 10 の $\times$

$$\text{Re } [p_B] = 0, \quad \text{Im } [p_B] > 0$$

エネルギー E_B は実で負 (第 1 リーマン面)

- Virtual 状態 (anti-bound state, V): $\diamond$

$$\text{Re } [p_V] = 0, \quad \text{Im } [p_V] < 0$$

エネルギー E_V は実で負 (第 2 リーマン面)

極の留数 ($\sim$ ノルム) が負: 物理的自由度ではない? [29]

- $p \neq -p^*$ の解 (必ず対で出る)

- 解は p の下半面にのみ存在
 $\leftarrow$ 複素 E は波動関数が 2 乗可積分でない場合のみ許される
- 共鳴状態 (resonance, R): $\triangle$

$$\text{Re } [p_R] > 0, \quad \text{Im } [p_R] < 0$$

エネルギーは $\text{Re } [E_R] > 0$ 、 $\text{Im } [E_R] < 0$ (第 2 リーマン面)

- Anti-resonance ($\bar{R}$): ∇

$$\text{Re } [p_{\bar{R}}] < 0, \quad \text{Im } [p_{\bar{R}}] < 0$$

共鳴状態と対になって存在

時間と共に増大する解 [31] (共鳴の“共役”)

4.4 共鳴状態と観測量

- 実験で調べられるのは実エネルギーのみ
- 部分波 ℓ にある $E = E_R = M_R - i\Gamma_R/2$ の共鳴極が観測量に与える影響
- 散乱振幅を $E = E_R$ のまわりでローラン展開

$$f_\ell(E) = f_{\ell,\text{BW}}(E) + f_{\ell,\text{BG}}(E), \quad (24)$$

Breit-Wigner 項 $f_{\ell,\text{BW}}(E)$: 共鳴極の寄与

$$f_{\ell,\text{BW}}(E) = \frac{Z_R}{E - E_R} = \frac{Z_R(E - M_R - i\Gamma_R/2)}{(E - M_R)^2 + \Gamma_R^2/4}, \quad Z_R = -\frac{\Gamma_R}{2p_R} \quad (25)$$

非共鳴項 $f_{\ell,\text{BG}}(E)$: $E = E_R$ で解析的

$$f_{\ell,\text{BG}}(E) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (E - E_R)^n. \quad (26)$$

- 実エネルギー $E \sim M_R$ では $f_{\ell,\text{BW}}(E)$ の寄与が大きくなる (特に幅 Γ_R が狭い場合)
- $f_{\ell,\text{BG}}(E)$ が小さく無視できると **仮定した** 場合

$$f_\ell(E) \approx f_{\ell,\text{BW}}(E) \quad (f_{\ell,\text{BG}}(E) \rightarrow 0). \quad (27)$$

- 実エネルギーでの共鳴現象

($f_{\ell,\text{BG}}(E)$ を無視した場合にのみ成立)

- $E = M_R$ で $\text{Re } [f_\ell(E)] = 0$ かつ $\text{Im } [f_\ell(E)]$ が極大
 $\leftarrow Z = -\Gamma_R/(2p) < 0$ と式 (25) (留数 Z は実軸上で与えられる)
- 散乱断面積 $\sigma(E)$ が $E = M_R$ でピークを持つ
 $\leftarrow$ (i) と光学定理 (問題 2 参照)
- 位相差 $\delta_\ell(E)$ が急速に増加し $E = M_R$ で $\frac{\pi}{2}$ を切る
 $\leftarrow$ 式 (13) より $\text{Re } [f_\ell(M_R)] = 0$ のとき $\text{Im } [s_\ell(M_R)] = 0$
 相互作用無し ($\delta_\ell = 0$) 以外で $\text{Im } [s_\ell(M_R)] = 0$ となるためには $\delta_\ell = \pi/2$ (modulo π)

- $f_{\ell,\text{BG}}(E)$ が無視できない場合、干渉項が影響

$$|f_\ell(E)|^2 = |f_{\ell,\text{BW}}(E)|^2 + |f_{\ell,\text{BG}}(E)|^2 + 2\text{Re } [f_{\ell,\text{BW}}(E)f_{\ell,\text{BG}}^*(E)], \quad (28)$$

- カスプや triangle singularity など、運動学的にピークが生成されることもある [32]
- 単にピークを fit するのではなく精密な解析で共鳴極を決定することが重要

4.5 有効レンジ展開

- 散乱振幅 $f_\ell(p)$ の低エネルギー (p 小) の性質

$$\begin{aligned} f_\ell(p) &= \frac{s_\ell(p) - 1}{2ip} \quad \leftarrow \text{(\textcolor{red}{B3})} \\ &= \frac{p^{2\ell}}{p^{2\ell+1} \cot \delta_\ell(p) - ip^{2\ell+1}} \end{aligned} \quad (29)$$

- 性質 (\textcolor{red}{B0}) より、ヨスト関数は以下のように書ける

$$\not{f}_\ell(p) = F_\ell(p^2) + ipG_\ell(p^2)$$

F_ℓ と G_ℓ は p^2 の関数で、 $p \rightarrow 0$ で

$$F_\ell(p^2) = \mathcal{O}(p^0), \quad G_\ell(p^2) = \mathcal{O}(p^{2\ell})$$

このとき

$$\not{f}_\ell(-p) = F_\ell(p^2) - ipG_\ell(p^2)$$

- 式 (\textcolor{red}{B3}) より

$$f_\ell(p) = \frac{\not{f}_\ell(-p) - \not{f}_\ell(p)}{2ip\not{f}_\ell(p)} = \frac{p^{2\ell}}{-p^{2\ell}F_\ell(p^2)/G_\ell(p^2) - ip^{2\ell+1}} \quad (30)$$

- 式 (\textcolor{red}{B9}) と式 (\textcolor{red}{B0}) を比較

$$p^{2\ell+1} \cot \delta_\ell(p) = -p^{2\ell} \frac{F_\ell(p^2)}{G_\ell(p^2)} \quad (31)$$

右辺は p^2 の関数で $p \rightarrow 0$ のとき $\mathcal{O}(p^0)$: テイラー展開すると

$$\Rightarrow p^{2\ell+1} \cot \delta_\ell(p) = -\frac{1}{a_\ell} + \frac{r_\ell}{2} p^2 + \mathcal{O}(p^4) \quad (32)$$

有効レンジ展開と呼ばれる

- s 波 ($\ell = 0$) の場合

$$f_0(p) = \frac{1}{-\frac{1}{a_0} + \frac{r_0}{2} p^2 + \mathcal{O}(p^4) - ip}$$

- a_0 : 散乱長 (scattering length)、ハドロン物理では逆符号が使われることもある
- r_0 : 有効レンジ (effective range)、相互作用距離にほぼ対応するが、負になることもある
- 式 (\textcolor{red}{B1}) は極を持ちうる (CDD 極 [\textcolor{green}{B3}])
CDD 極が低エネルギーにある場合は Padé 近似が有効 [\textcolor{green}{B4}]

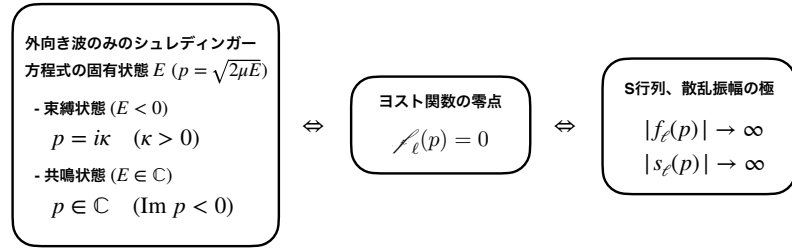


図 11: 共鳴状態の種々の条件。波動関数の外向き境界条件は、ユースト関数のゼロ点を通じて散乱振幅の極と関係している。文献 [8] から引用。

- 低エネルギー散乱： p の高次項が効かないとすると

$$f_0(p) \approx \frac{1}{-\frac{1}{a_0} - ip}$$

極を $p = \frac{i}{a_0}$ に持つ

- $a_0 > 0$: 上半面の極、束縛状態
- $a_0 < 0$: 下半面の極、Virtual 状態

どちらもエネルギーは $E = -\frac{1}{2\mu a_0^2}$

問題 3

1) 有効レンジ展開を p^2 の項まで考慮した以下の散乱振幅の 2 つの極の位置を a_0 と r_0 で表せ。

$$f_0(p) = \frac{1}{-\frac{1}{a_0} + \frac{r_0}{2}p^2 - ip}$$

2) 弾性散乱の場合、 a_0 と r_0 は実数だが正でも負でも良い。解の表式に注意して、2 つの極がどちらも複素 p 平面の虚軸上に現れるための a_0 と r_0 に対する条件を求めよ。

3) a_0 - r_0 平面の 2) の条件が満たされる領域を、2 つの解の性質（正の虚軸上なら束縛状態、負の虚軸上なら virtual 状態）に従って分類せよ。

4.6 §3 と §4 のまとめ

- S 行列、位相差、散乱振幅などの定義
- 散乱振幅の極と共鳴状態の対応 (図 11)
- 有効レンジ展開：低エネルギー散乱の記述

5 フェッシュバッハ共鳴の理論

5.1 概要

- フェッシュバッハ共鳴：チャンネル結合散乱問題での共鳴状態
- 閾値エネルギー E_{th} とチャンネル
 - open チャンネル ($E > E_{\text{th}}$)：エネルギー E で散乱が起きる
 - closed チャンネル ($E < E_{\text{th}}$)：エネルギー E で散乱が起きない
- フェッシュバッハの原論文 [34, 35]：複合核反応の理論（図 12、左）
- 冷却原子系での実現 [11]：外部磁場による散乱長 a_0 の制御（図 12、右）

ANNALS OF PHYSICS: **5**, 357–390 (1958)

Unified Theory of Nuclear Reactions*

HERMAN FESHBACH

Department of Physics and Laboratory for Nuclear Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts

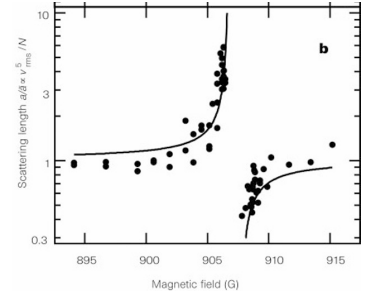


図 12: 左：フェッシュバッハの原論文、H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958)。右：磁場による冷却原子系の散乱長の制御、S. Inouye, Nature (London) **5392**, 151 (1998) より引用。

5.2 2チャンネルハミルトニアン

- チャンネルは P 、 Q の2つ、 P の閾値をエネルギーの原点 $E_{\text{th}}(P) = 0$ とする [36]
- 行列形式のシュレディンガー方程式

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (33)$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{PP} & \hat{H}_{PQ} \\ \hat{H}_{QP} & \hat{H}_{QQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}^2}{2\mu_P} + \hat{V}_P & \hat{V}_t \\ \hat{V}_t & \frac{\hat{p}^2}{2\mu_Q} + \Delta + \hat{V}_Q \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} |P\rangle \\ |Q\rangle \end{pmatrix}$$

- $\hat{V}_P, \hat{V}_Q$ ：チャンネル内ポテンシャル（図 4）、 $r \rightarrow \infty$ で消える
- $\hat{V}_t$ ：チャンネル遷移ポテンシャル ($P \leftrightarrow Q$)
- $\Delta > 0$ ：閾値エネルギー差 $E_{\text{th}}(Q) - E_{\text{th}}(P)$ （原子物理の場合ゼーマン分岐に起因するため外部磁場の強さに比例）
- $0 < E < \Delta$ のエネルギー領域： P が open (entrance) チャンネル、 Q が closed チャンネル

- 射影演算子

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}^2 = \hat{P}, \quad \hat{Q}^2 = \hat{Q}, \quad \hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0, \quad \hat{P} + \hat{Q} = \hat{I}$$

各成分は $|X\rangle = \hat{X}|\psi\rangle$ 、 $\hat{H}_{XY} = \hat{X}\hat{H}\hat{Y}$ と書ける

- チャンネル P の有効ハミルトニアン** : $|Q\rangle$ を消去
式 (B3) の下成分より

$$\hat{H}_{QP}|P\rangle + \hat{H}_{QQ}|Q\rangle = E|Q\rangle$$

$$\hat{H}_{QP}|P\rangle = (E - \hat{H}_{QQ})|Q\rangle$$

$$|Q\rangle = (E - \hat{H}_{QQ})^{-1}\hat{H}_{QP}|P\rangle$$

式 (B3) の上成分に代入

$$\hat{H}_{PP}|P\rangle + \hat{H}_{PQ}|Q\rangle = E|P\rangle$$

$$\hat{H}_{PP}|P\rangle + \hat{H}_{PQ}(E - \hat{H}_{QQ})^{-1}\hat{H}_{QP}|P\rangle = E|P\rangle$$

より

$$\hat{H}^{\text{eff}}(E)|P\rangle = E|P\rangle, \tag{34}$$

$$\hat{H}^{\text{eff}}(E) = \hat{H}_{PP} + \hat{H}_{PQ}(E - \hat{H}_{QQ})^{-1}\hat{H}_{QP}$$

$\hat{H}^{\text{eff}}$ は Q の効果をくりこんだ P の有効ハミルトニアン

- 式 (B4) は P の 1 チャンネル (行列でない) シュレディンガー方程式
- 近似は行なっていない $\Rightarrow$ 式 (B4) の解は式 (B3) の $|P\rangle$ と等価
- $\hat{H}^{\text{eff}}(E)$ はエネルギー依存 (式 (B4) は self-consistent に解く)

5.3 1 共鳴近似

- $\hat{H}_{QQ}$ の固有状態 (図 B3) : 束縛状態 $|\phi_i\rangle$ 、エネルギー ϵ でラベルした連続状態 $|\phi(\epsilon)\rangle$

$$\hat{H}_{QQ}|\phi_i\rangle = \epsilon_i|\phi_i\rangle,$$

$$\hat{H}_{QQ}|\phi(\epsilon)\rangle = \epsilon|\phi(\epsilon)\rangle$$

$|\phi\rangle$: チャンネル遷移がなく ($\hat{V}_t = 0$) チャンネル内相互作用 ($\hat{V}_Q \neq 0$) のみによる固有状態、 $|\phi\rangle \neq |Q\rangle$

- スペクトル分解 (連続状態は $\epsilon = \Delta$ から始まる)

$$\hat{I} = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| + \int_{\Delta}^{\infty} d\epsilon |\phi(\epsilon)\rangle\langle\phi(\epsilon)|$$

これにより $\hat{H}^{\text{eff}}$ は

$$\hat{H}^{\text{eff}}(E) = \hat{H}_{PP} + \sum_i \frac{\hat{H}_{PQ}|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\hat{H}_{QP}}{E - \epsilon_i} + \int_{\Delta}^{\infty} d\epsilon \frac{\hat{H}_{PQ}|\phi(\epsilon)\rangle\langle\phi(\epsilon)|\hat{H}_{QP}}{E - \epsilon + i0^+} \tag{35}$$

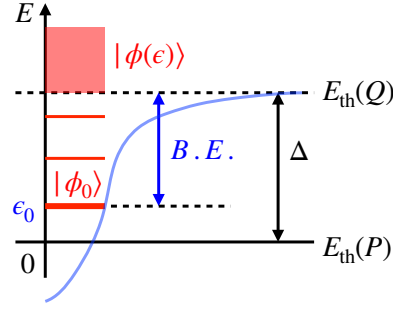


図 13: $\hat{H}_{QQ}$ の固有状態の模式図

- 式 (35) の第 3 項は $E > \Delta$ で虚部を持つ

$$\int dx \frac{f(x)}{x - a + i0^+} = \mathcal{P} \int dx \frac{f(x)}{x - a} - i\pi f(a) \quad (x = a \text{ が積分区間に含まれるとき})$$

参考) $\Delta < 0$ の場合は $E = 0$ から $\hat{H}^{\text{eff}}$ が虚部を持つ

- 式 (35) の第 2 項、第 3 項はエネルギー E に最も近い固有エネルギーを持つ状態が支配的束縛状態のうち最もエネルギー $\epsilon_0 > 0$ が小さい状態を $|\phi_0\rangle$ とすると、 $E \ll \Delta$ の低エネルギーでは

$$\hat{H}^{\text{eff}}(E) \approx \hat{H}_{PP} + \frac{\hat{H}_{PQ}|\phi_0\rangle\langle\phi_0|\hat{H}_{QP}}{E - \epsilon_0} \quad (36)$$

もし $\hat{H}_{QQ}$ が束縛状態 $|\phi_0\rangle$ を 1 つだけ持つ閉じ込めポテンシャル (散乱状態を持たない) なら式 (36) は厳密

- ϵ_0 は P の閾値 ($E = 0$) から測ったエネルギー、 Q の閾値 ($E = \Delta$) からの束縛エネルギーは

$$B.E. = \Delta - \epsilon_0$$

$B.E.$ は $\hat{H}_{QQ}$ によって固定 $\Rightarrow \Delta$ が外部磁場に比例するとき、 ϵ_0 が外部磁場で可変

5.4 散乱振幅と共鳴状態

Lippmann-Schwinger 方程式

- $\hat{H}^{\text{eff}}$ は P に対する 1 チャンネルハミルトニアン $\Rightarrow$ §3 の散乱理論を適用

$$\hat{H}^{\text{eff}} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu_P}, \quad \hat{H}_0|\mathbf{p}\rangle = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_P}|\mathbf{p}\rangle$$

- シュレディンガー方程式 ($|P\rangle$ は $\hat{H}^{\text{eff}}$ の固有状態)

$$\begin{aligned} \hat{H}^{\text{eff}}|P\rangle &= E|P\rangle \\ (\hat{H}_0 + \hat{V})|P\rangle &= E|P\rangle \\ \hat{V}|P\rangle &= (E - \hat{H}_0)|P\rangle \end{aligned}$$

$-(E - \hat{H}_0)|\mathbf{p}\rangle = 0$ を右辺に追加 ($\hat{V} \rightarrow 0$ で散乱解は $|P\rangle \rightarrow |\mathbf{p}\rangle$ となるため)

$$\begin{aligned}\hat{V}|P\rangle &= (E - \hat{H}_0)(|P\rangle - |\mathbf{p}\rangle) \\ (E - \hat{H}_0)^{-1}\hat{V}|P\rangle &= |P\rangle - |\mathbf{p}\rangle \\ |P\rangle &= |\mathbf{p}\rangle + (E - \hat{H}_0)^{-1}\hat{V}|P\rangle\end{aligned}$$

- グリーン演算子 (レゾルベント)

$$\hat{G}(E) = (E - \hat{H}_0)^{-1}$$

を定義すると

$$|P\rangle = |\mathbf{p}\rangle + \hat{G}\hat{V}|P\rangle \quad (37)$$

- T 演算子: $\hat{H}_0$ の固有状態 $|\mathbf{p}\rangle$ と $\hat{H}^{\text{eff}}$ の固有状態 $|P\rangle$ を関係付ける

$$\begin{aligned}(\text{定義}) \quad \hat{T}|\mathbf{p}\rangle &= \hat{V}|P\rangle \\ &= \hat{V}|\mathbf{p}\rangle + \hat{V}\hat{G}\hat{V}|P\rangle \quad \leftarrow (\text{式 (37)}) \\ &= \hat{V}|\mathbf{p}\rangle + \hat{V}\hat{G}\hat{T}|\mathbf{p}\rangle \quad \leftarrow (\text{定義})\end{aligned}$$

これより T 演算子に対する Lippmann-Schwinger 方程式を得る

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \hat{V} + \hat{V}\hat{G}\hat{T} \\ &= \hat{V} + \hat{V}\hat{G}(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}\hat{T}) \quad (\text{右辺に逐次代入}) \\ &= \hat{V} + \hat{V}\hat{G}\hat{V} + \hat{V}\hat{G}\hat{V}\hat{G}\hat{V} + \dots\end{aligned}$$

$\hat{G}$ がエネルギー E に依存するので $\hat{T}$ もエネルギーに依存 ($\hat{V}$ が非依存でも)

- (on-shell) T 行列との関係

$$\langle \mathbf{p}' | \hat{T}(E + i0^+) | \mathbf{p} \rangle = t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^2 \mu_P} f(E, \theta)$$

E の関数としての $t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ の極は散乱振幅の極で離散固有状態を表す

- T 行列に対する Lippmann-Schwinger 方程式

$$\begin{aligned}t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) &= \langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{p}' | \hat{V} \hat{G} \hat{T} | \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{p} \rangle + \int d\mathbf{q} \langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | \hat{G} \hat{T} | \mathbf{p} \rangle \quad \leftarrow \hat{I} = \int d\mathbf{q} | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | \\ &= \langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{p} \rangle + \int d\mathbf{q} \langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{q} \rangle \frac{1}{E - \mathbf{q}^2/(2\mu_P) + i0^+} t(\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{p}) \quad \leftarrow \hat{H}_0 | \mathbf{q} \rangle = \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_P} | \mathbf{q} \rangle\end{aligned}$$

$t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ に対する積分方程式

分離型相互作用

- 分離型相互作用 ($\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ の関数の積)

$$\langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{p} \rangle = \lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p})$$

このとき T 行列は ($G(E, \mathbf{q}) = [E - \mathbf{q}^2/(2\mu) + i0^+]^{-1}$)

$$\begin{aligned} t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) &= \langle \mathbf{p}' | [\hat{V} + \hat{V} \hat{G} \hat{V} + \hat{V} \hat{G} \hat{V} \hat{G} \hat{V} + \cdots] | \mathbf{p} \rangle \\ &= \lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{q} \lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{q}) G(E, \mathbf{q}) \lambda F(\mathbf{q}) F(\mathbf{p}) \\ &\quad + \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{q}' \lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{q}) G(E, \mathbf{q}) \lambda F(\mathbf{q}) F(\mathbf{q}') G(E, \mathbf{q}') \lambda F(\mathbf{q}') F(\mathbf{p}) + \cdots \\ &= \lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p}) + \lambda F(\mathbf{p}') \left[\lambda \int d\mathbf{q} F(\mathbf{q}) G(E, \mathbf{q}) F(\mathbf{q}) \right] F(\mathbf{p}) \\ &\quad + \lambda F(\mathbf{p}') \left[\lambda \int d\mathbf{q} F(\mathbf{q}) G(E, \mathbf{q}) F(\mathbf{q}) \right] \left[\lambda \int d\mathbf{q}' F(\mathbf{q}') G(E, \mathbf{q}') F(\mathbf{q}') \right] F(\mathbf{p}) + \cdots \\ &= \lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p}) [1 + \mathcal{G}(E) + [\mathcal{G}(E)]^2 + \cdots] \quad \leftarrow \mathcal{G}(E) = \lambda \int d\mathbf{q} F(\mathbf{q}) G(E, \mathbf{q}) F(\mathbf{q}) \\ &= \lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p}) [1 - \mathcal{G}(E)]^{-1} \\ &= \frac{\lambda F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p})}{1 - \lambda \int d\mathbf{q} F(\mathbf{q}) G(E, \mathbf{q}) F(\mathbf{q})} \\ &= \frac{F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p})}{\frac{1}{\lambda} - \int d\mathbf{q} \frac{F(\mathbf{q}) F(\mathbf{q})}{E - \mathbf{q}^2/(2\mu_P) + i0^+}} \end{aligned}$$

散乱振幅は

$$f(E, \theta) = -(2\pi)^2 \mu \frac{F(\mathbf{p}') F(\mathbf{p})}{\frac{1}{\lambda} - \int d\mathbf{q} \frac{F(\mathbf{q}) F(\mathbf{q})}{E - \mathbf{q}^2/(2\mu_P) + i0^+}}$$

- 式 (36) のハミルトニアンに対応するポテンシャル $\hat{V}$

$$\hat{V}(E) = \hat{V}_P + \frac{\hat{V}_t | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | \hat{V}_t}{E - \epsilon_0}$$

ϵ_0 が十分小さければ低エネルギーで第 2 項が支配的:

($\hat{V}_P \neq 0$ のうち特殊な場合については §24 で扱う)

$$\hat{V}(E) \approx \frac{\hat{V}_t | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | \hat{V}_t}{E - \epsilon_0}$$

これは分離型ポテンシャル

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | \hat{V}(E) | \mathbf{p} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p}' | \hat{V}_t | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | \hat{V}_t | \mathbf{p} \rangle}{E - \epsilon_0} \\ \Rightarrow \quad \lambda &= \frac{1}{E - \epsilon_0}, \quad F(\mathbf{p}) = \langle \phi_0 | \hat{V}_t | \mathbf{p} \rangle \quad (\text{形状因子}) \end{aligned}$$

- P チャンネルの散乱振幅

$$f(E, \theta) = -\frac{N(E, \theta)}{E - \epsilon_0 - \Sigma(E)}, \quad N(E, \theta) = (2\pi)^2 \mu \langle \mathbf{p}' | \hat{V}_t | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | \hat{V}_t | \mathbf{p} \rangle$$

$$\Sigma(E) = \int d\mathbf{q} \frac{\langle \phi_0 | \hat{V}_t | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | \hat{V}_t | \phi_0 \rangle}{E - \mathbf{q}^2 / (2\mu_P) + i0^+} \quad (\text{自己エネルギー})$$

極の条件：

$$0 = E - \epsilon_0 - \Sigma(E) \tag{38}$$

- $\hat{V}_t = 0$ の場合、 $\Sigma(E) = 0$ なので極の位置は

$$E = \epsilon_0 \in \mathbb{R}$$

$\hat{H}_{QQ}$ のみによる束縛状態に対応

- $\hat{V}_t \neq 0$ の場合、一般には (38) の解だが、 $\hat{V}_t$ が弱ければ

$$E \approx \epsilon_0 + \Sigma(\epsilon_0) \quad (\text{摂動近似})$$

$\epsilon_0 > 0$ のとき、 $\Sigma(\epsilon_0)$ は虚部を持つ ($d\mathbf{q}$ 積分の下限は $q = 0$)

⇒ 複素固有値を持つ共鳴状態

- 物理的には $\hat{H}_{QQ}$ による束縛状態が P の連続状態に遷移して崩壊幅を持つ

5.5 磁場による散乱長の制御

- s 波 ($\ell = 0$) 散乱の場合、 $N(E, \theta)$ は θ 依存性を持たず、散乱長 a_0 は (§4 参照)

$$a_0 = -f(E = 0) = \frac{N(0)}{-\epsilon_0 - \Sigma(0)}$$

ここで $N(0) > 0$ で

$$\Sigma(0) = \int d\mathbf{q} \frac{\langle \phi_0 | \hat{V}_t | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | \hat{V}_t | \phi_0 \rangle}{-\mathbf{q}^2 / (2\mu_P)} = - \int d\mathbf{q} \frac{2\mu_P |\langle \mathbf{q} | \hat{V}_t | \phi_0 \rangle|^2}{\mathbf{q}^2} < 0$$

- Δ (つまり ϵ_0) が外部磁場 B に比例する場合

$$\epsilon_0 = CB + \epsilon_0^{(0)}$$

磁場を強くすると分岐が大きくなるので $C > 0$

$\epsilon_0^{(0)}$ は $B = 0$ のときの束縛状態のエネルギー、このとき $E_{\text{th}}(Q) = 0$ より $\epsilon_0^{(0)} < 0$

散乱長の B 依存性は

$$a_0(B) = -\frac{N(0)}{C(B - B_0)}, \quad B_0 = \frac{-\Sigma(0) - \epsilon_0^{(0)}}{C} > 0 \tag{39}$$

$B = B_0$ で散乱長が発散：ユニタリー極限

- $\hat{V}_P \neq 0$ で計算すると (図 12 右)

$$a_0(B) = a_{\text{BG}} \left[1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right] \quad (40)$$

a_{BG} は $\hat{V}_P$ のみによる散乱長

問題 4

1) 式 (38) の解を摂動論で考え、 $\hat{V}_t$ のべきの次数の寄与で

$$E = E^{(0)} + E^{(2)} + E^{(4)} + \dots, \quad E^{(0)} = \epsilon_0$$

と定義する。 $\hat{V}_t$ が非対角的であるため、エネルギー E に対して $\hat{V}_t$ の奇数次の寄与はない。自己エネルギー $\Sigma(E)$ に上式を代入することで、 $E^{(2)} = \Sigma(\epsilon_0)$ であることを示せ。

2) $\langle \phi_0 | \hat{V}_t | \mathbf{q} \rangle = F(q^2)$ ($\mathbf{q}$ の大きさ q の 2 乗のみに依存) で $\epsilon_0 > 0$ のとき、摂動近似 $E = \epsilon_0 + \Sigma(\epsilon_0)$ で E の虚部を求めよ。ただし $F(q^2)$ は $|q^2| \rightarrow \infty$ で十分速く 0 になるとする。

5.6 §5 のまとめ

- P と Q のチャンネル結合ハミルトニアン
- チャンネル Q を消去し P の有効ハミルトニアン
- Q の束縛状態 $|\phi_0\rangle$ が P と結合し複素エネルギー状態

6 非相対論的有効場の理論

6.1 有効場の理論

- 微視的な場の量子論 $\mathcal{L}_{\text{micro}}$
- Λ : 紫外カットオフスケール (図 14 参照)
- Ω : Λ 以下の低エネルギー／長波長の現象
- 有効場の理論 (Effective Field Theory, EFT) $\mathcal{L}_{\text{EFT}}$
 - $\mathcal{L}_{\text{EFT}}$ は $\mathcal{L}_{\text{micro}}$ と同じ Ω を記述する
 - システマティックに精密化できる
 - Λ : EFT の適用限界

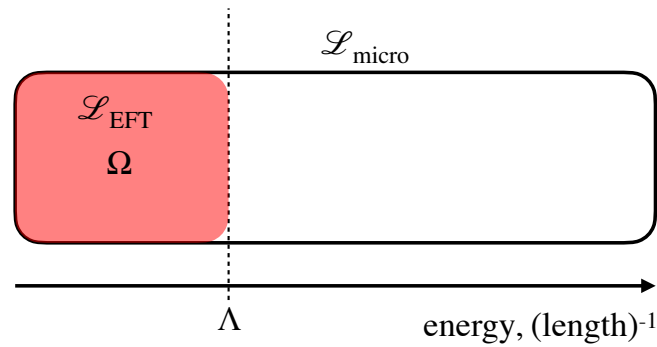


図 14: 有効場の理論の模式図。

- 例 1 : 電磁相互作用

- 微視的理論 : QED

$$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{\text{QED}} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{光子の運動項}} + \underbrace{\bar{e}(i\not{D} - m_e)e}_{\text{電子の運動項、質量項、相互作用項}}$$

無質量の光子と質量 m_e の電子

- 有効場の理論 : オイラー・ハイゼンベルク理論 [37]

$$\mathcal{L}_{\text{EFT}} = \mathcal{L}_{\text{EH}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \underbrace{c_1(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + c_2(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots}_{\text{光子の相互作用項}}$$

電子を“重い”と考え光子のみの理論 ($\Lambda \sim m_e$)

係数は QED から計算可能 : $c_1 = \frac{\alpha^2}{90m_e^4}$ 、 $c_2 = \frac{7\alpha^2}{360m_e^4}$

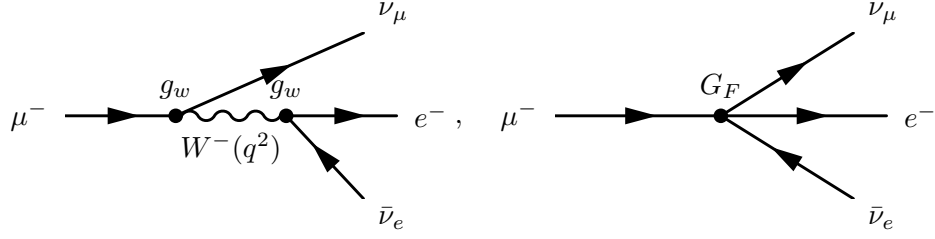


図 15: μ^- 崩壊の模式図。左：ワインバーグ・サラム理論、右：フェルミ理論

● 例 2：弱い相互作用

- 微視的理論：ワインバーグ・サラム理論

$$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{\text{WS}}(\text{レプトン}, \text{ニュートリノ}, W^\pm, Z, \dots)$$

相互作用は $W^\pm, Z$ 交換で媒介 (図 15、左)

$$\text{相互作用} \propto \frac{g_w^2}{q^2 - m_W^2} = -\frac{g_w^2}{m_W^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{M_W^2}\right) \right)$$

- 有効場の理論：フェルミ理論

$$\mathcal{L}_{\text{EFT}} = \mathcal{L}_{\text{F}}(\text{レプトン}, \text{ニュートリノ})$$

4 フェルミ (接触) 相互作用 (図 15、右)

$W^\pm, Z$ を “重い” と考えフェルミオンのみの理論 ($\Lambda \sim m_{W^\pm}, m_Z$)

$$\text{相互作用} \propto G_F \left(\propto -\frac{g_w^2}{m_W^2} \right)$$

● 例 3：強い相互作用

- 微視的理論：QCD

$$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}(\text{クォーク}, \text{グルーオン})$$

低エネルギーで直接計算できず、自由度はハドロン (カラー閉じ込め)

- Weinberg の “定理” [38]

$\mathcal{L}_{\text{micro}}$ の対称性と矛盾しない最も一般的な $\mathcal{L}_{\text{EFT}}$ は Ω を有効的に記述する

- 有効場の理論：カイラル摂動論 (QCD と同じカイラル対称性を持つ) [39]

$$\mathcal{L}_{\text{EFT}} = \mathcal{L}_{\text{ChPT}}(\text{ハドロン})$$

最も一般的なラグランジアンは無限個の項を含む → 重要性に応じて並べる

$$\mathcal{L}_{\text{ChPT}} = \mathcal{L}^{(\text{LO})} + \mathcal{L}^{(\text{NLO})} + \dots$$

6.2 ゼロレンジ模型

- 非相対論的な 2 体散乱を有効場の理論で記述

- R_{typ} : 相互作用の典型的長さスケール

- 井戸型ポテンシャル : $R_{\text{typ}} = b$ (井戸の幅)
- 湯川ポテンシャル $V(r) = g \frac{e^{-\kappa r}}{r}$: $R_{\text{typ}} = 1/\kappa$
- van der Waals ポテンシャル $V(r) = -\frac{C_6}{r^6}$: $R_{\text{typ}} \sim \ell_{\text{vdW}} = (mC_6/\hbar^2)^{1/4}$

- ゼロレンジ模型 $\mathcal{L}_{\text{ZR}}$: 散乱長 $|a_0|$ が相互作用距離 R_{typ} よりも大きい系の s 波散乱 ($\ell = 0$ は省略) [21]

$$f(p) = \frac{1}{-\frac{1}{a_0} - ip} \quad (41)$$

- 核子 : 長距離相互作用は π 交換による湯川型

$$a_0(^1S_0) \simeq 20 \text{ fm}, \quad a_0(^3S_1) \simeq -4 \text{ fm}, \quad |a_0| \gg R_{\text{typ}} \sim \frac{1}{m_\pi} \sim 1 \text{ fm}$$

(核子 : スピンとアイソスピンの自由度を持つフェルミオン)

$$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{NN} \quad (\text{or } \mathcal{L}_{\text{QCD}})$$

- ^4He 原子 : 長距離相互作用は van der Waals 型

$$a_0 \simeq 200 [\text{Bohr radius}] \quad |a_0| \gg R_{\text{typ}} \sim \ell_{\text{vdW}} \sim 10 [\text{Bohr radius}]$$

$$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{\text{atom}}$$

- 低エネルギー $p \ll 1/R_{\text{typ}}$ ではどちらも同じ $\mathcal{L}_{\text{ZR}}$ で記述できる

ラグランジアン

- ゼロレンジ模型のラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\text{ZR}} = \underbrace{\psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi}_{\text{運動項}} - \underbrace{\frac{\lambda_0}{4} (\psi^\dagger \psi)^2}_{\text{相互作用項}} \quad (42)$$

$\psi(t, \mathbf{x})$: ボソン場, m : ボソン質量, λ_0 : (bare) 結合定数

(スピン反対称に組んだフェルミオン 2 体系は本質的にボソンと同じ)

- 量子化 : 同時刻交換関係

$$[\psi(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad [\psi(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{x}')] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

- 相互作用項：4点接触相互作用～3次元 δ 関数ポテンシャル

$$-\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\lambda_0}{4}(\psi^\dagger\psi)^2 \sim \mathcal{H}_{\text{int}} \sim (\text{エネルギー})$$

$$\begin{cases} \lambda_0 > 0 & \text{エネルギーを上げる} \Rightarrow \text{斥力} \\ \lambda_0 < 0 & \text{エネルギーを下げる} \Rightarrow \text{引力} \end{cases}$$

- 対称性：時間並進、空間並進、空間回転、パリティ、ガリレイ変換
位相変換と保存電荷

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow e^{i\theta} \psi(t, \mathbf{x}), \quad N = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \psi \quad (\text{粒子数})$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{int}}$ は粒子数を変えない (2体系は常に2体系)

問題 5

- 1) ガリレイ変換 (速度 $\mathbf{v}$ で運動する座標系への変換) は時間、空間によらない定数ベクトル $\mathbf{v}$ を用いて $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ および $t \rightarrow t' = t$ で与えられる。変換後の変数の微分が以下で与えられることを示せ。

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} = \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

- 2) 自由粒子のニュートンの運動方程式がガリレイ変換で不変であること、つまり

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

が $(\mathbf{r}', t')$ と $(\mathbf{r}, t)$ で同じ方程式になることを示せ。

- 3) 量子力学の波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ が

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}', t') = \exp \left\{ -im\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + i\frac{mv^2}{2}t \right\} \psi(\mathbf{r}, t)$$

と変換されるとき、以下の自由粒子のシュレディンガー方程式が不変であることを示せ。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\nabla^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t)$$

ファインマン則

- 場の量子論による物理量の計算

1. ファインマン則 (ファインマン図の部品) を導出
2. 全ての可能なファインマン図を足し上げる ($\mathcal{L}_{\text{ZR}}$ の2体系は可能)
- 2'. 摂動計算を行う (2. ができない場合)

- プロパゲーター (propagator)：粒子の伝播 (図 16 左)

$$iG(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega - \mathbf{k}^2/(2m) + i0^+}$$

正エネルギー成分のみ：時間順方向へのみ進む

- 頂点 (vertex)：相互作用 (図 16 中)

$$\text{---} = iG(\omega, \mathbf{k}) \quad , \quad \text{X} = -i\lambda_0 \quad , \quad \text{X with shaded circle} = i\mathcal{A}(E)$$

図 16: ゼロレンジ模型 (42) のファインマン則。左: プロパゲーター iG 、中: 頂点 $-i\lambda_0$ 、右: 4 点関数 $i\mathcal{A}$ 。

6.3 ボソン 2 体散乱

- 2 体散乱振幅 $\leftarrow$ 4 点関数 $i\mathcal{A}(E)$ (2 粒子が入ってきて 2 粒子が出ていく、図 16 右)
- 始状態、終状態を保ったままファインマン則で得られる図を全て書き出す (図 17)

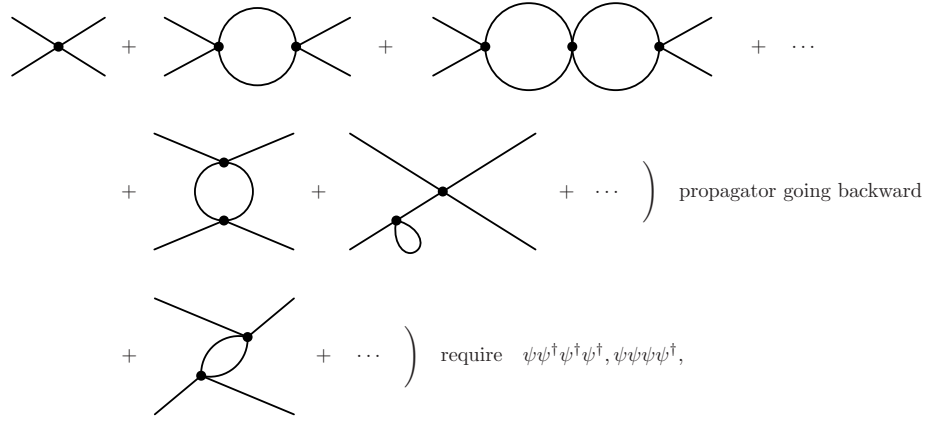


図 17: ファインマン図の候補。

- 結局残るのは Lippmann-Schwinger 方程式と同じ構造 (図 18)

$$\begin{aligned} \text{X with shaded circle} &= \text{X} + \text{loop} + \text{double loop} + \dots \\ &= \text{X} + \text{loop with shaded circle} \end{aligned}$$

図 18: 可能なファインマン図。

- 異なる $(\lambda_0)^n$ の項が無限次まで足されている: 非摂動的散乱振幅
- λ_0 が小さいとして摂動展開すると第 1 項のみ: $i\mathcal{A}(E) = -i\lambda_0$

散乱振幅の計算

- 2 体の散乱振幅 $\mathcal{A}(E)$

$$i\mathcal{A}(E) = -i\lambda_0 - i\lambda_0 \frac{1}{2} \int \frac{d\omega d\mathbf{q}}{(2\pi)^4} iG(\omega, \mathbf{q}) iG(E - \omega, -\mathbf{q}) i\mathcal{A}(E) \quad (43)$$

- $1/2$ は対称性因子
- ここでの状態ベクトルの完全系は $1 = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} |\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{q}|$
- dq 積分は発散：積分範囲を $0 \leq q \leq \Lambda$ とカットオフ Λ を導入
- 右辺の $iA(E)$ が積分の外：分離型相互作用と同じ

- 代数的に $A(E)$ が決定できる

$$\mathcal{A}(E) = \left[-\frac{1}{\lambda_0} - \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \sqrt{-mE - i0^+} \arctan \frac{\Lambda}{\sqrt{-mE - i0^+}} \right) \right]^{-1} \quad (44)$$

- エネルギー E と運動量 p

$$E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{p^2}{m} \quad \leftarrow \quad \mu = \frac{mm}{m+m} = \frac{m}{2}$$

物理的な散乱 $E > 0, p > 0$ では

$$\sqrt{-mE - i0^+} = -i\sqrt{m|E|} = -i\sqrt{p^2} = -ip$$

- カットオフ Λ より十分小さい運動量 $p \ll \Lambda$ では

$$\arctan \left(\frac{\Lambda}{-ip} \right) = \frac{\pi}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{p}{\Lambda} \right)$$

より、式 (44) は

$$\mathcal{A}(p) = \left[-\frac{1}{\lambda_0} - \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda + ip\frac{\pi}{2} \right) \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{\lambda_0} - \frac{m}{4\pi^2} \Lambda - ip\frac{m}{8\pi} \right]^{-1}$$

- 散乱振幅

$$f(p) = \frac{m}{8\pi} \mathcal{A}(p) = \frac{1}{-\frac{8\pi}{m} \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \right) - ip}$$

式 (41) と比較すると散乱長は

$$a_0 = \frac{m}{8\pi} \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \right)^{-1} \quad (45)$$

ユニタリー性

- 散乱振幅は非摂動的

$$f_{\text{NP}}(p) = \frac{1}{-1/a_0 - ip}$$

- $\mathcal{O}(\lambda_0^1)$ の摂動計算による散乱振幅

$$f_{\text{P}}(p) = -\frac{m}{8\pi} \lambda_0 = C \quad (\text{定数})$$

相互作用項のフーリエ変換、つまりボルン近似

- 式 (U3) より S 行列は $s(p) = 2ipf(p) + 1$ なので

$$s_{\text{NP}}(p) = \frac{2ip}{-1/a_0 - ip} + 1 = \frac{2ip - 1/a_0 - ip}{-1/a_0 - ip} = \frac{-1/a_0 + ip}{-1/a_0 - ip}$$

$$s_{\text{P}}(p) = 2ipC + 1$$

- ユニタリー性の条件 (U4)

$$s_{\text{NP}}^*(p)s_{\text{NP}}(p) = \frac{-1/a_0 - ip}{-1/a_0 + ip} \frac{-1/a_0 + ip}{-1/a_0 - ip} = 1$$

$$s_{\text{P}}^*(p)s_{\text{P}}(p) = (2ipC + 1)(-2ipC + 1) = 1 + 4C^2p^2 \neq 1$$

- 非摂動散乱振幅 $f_{\text{NP}}(p)$ はユニタリー性を満たすが $f_{\text{P}}(p)$ は満たさない
- 摂動計算はユニタリー性を破る (f が定数なら $\sigma \sim |f|^2$ も定数でユニタリティ限界に抵触)

6.4 くりこみ

- 散乱長 a_0 は観測量でありカットオフ Λ に依存しない
- Λ 依存の結合定数 λ_0

$$\lambda_0(\Lambda) = \left(1 - \frac{2a_0}{\pi}\Lambda\right)^{-1} \frac{8\pi}{m}a_0 \quad (46)$$

ある Λ に対し固定した散乱長 a_0 を与えるための結合定数 λ_0 の強さ

- 式 (46) のもとで $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限がとれる
- くりこみ群方程式：カットオフ Λ に対する結合定数の振る舞い

$$\frac{d}{d(\ln \Lambda)} \hat{\lambda}(\Lambda) = \hat{\lambda}(\Lambda) \left[1 + \hat{\lambda}(\Lambda)\right] \quad (47)$$

無次元化した結合定数

$$\hat{\lambda}(\Lambda) = \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \lambda_0(\Lambda)$$

- 固定点 $\hat{\lambda}^*$: $\hat{\lambda}$ が Λ に依存しなくなる値、(47) の右辺 = 0 なので $\hat{\lambda}^* = 0$ または -1
 - $\hat{\lambda}^* = 0$: $a_0 = 0$ 、相互作用なし、trivial
 - $\hat{\lambda}^* = -1$: $a_0 = \pm\infty$ 、ユニタリー極限、nontrivial

6.5 §6 のまとめ

- 有効場の理論：低エネルギー物理の記述
- ゼロレンジ模型：非摂動（ユニタリー）散乱振幅

$$f(p) = \frac{1}{-1/a_0 - ip}$$

7 複合性と弱束縛関係式

7.1 導入

- ハドロン構造研究：ポテンシャルが未知な問題
 - － クォーク間のポテンシャルは閉じ込めによって直接見えない
 - － ハドロン間のポテンシャルは厳密には観測量ではない
(観測量を不変にしたままポテンシャルの変化を波動関数の変化で吸収できる)
- ハドロン共鳴の内部構造：全ての可能な成分の重ね合わせ

$$|\Lambda(1405)\rangle = C_{3q}|uds\rangle + C_{5q}|uds\bar{q}q\rangle + C_{MB}|MB\rangle + \dots \quad (48)$$

C_i ：各成分の重み

- 従来の方法：構造を仮定したモデル計算と実験データの比較
 $|uds\rangle$ モデルによる計算、 $|MB\rangle$ モデルによる計算、etc.
→ 実験データをよく再現するモデルの C_i が支配的
- 問題点：
 - － 精密化（多数のパラメーターを導入）すれば、どのモデルでもデータを再現できる
 - － そもそも式 (48) は well-defined か？ ($5q$ と MB の直交性？不安定な共鳴の波動関数？)
 - － 波動関数は観測量でない？ エネルギースケール？
- 弱束縛関係式：モデルに依存しない方法
→ 観測可能量と内部構造を関係づける
- 歴史：
 - － 1960 年代：複合粒子の中から素粒子を同定する議論
 - － 1965 年：Weinberg の弱束縛関係式（束縛状態） [22]
 - － 2003 年：ハドロン系への応用（スペクトル関数の積分） [40]
 - － 2011 年：ハドロン物理での「複合性 (Compositeness)」 [41]
 - － 2015 年：弱束縛関係式の共鳴状態への拡張 [23, 24]

7.2 弱束縛関係式

- 安定な束縛状態の複合性 X （重陽子の場合） [22]

$$|d\rangle = \sqrt{X}|NN\rangle + \sqrt{Z}|\text{others}\rangle, \quad X + Z = 1$$

$|d\rangle$ ：重陽子波動関数

$|NN\rangle$ ：2 核子 (s 波) 状態成分

$|\text{others}\rangle$ ：それ以外の全ての成分

Z ：素粒子性 (elementarity/elementariness)

- $(X, Z) = (1, 0)$: 複合粒子の状態、 $(X, Z) = (0, 1)$: 素粒子の状態
- 注意点
 - $|NN\rangle$ は運動量などの連続変数でラベルされており X は全ての成分を積分したもの
 - $|\text{others}\rangle$ は $6q$ 状態、 $N\Delta$ 状態、 $NN(d\text{-wave})$ 状態などを含む
 - 歴史的に $|\text{others}\rangle$ は 1 粒子状態として導入されたため、 Z は「素粒子性」と呼ばれる

- **弱束縛関係式**

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2\mu B}}$$

a_0 : NN 散乱長 (3S_1 チャンネル)

B : 重陽子束縛エネルギー、 $\mu = M_N/2$: NN 換算質量

R : 重陽子半径 (束縛エネルギーで決まる長さスケール)

R_{typ} : 相互作用の典型的長さスケール

- B が小さい (R_{typ}/R が無視できる) とき、複合性 X が観測量 (a_0, B) から決まる

- **適用条件**

- X は s 波散乱チャンネルの複合性 ($\ell \neq 0$ は適用不可)
- 安定な束縛状態 (崩壊しない)

- 重陽子の場合、 $B = 2.22$ MeV、 $a_0 = 5.42$ fm を用いると [42]

$$X = 1.68_{-0.824}^{+2.14}, \quad R_{\text{typ}} = 1.43 \text{ fm}$$

誤差は $\mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R)$ の項で $R_{\text{typ}} \sim 1/m_\pi = 1.43$ fm とした見積もり
有限レンジ補正 [42] を考慮すると

$$X = 1.68_{-0.943}^{+3.18}, \quad R_{\text{typ}} = 1.75 \text{ fm}$$

定義 (以下参照) より $X \leq 1$ なので $0.74 \leq X \leq 1$: 重陽子波動関数の約 8 割以上は NN 複合状態

- 核力ポテンシャルや重陽子波動関数を使わずに、観測量から構造を決定する

7.3 有効場の理論での複合性

- 有効場の理論のハミルトニアン [23, 24]

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{free}} + H_{\text{int}} \\ H_{\text{free}} &= \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2M} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi + \frac{1}{2m} \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2M_0} \nabla B_0^\dagger \cdot \nabla B_0 + \omega_0 B_0^\dagger B_0 \right] \\ H_{\text{int}} &= \int d\mathbf{r} \left[g_0 \left(B_0^\dagger \phi \psi + \psi^\dagger \phi^\dagger B_0 \right) + v_0 \psi^\dagger \phi^\dagger \phi \psi \right] \end{aligned} \quad (49)$$

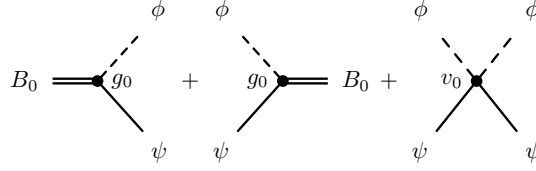


図 19: 相互作用ハミルトニアン (49) のファインマン則

$\phi(\mathbf{r})$ 、 $\psi(\mathbf{r})$ 、 $B_0(\mathbf{r})$: 場の演算子、 M 、 m 、 M_0 : 質量、 ω_0 : bare エネルギー
自由ハミルトニアン H_{free} の各項は §6 の $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ の運動項と等価

g_0 、 v_0 : 結合定数

H_{int} : 接触相互作用 (図 19)、 $\psi\phi \leftrightarrow \psi\phi$ と $\psi\phi \leftrightarrow B_0$

- H_{free} の固有状態

$$H_{\text{free}}|B_0\rangle = \omega_0|B_0\rangle \quad (\text{離散状態 } B_0, \text{ 素粒子的成分})$$

$$H_{\text{free}}|\mathbf{p}\rangle = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}|\mathbf{p}\rangle \quad (\text{相対運動量 } \mathbf{p} \text{ の } \psi\phi \text{ 散乱状態、複合粒子成分})$$

具体形と規格直交性

$$|B_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{V_p}}\tilde{B}_0^\dagger(\mathbf{0})|0\rangle, \quad |\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V_p}}\tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{p})\tilde{\phi}^\dagger(-\mathbf{p})|0\rangle$$

$$\langle B_0|B_0\rangle = 1, \quad \langle B_0|\mathbf{p}\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$$

$|0\rangle$: 真空、 $V_p = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{0})$: 位相体積、 $\tilde{\alpha}(\mathbf{p}) = \text{F.T. } \alpha(\mathbf{r})$: 運動量表示の場の演算子

- H_{free} の固有状態による完全系: 粒子数保存より、

$$1 = |B_0\rangle\langle B_0| + \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}|\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}| \quad (50)$$

フェッシュバッハ射影との関係 [43] ($\hat{P} + \hat{Q} = \hat{I}$)

$$\hat{P} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}|\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}| \quad (\psi\phi \text{ 散乱状態への射影})$$

$$\hat{Q} = |B_0\rangle\langle B_0| \quad (\text{離散状態 } B_0 \text{ への射影})$$

§6 で Q チャンネルを 1 状態近似したものと等価な場の理論

- H の固有状態 (物理的な状態) として束縛状態 $|B\rangle$ 、束縛エネルギー B

$$H|B\rangle = -B|B\rangle$$

- 複合性 X (散乱状態との overlap)、素粒子性 Z (離散状態との overlap)

$$X \equiv \langle B|P|B\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}|\langle \mathbf{p}|B\rangle|^2 \geq 0$$

$$Z \equiv \langle B|Q|B\rangle = |\langle B_0|B\rangle|^2 \geq 0$$

B_0 を “bare” 状態と考えると、 Z は場のくりこみ定数

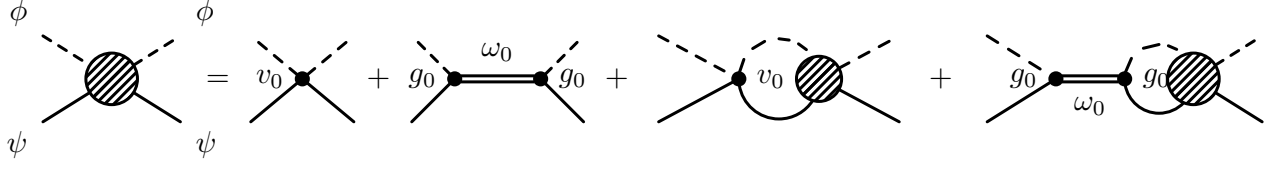


図 20: $\psi\phi$ 散乱振幅のファインマン図。

- 束縛状態の規格化 $\langle B | B \rangle = 1$ と完全性関係 (50) より

$$Z + X = 1$$

定義より X, Z は非負であり、和が1に規格化されているので確率として解釈できる

7.4 有効場の理論での弱束縛関係式

- $\psi\phi$ 散乱振幅 (導出は §6 と同様、図 20 参照)

$$f(E) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{1/v(E) - G(E)} \quad (51)$$

$$v(E) = v_0 + \frac{g_0^2}{E - \omega_0}, \quad (52)$$

$$G(E) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{E - p^2/(2\mu) + i0^+} \quad (53)$$

- カットオフ Λ : ハドロン間の相互作用が点状とみなせる運動量スケール

$$\Rightarrow R_{\text{typ}} = \frac{1}{\Lambda}$$

- 散乱振幅を用いた複合性の表式 [23, 24]

$$X = \frac{G'(E)}{G'(E) - [1/v(E)]'} \Big|_{E=-B}, \quad A'(E) = \frac{dA(E)}{dE}$$

- 散乱長を (R_{typ}/R) で展開

$$a_0 = -f(E=0) = \frac{\mu}{2\pi} [1/v(0) - G(0)]^{-1} \quad (54)$$

$$= \dots = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2\mu B}} \quad (55)$$

- $\mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R)$ 項が無視できるとき、**複合性 X が観測量 (a_0, B) から決まる**

- 注意点

- X は P チャンネルの複合性
- 複数の離散／連続状態を Q チャンネルに加えたとしても、式 (55) の主要項は変化せず同じ結果を与える
- 式 (53) で (次元正則化以外の) 異なる紫外正則化を用いても、式 (55) の主要項は変化せず同じ結果を与える
- 有効レンジ展開の係数が R_{typ} 以上の長さスケールを出さないことが仮定されている

7.5 不安定状態への拡張

- ハドロン共鳴状態に適用するには不安定状態への拡張が必要

- 前節の EFT に崩壊チャンネルを追加 (図 21)

場： ϕ_1 、 ψ_1 、 ϕ_2 、 ψ_2 、 B_0

4 点接触相互作用： $\psi_1\phi_1 \leftrightarrow \psi_1\phi_1$ 、 $\psi_1\phi_1 \leftrightarrow \psi_2\phi_2$ 、 $\psi_2\phi_2 \leftrightarrow \psi_2\phi_2$

3 点接触相互作用： $\psi_1\phi_1 \leftrightarrow B_0$ 、 $\psi_2\phi_2 \leftrightarrow B_0$

- 追加したチャンネル 2 ($\psi_2\phi_2$) の閾値エネルギー $-\nu$ が B より下にある場合、固有エネルギーは複素数になり、不安定な共鳴状態が記述できる (§5 の議論)

$$H|R\rangle = E_h|R\rangle, \quad E_h \in \mathbb{C}$$

- 共鳴状態の規格化条件 ($\langle R|R\rangle$ は発散する)

$$\langle \tilde{R}|R\rangle = 1$$

$\langle \tilde{R}|$ は同じ複素固有値を与える左固有ベクトル (Gamow ベクトル)

$$\langle \tilde{R}|H = E_h\langle \tilde{R}|$$

(エルミートでないので、左固有ベクトルは右固有ベクトルの共役でない)

- 完全系

$$1 = P + Q$$

$$P = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}_1\rangle \langle \mathbf{p}_1| \quad (\psi_1\phi_1 \text{ 散乱状態への射影})$$

$$Q = |B_0\rangle \langle B_0| + \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}_2\rangle \langle \mathbf{p}_2| \quad (\text{離散状態 } B_0 \text{ と } \psi_2\phi_2 \text{ 散乱状態への射影})$$

- 複合性 X 、素粒子性 Z

$$X = \langle \tilde{R}|P|R\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \langle \tilde{R}|\mathbf{p}_1\rangle \langle \mathbf{p}_1|R\rangle \in \mathbb{C}$$

$$Z = \langle \tilde{R}|Q|R\rangle = \langle \tilde{R}|B_0\rangle \langle B_0|R\rangle + \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \langle \tilde{R}|\mathbf{p}_2\rangle \langle \mathbf{p}_2|R\rangle \in \mathbb{C}$$

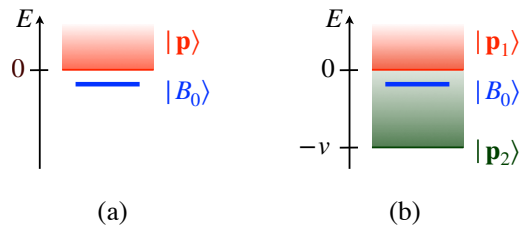


図 21: EFT の自由ハミルトニアンの特スペクトル。(a)：7.3、7.4 節の EFT、(b)：7.5 節の EFT。

- X と Z の和は 1 に規格化されているが、**複素数**なので確率として解釈できない
- チャンネル 1 の散乱長を (R_{typ}/R) で展開 (R 、 a_0 は複素数)

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\left|\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right|\right) + \mathcal{O}\left(\left|\frac{l}{R}\right|^3\right) \right\}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{-2\mu E_h}}, \quad l = \frac{1}{\sqrt{2\mu\nu}} \quad (56)$$

ν : 閾値エネルギー差、 l : 対応する長さスケール

- $\mathcal{O}(|R_{\text{typ}}/R|)$ 、 $\mathcal{O}(|l/R|^3)$ 項が無視できるとき、複合性 X が観測量 (a_0, E_h) から決まる
- 複素数の X の解釈: いくつか提案 [23, 24, 28, 44, 45] があるがまだ確立していない
- $\Lambda(1405)$ の場合:
 - チャンネル 1 が $\bar{K}N$ 、チャンネル 2 が $\pi\Sigma$
 - 固有エネルギーと散乱長: $E_h = -10 - 26i$ MeV、 $a_0 = 1.39 - 0.85i$ fm [46, 47]
 - $|R| \sim 2$ fm に対し $R_{\text{typ}} \sim 0.25$ fm (ρ メソン交換)、 $l \sim 1.08$ fm ($\pi\Sigma$ チャンネル)

誤差項を無視すると

$$X = 1.2 + i0.1$$

X が 1 に近い $\Rightarrow \bar{K}N$ 分子的成分が支配的

問題 6

1) $z \in \mathbb{C}$ に対する次の積分を考える。 z の実部に注意して、複素 z 平面内で積分が収束する領域を示し、積分を初等的に評価せよ。

$$J(z) = \int_0^\infty e^{zr} dr = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_0^{r_0} e^{zr} dr$$

2) $\varepsilon > 0$ に対する次の積分を考える。

$$\bar{J}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0(z, \varepsilon), \quad J_0(z, \varepsilon) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon r^2} e^{zr} dr$$

変数を $t = \sqrt{\varepsilon}(r - z/(2\varepsilon))$ に変換し、公式 (Erfc は相補誤差関数)

$$\int_{-w}^\infty e^{-t^2} dt = \begin{cases} \text{Erfc}(-w) = \frac{e^{-w^2}}{2(-w)} \left(1 - \frac{1}{2w^2} + \mathcal{O}(w^{-4}) \right) & \text{Re } w < 0 \\ \sqrt{\pi} - \text{Erfc}(w) = \sqrt{\pi} - \frac{e^{-w^2}}{2w} \left(1 - \frac{1}{2w^2} + \mathcal{O}(w^{-4}) \right) & \text{Re } w \geq 0 \end{cases}$$

を用いて $\bar{J}(z)$ が収束する領域は $J(z)$ より広く、 $J(z)$ が収束する領域で $\bar{J}(z) = J(z)$ となることを示せ。

3) 相互作用距離が 0 の極限で、離散固有状態の波動関数は $\psi(\mathbf{r}) \propto e^{ikr}/r$ となり、共鳴状態の固有運動量は $k = \kappa - i\gamma$ ($\kappa > \gamma > 0$) と書ける。この場合、通常の規格化

$$1 = \langle R | R \rangle = \int d\mathbf{r} \langle R | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | R \rangle = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$$

はできないが、Gamow ベクトルを用いた規格化

$$1 = \langle \tilde{R} | R \rangle = \int d\mathbf{r} \langle \tilde{R} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | R \rangle = \int [\psi(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r}$$

は可能であることを示せ。

参考文献

- [1] Particle Data Group, R. L. Workman, PTEP **2022**, 083C01 (2022).
- [2] LHCb Collaboration, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. Lett. **115**, 072001 (2015), arXiv:1507.03414 [hep-ex].
- [3] LHCb Collaboration, R. Aaij *et al.*, Phys. Rev. Lett. **122**, 222001 (2019), arXiv:1904.03947 [hep-ex].
- [4] LHCb Collaboration, R. Aaij *et al.*, Nature Phys. **18**, 751 (2022), arXiv:2109.01038 [hep-ex].
- [5] LHCb Collaboration, R. Aaij *et al.*, Nature Commun. **13**, 3351 (2022), arXiv:2109.01056 [hep-ex].
- [6] T. Hyodo and D. Jido, Prog. Part. Nucl. Phys. **67**, 55 (2012), arXiv:1104.4474 [nucl-th].
- [7] T. Hyodo and M. Niiyama, Prog. Part. Nucl. Phys. **120**, 103868 (2021), arXiv:2010.07592 [hep-ph].
- [8] 永江知文, 兵藤哲雄, *K* 中間子原子核の物理 (共立出版, 2023).
- [9] R. L. Jaffe, Phys. Rept. **409**, 1 (2005), hep-ph/0409065.
- [10] 兵藤哲雄, 日本物理学会誌「最近の研究から」 第 75 巻第 8 号 478 (2020).
https://www.jstage.jst.go.jp/article/butsuri/75/8/75_478/_article/-char/ja/
- [11] S. Inouye *et al.*, Nature (London) **392**, 151 (1998).
- [12] 羽田野直道, 井村健一郎, 非エルミート量子力学 (KS 物理専門書, 2023).
- [13] A. Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications, 3rd edition* (Springer, 2001).
- [14] V. I. Kukulin, V. M. Krasnopol'sky, and J. Horacek, *Theory of Resonances* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989).
- [15] N. Moiseyev, *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [16] Y. Ashida, Z. Gong, and M. Ueda, Adv. Phys. **69**, 249 (2021), arXiv:2006.01837 [cond-mat.mes-hall].
- [17] J. R. Taylor, *Scattering Theory: The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions* (Wiley, New York, 1972).
- [18] R. Newton, *Scattering theory of waves and particles, 2nd edition* (Springer, Berlin, 2014).
- [19] T. Kohler, K. Goral, and P. S. Julienne, Rev. Mod. Phys. **78**, 1311 (2006).
- [20] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
- [21] E. Braaten, M. Kusunoki, and D. Zhang, Annals Phys. **323**, 1770 (2008), arXiv:0709.0499 [cond-mat.other].
- [22] S. Weinberg, Phys. Rev. **137**, B672 (1965).
- [23] Y. Kamiya and T. Hyodo, Phys. Rev. C **93**, 035203 (2016), arXiv:1509.00146 [hep-ph].

- [24] Y. Kamiya and T. Hyodo, PTEP **2017**, 023 (2017), arXiv:1607.01899 [hep-ph].
- [25] T. Hyodo, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1330045 (2013), arXiv:1310.1176 [hep-ph].
- [26] G. Gamow, Z. Phys. **51**, 204 (1928).
- [27] T. A. Weber, C. L. Hammer, and V. S. Zidell, Am. J. Phys. **50**, 839 (1982).
- [28] Y. Tsuchida and T. Hyodo, Phys. Rev. **C97**, 055213 (2018), arXiv:1703.02675 [nucl-th].
- [29] T. Hyodo, Phys. Rev. Lett. **111**, 132002 (2013), arXiv:1305.1999 [hep-ph].
- [30] A. J. F. Siegert, Phys. Rev. **56**, 750 (1939).
- [31] N. Hatano, K. Sasada, H. Nakamura, and T. Petrosky, Prog. Theor. Phys. **119**, 187 (2008), arXiv:0705.1388 [quant-ph].
- [32] F.-K. Guo, X.-H. Liu, and S. Sakai, Prog. Part. Nucl. Phys. **112**, 103757 (2020), arXiv:1912.07030 [hep-ph].
- [33] L. Castillejo, R. H. Dalitz, and F. J. Dyson, Phys. Rev. **101**, 453 (1956).
- [34] H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958).
- [35] H. Feshbach, Ann. Phys. **19**, 287 (1962).
- [36] A. Moerdijk, B. Verhaar, and A. Axelsson, Phys. Rev. A **51**, 4852 (1995).
- [37] W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936), physics/0605038.
- [38] S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).
- [39] S. Scherer and M. R. Schindler, *A Primer for Chiral Perturbation Theory* volume 830 (Springer, Berlin, 2012).
- [40] V. Baru, J. Haidenbauer, C. Hanhart, Y. Kalashnikova, and A. E. Kudryavtsev, Phys. Lett. B **586**, 53 (2004), hep-ph/0308129.
- [41] T. Hyodo, D. Jido, and A. Hosaka, Phys. Rev. C **85**, 015201 (2012), arXiv:1108.5524 [nucl-th].
- [42] T. Kinugawa and T. Hyodo, Phys. Rev. C **106**, 015205 (2022), arXiv:2205.08470 [hep-ph].
- [43] K. Miyahara, T. Hyodo, and W. Weise, Phys. Rev. C **98**, 025201 (2018), arXiv:1804.08269 [nucl-th].
- [44] F. Aceti, L. Dai, L. Geng, E. Oset, and Y. Zhang, Eur. Phys. J. A **50**, 57 (2014), arXiv:1301.2554 [hep-ph].
- [45] Z.-H. Guo and J. A. Oller, Phys. Rev. D **93**, 096001 (2016), arXiv:1508.06400 [hep-ph].
- [46] Y. Ikeda, T. Hyodo, and W. Weise, Phys. Lett. B **706**, 63 (2011), arXiv:1109.3005 [nucl-th].
- [47] Y. Ikeda, T. Hyodo, and W. Weise, Nucl. Phys. A **881**, 98 (2012), arXiv:1201.6549 [nucl-th].