

エキゾチックハドロン研究の数理

兵 藤 哲 雄

1. はじめに

核子や π 中間子など、強い相互作用をする粒子はハドロンと総称され、現在までに400種類以上が観測されている¹⁾。ハドロンは、基本粒子であるクォークとグルーオンから構成される複合系であるが、低エネルギー領域におけるカラー閉じ込めのために、複合粒子であるハドロンのみが観測される自由度となる。クォークとグルーオンの動力学は強い相互作用の基礎理論であるQCDで記述されるが、低エネルギーQCDの非摂動的性質により、クォークとグルーオンからどのようにハドロンが形成されているかは、未だ完全には解明されていない。

従来、ハドロンはクォーク・反クォーク対($\bar{q}q$)からなるメソン、クォーク3体(qqq)からなるバリオンの2種類に分類されてきた。たとえば原子核を構成する陽子 p 、中性子 n 、核力を媒介する荷電 π^+ 中間子は

$$p \sim uud, \quad n \sim udd, \quad \pi^+ \sim \bar{d}u,$$

のように u, d クォークを組み合わせで構成されている。しかし近年の実験技術の進展により、この分類に当てはまらないと考えられる**エキゾチックハドロン**が発見され、注目を集めている。新粒子の発見を示唆する実験結果が次々に報告され、様々な理論のアイデアが提案されるなど、活発に研究が行われている²⁾。

エキゾチックハドロンの存在は、ハドロンが従来考えられていたよりも多様な構造をもち得ることを意味するため、その内部構造の解明は低エネルギーQCDの理解を深める鍵になると期待される。一方で、個別のエキゾチックハドロンについての研究の多くは、現象論的に実験データを説明することに主眼が置かれ、必ずしも普遍的な知見を与えるとは言い難い。また、何をもってエキゾチックと考えるか、という点には曖昧さがあり、理論的にwell-definedなことと、経験的に期待されることが混同されていることも多い。

本稿では、なるべく個別のハドロンの性質の詳細に立ち入らず、エキゾチックハドロン研究の数理的な側面に焦点を当てることで、その意義を考えてみたい。第2節でエキゾチックハドロン研究における3つの課題を提起し、残りの節でそれぞれの課題についての議論を紹介する。第3, 4, 5節は互いに関連した話題であるが、それぞれが独立した構成になっている。

2. エキゾチックハドロンと内部構造

2.1 エキゾチックハドロンの例

毎年多くのエキゾチックハドロンの実験的報告がなされているため、現状を網羅的に紹介することはここでは行わない。まず、後の議論を展開するのに有用な特徴をもつ、代表的なエキゾチックハドロン4種を紹介する。

2003 年, SPring-8 の LEPS グループは炭素原子核中の中性子標的を利用した $\gamma n \rightarrow K^- K^+ n$ 反応で, Θ^+ と呼ばれる鋭い共鳴ピークの観測を報告した³⁾. Θ^+ は $K^+(\sim \bar{s}u) + n(\sim udd)$ に崩壊するため, 最小のクォーク組成が $uudd\bar{s}$ であり, 最低でも 5 つのクォークを必要とすることからペンタクォーク状態と呼ばれる. 残念ながらその後の高統計の実験でピーク構造が再現されず, 現在では確立されたハドロンとはみなされていない¹⁾.

Θ^+ の報告と同じ 2003 年, KEK の Belle グループは B 中間子崩壊中の $J/\psi \pi^+ \pi^-$ 不変質量分布に幅の狭いピーク構造を発見した⁴⁾. $X(3872)$ と呼ばれるこの状態は $J/\psi(\sim \bar{c}c) + \pi^+(\sim \bar{d}u) + \pi^-(\sim \bar{u}d)$ に崩壊することから, $\bar{c}c$ からなるチャームonium状態だと期待される. しかし基底状態のチャームoniumの質量スペクトルをよく記述する構成子クォーク模型では $X(3872)$ の質量が再現できないため, エキゾチックな内部構造をもつと考えられている.

2021 年に LHCb 実験によって報告された T_{cc} は, 高エネルギー陽子・陽子衝突実験で $D^0 D^0 \pi^+$ 不変質量分布のピークとして観測された⁵⁾. $D^0(\sim \bar{u}c) + D^0(\sim \bar{u}c) + \pi^+(\sim \bar{d}u)$ への崩壊は, 最小のクォーク組成として $cc\bar{u}\bar{d}$ を示唆するため, テトラクォーク状態と呼ばれる^{*1)}.

1960 年代に発見されたハドロンの中にも, エキゾチックハドロンの候補がある. 代表例がストレンジクォークを含む負パリティバリオンである $\Lambda(1405)$ である^{6~8)}. $X(3872)$ と同様に, 構成子クォーク模型は負パリティのバリオン励起状態を体系的に記述する. しかし $\Lambda(1405)$ の理論計算では, 質量が実験値から大きく外れており, 通常のバリオンと異なる構造が示唆されている.

ここで, $X(3872)$ と $\Lambda(1405)$ をエキゾチックと考える根拠に, 構成子クォーク模型が用いられていることに注意する. クォーク模型は現象論的に

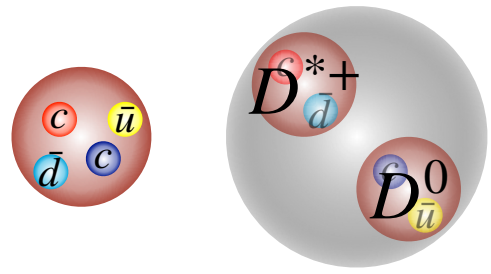


図 1 T_{cc} のマルチクォーク状態 (左), ハドロン分子状態 (右) の模式図.

成功した模型ではあるが, 基礎理論である QCD から導出されたものではなく, エキゾチック状態の定義が特定の模型に依存しているのは好ましくない. そこで, 課題 1: 模型に依存しないエキゾチックハドロンの分類について, 第 3 節で保存量子数を用いた議論を紹介する.

2.2 内部構造

通常のハドロンがもつ $\bar{q}q$ または qqq とは異なる内部構造として, よく議論されているのがマルチクォーク状態とハドロン分子状態である^{*2)}. 4 つ以上のクォークが全体としてカラー 1 重項となっている状態がマルチクォーク状態である (図 1 左). 上述のエキゾチックハドロンを例にとると, それぞれ

$$\Theta^+ \sim uudd\bar{s}, \quad X(3872) \sim \bar{c}c\bar{u}u, \\ T_{cc} \sim cc\bar{u}\bar{d}, \quad \Lambda(1405) \sim udsu\bar{u},$$

のような構造をもつ状態がマルチクォーク状態である. ハドロン分子状態とは, ハドロン間の相互作用によって複数のハドロンがゆるく束縛した状態である (図 1 右). 例を挙げると

$$\Theta^+ \sim K^+ n, \quad X(3872) \sim \bar{D}^0 D^{*0}, \\ T_{cc} \sim D^0 D^{*+}, \quad \Lambda(1405) \sim K^- p,$$

となる. クォークはまず右辺のハドロンをそれぞれ構成し, ハドロン間の相互作用によって全体が一つのハドロンとなる. 全系の中で複数のクォー

*1) 2024 年度版の PDG¹⁾では $X(3872)$ は $\chi_{c1}(3872)$, T_{cc} は $T_{cc}(3875)^+$ と記載されているが, 本稿では慣習的によく使われる名称を用いる. 詳細は PDG の Naming Scheme for Hadrons の項目を参照.

*2) このほかに構成子グルーオンを含むグルーオンハイブリッド状態や, グルーオンのみで構成されるグルーボールなどが挙げられる.

クがハドロンというクラスターを構成するという点で、ハドロン分子状態は原子核構造の研究におけるクラスター構造と類似している。

より定量的に議論を進めるためには、状態の混合を考慮する必要がある。物理的な状態は同じ量子数をもつ状態の重ね合わせとなるため、マルチクォークとハドロン分子は、どちらか一方が実現されるのではない。たとえば、現実の T_{cc} は

$$|T_{cc}\rangle = c_1 |cc\bar{u}\bar{d}\rangle + c_2 |D^0 D^{*+}\rangle + \cdots,$$

のように様々な成分の重ね合わせで記述される。しかし $D^0 \sim \bar{u}c$, $D^{*+} \sim \bar{d}c$ であることを考えると、 $|cc\bar{u}\bar{d}\rangle$ と $|D^0 D^{*+}\rangle$ の状態の直交性が曖昧であることがわかる。そもそも上の説明では、 $|cc\bar{u}\bar{d}\rangle$ と $|D^0 D^{*+}\rangle$ が QCD でどのように定義されているのか明確ではない。つまり、意味のある内部構造の議論をするためには、適切な展開基底を選ぶところから始めなければならない。そこで、**課題 2：適切な内部構造の特徴づけについて**、複合性を用いた議論を第 4 節で紹介する。

さらに、第 2.1 節で紹介したように、ハドロンへの崩壊を通じて観測されているエキゾチックハドロンは、強い相互作用に対して不安定である。よって、安定な束縛状態とは異なり、不安定な共鳴状態に対応した状態ベクトル $|T_{cc}\rangle$ を用いる必要がある。そこで、**課題 3：不安定な共鳴状態の構造**を取り扱うために、非エルミートなハミルトニアンの固有状態の記述を第 5 節で議論する。

3. 保存量子数による分類

3.1 バリオン数

一般に、ハドロンの分類には QCD の対称性に付随する**保存量子数**が用いられる¹⁾。保存量子数はハドロンに固有の物理量であり、理論的に不定性のないハドロンの特徴づけを与える。たとえば、QCD にはクォーク場の位相変換である $U(1)$ 対称性があるため、バリオン数 B が保存する。バリオン数を用いると、メソンとバリオンはそれぞれ $B = 0$, $B = 1$ の状態として定義される。

ここで、クォーク・反クォーク対 $\bar{q}q$ はバリオン数 0 なので、 $\bar{q}q$ を追加することはバリオン数を変えないことに注意する。言い換えると、バリオン数のみでは $\bar{q}q$ と $\bar{q}q\bar{q}q$ を区別することはできない。

3.2 スピン、パリティ、荷電共役

QCD の回転対称性から、ハドロンは決まった**スピン**量子数（系の全角運動量） J をもつことが従う。同様に、パリティ対称性からハドロンの固有**パリティ** $P = \pm$ も良い量子数となる。 $\bar{c}c$ など、反粒子が自分自身となるメソンは**荷電共役** C の固有状態でもある。様々な手法によって、ハドロンの J^P または J^{PC} が実験的に決定されている¹⁾。

J^{PC} に注目することで、バリオン数 B では区別できなかったメソンの構造を分類することができる。クォーク q のスピン・パリティは $J^P = 1/2^+$ であり、反クォーク $\bar{q}$ は $J^P = 1/2^-$ である。これより、 $\bar{q}q$ 状態の全スピン S は 0 または 1、軌道角運動量を L とすると全角運動量は $J = L+1, L, L-1$ であり、パリティと荷電共役は $P = (-1)^{L+1}$, $C = (-1)^{L+S}$ となることから、

$$J^{PC} = 0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, \cdots, \quad (1)$$

は $\bar{q}q$ で構成できない。これらの量子数はエキゾチックな J^{PC} と呼ばれ、 $\bar{q}q$ 以外の内部構造をもつ状態であることがわかる。

3.3 フレーバーとエキゾチックネス

フレーバー量子数には、 u, d クォークがもつアイソスピン I , s クォークがもつストレンジネス S などがある。第 3.2 節と同様に、 $\bar{q}q$ の組み合わせで状態を構成すると、可能な I と S は

$$I = 0, \frac{1}{2}, 1, \quad S = 0, \pm \frac{1}{2},$$

となる。同様に、 qqq 状態のもち得る量子数は

$$I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \quad S = 0, -1, -2, -3,$$

である。本稿執筆時まで存在が確立されたハドロンは、すべて上記の I, S をもつ状態である¹⁾。

フレーバー量子数は、**エキゾチックネス**^{9, 10)}を導入してより体系的に分類できる。上述の I, S の組み合わせは、クォークが **3**, 反クォークが $\bar{\mathbf{3}}$ で

あるフレーバー SU(3) の既約表現では

$$\bar{q}q : 1, 3, \bar{3}, 8,$$

$$qqq : 1, 3, \bar{3}, 6, 8, 10,$$

に対応する^{*3)}。これより大きな表現 (10 のメソンや 27 のバリオン) をバリオン数 $B = 0, 1$ で構成するには、 $\bar{q}q$ または qqq を超えた組み合わせが必要になる。エキゾチックネス E は、状態のバリオン数 B と SU(3) 表現のディンキン指数 $[p, q]$ に対し

$$E = \epsilon\Theta(\epsilon) + \nu\Theta(\nu), \quad (2)$$

$$\epsilon = \frac{p+2q}{3} - B, \quad \nu = \frac{p-q}{3} - B, \quad (3)$$

と定義される¹⁰⁾。このとき、 $\bar{q}q$ または qqq で構成できる表現は $E = 0$, $\bar{q}q\bar{q}q$ または $\bar{q}qqqq$ でのみ構成できる表現は $E = 1$, というように、 $\bar{q}q$ と qqq を基準として、表現を構成するために追加に必要な $\bar{q}q$ の数が E で表される。

第 2 節で紹介したエキゾチックハドロンのうち、 Θ^+ は $E = 1$ でエキゾチックだが、 $\Lambda(1405)$ は $E = 0$ であるため、フレーバー量子数で通常のハドロンと区別することはできない。これは $\Lambda(1405)$ の量子数が、 uds の組み合わせでも記述できることに対応している。同様の議論をチャームクォークを含むセクターで行うと、 T_{cc} はチャーム数 $C = \pm 2$ でエキゾチックなフレーバー量子数をもつが、 $X(3872)$ は (フレーバー量子数の観点からは) 通常のハドロンと区別できないことがわかる。

3.4 なぜ観測されないのか

以上の定義を用いて実験データを整理する。本稿執筆時の 2024 年現在、観測されているメソンのうち、エキゾチックな J^{PC} をもつものは

$$\pi^1(1400), \quad \pi^1(1600), \quad \eta^1(1855),$$

の 3 種類のみである¹⁾。フレーバー SU(3) のエキゾチックネス $E > 0$ をもつハドロンは確立しておらず、重いクォークセクターでエキゾチックなフ

レーバー量子数をもつのは

$$T_{cs0}^*(2870)^0, \quad T_{cs1}^*(2900)^0, \quad T_{cs0}^*(2900),$$

$$T_{cc}, \quad T_{b\bar{s}}(5568)^+,$$

の 5 つのみである¹⁾。400 種以上のハドロンの観測されていることを考えると、これらは有意に少ない。つまり、この結果は通常のメソンが $\bar{q}q$ 、バリオンが qqq という構造をもつことを示唆する実験的な事実である。しかし、なぜエキゾチックな保存量子数をもつハドロンが少ないのか、という理由は理論的には解明されておらず、低エネルギー QCD の非自明な問題の一つであると言える。

4. 内部構造の特徴づけ

4.1 複合性

第 3 節の議論は、 $\bar{q}q\bar{q}q$ のように構成子クォークを用いてハドロンの内部構造を特徴づけることに困難があることを示している。この原因は、カラー閉じ込めがありクォークが直接観測できないことと、 $\bar{q}q$ 対生成によって構成子クォークの数が一般に保存しないことにある。一方で、ハドロンはクォークと異なり QCD の漸近状態であるため、ハドロン自由度を用いて内部構造を特徴づけられる可能性がある^{11, 12)}。

ハドロン自由度による内部構造の特徴づけとして、**複合性**という量がある。複合性の概念自体は、素粒子と複合粒子を区別するという 1960 年代の研究の中で提案された¹¹⁾が、近年のエキゾチックハドロン研究で応用されるようになり、注目を集めている^{12~14)}。第 2.2 節で紹介したハドロン構造では、マルチクォーク状態は全体として 1 つのハドロンとしてあるので 1 ハドロン状態であり、ハドロン分子状態は複数のハドロンから構成されているため、複合粒子的な状態 (2 ハドロン状態) とみなされる。

ハミルトニアン H で記述される系に束縛状態 $|B\rangle$ が存在する場合の、 $|B\rangle$ の複合性を考える。 H を自由ハミルトニアン H_0 と相互作用 V に分解し、 H_0 の固有状態で張られる完全系は、1 粒子状

*3) 3 などの表現は c, b クォークを含むハドロンに対応する。

態 $|B_0\rangle$ と、相対運動量 $\mathbf{p}$ でラベルされた 2 粒子の散乱状態 $|\mathbf{p}\rangle$ のみを含むとする。 $|B_0\rangle$ と $|\mathbf{p}\rangle$ は H_0 の固有状態であるため互いに直交し、物理的な束縛状態 $|B\rangle$ は

$$|B\rangle = c|B_0\rangle + \int d\mathbf{p} \chi(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle \quad (4)$$

のように展開できる。 $|\mathbf{p}\rangle$ が 2 粒子の複合的状态に対応するため、複合性 X は

$$X = \int d\mathbf{p} |\langle \mathbf{p} | B \rangle|^2, \quad (5)$$

と物理状態 $|B\rangle$ と散乱状態 $|\mathbf{p}\rangle$ の重なり積分で定義される。これは、 $|B\rangle$ の中に $|\mathbf{p}\rangle$ を見出す確率を表しており、エキゾチックハドロン中のハドロン分子成分の重みを表していることがわかる。

4.2 弱束縛関係式

複合性 X を定義する際に H_0 の固有状態を選ぶ必要があったことに注意する。つまり複合性は $H = H_0 + V$ という分割に依存する量であるため、厳密な観測量ではなく一般には模型依存性をもつ。しかし例外的に複合性 X を観測量と関連させることができる場合がある。 $|B\rangle$ が s 波散乱の閾値近傍に存在する場合、弱束縛関係式

$$a_0 = R \left\{ \frac{2X}{1+X} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{typ}}}{R}\right) \right\}, \quad (6)$$

が成立する^{11, 12, 14)}。ここで a_0 は散乱長、 $R = 1/\sqrt{2\mu B}$ で (μ は換算質量)、 R_{typ} は相互作用の典型的な長さスケールである。式 (6) では複合性の模型依存性は高次項 $\mathcal{O}(R_{\text{typ}}/R)$ に含まれている。よって、閾値近傍で B が十分小さく、 $R \gg R_{\text{typ}}$ となって高次項が無視できる場合には、弱束縛関係式を用いて複合性を決定し、ハドロンの内部構造を模型に依存せず議論することができる。しかし、 s 波以外の閾値近傍状態や、 s 波でも閾値からエネルギー的に離れた状態の複合性を模型に依存せず決定する方法は未だ確立していない。

5. 不安定な共鳴状態の構造

5.1 ハドロンの崩壊

ハドロンには強い相互作用だけでなく標準理論

のすべての相互作用がはたらく^{*4)}。クォークはウィークボソンと結合するため、ハドロンには弱い相互作用がはたらき、中性子の β 崩壊をはじめとするフレーバー量子数を変化させる反応が起こる。また、クォークが電磁気的電荷をもつため、荷電ハドロンには電磁相互作用がはたらく。以上より、陽子以外のすべてのハドロンは、様々な相互作用を通じてよりエネルギーの低い複数のハドロンへ崩壊する。実際には相互作用の強さによって反応率が異なり、電磁相互作用、弱い相互作用による崩壊はそれぞれ典型的に 10^{-19} 秒、 10^{-10} 秒程度で、強い相互作用の 10^{-23} 秒と比較すると有意に長い。よって通常のハドロン物理で行われるように、以下では強い相互作用による崩壊のみを考える。

強い相互作用に対する安定性を考えた場合、400 種のハドロンのうち、安定粒子は各セクターの基底状態の数十種ほどで、残りの大部分のハドロンは**不安定状態**である。実際に、第 2.1 節で紹介したエキゾチックハドロンは、

$$\begin{aligned} \Theta^+ &\rightarrow K^+ n, & X(3872) &\rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-, \\ T_{cc} &\rightarrow D^0 D^0 \pi^+, & A(1405) &\rightarrow \pi^+ \Sigma^-, \end{aligned}$$

のようにハドロン 2 体または 3 体系へと崩壊する。不安定なハドロンが多い理由の一つとして、 π 中間子がカイラル対称性の自発的破れにともなう南部–ゴールドストーン粒子であることが挙げられる。ハドロンの一般的な励起エネルギー (~ 500 MeV) に比べて π 中間子の質量 (~ 140 MeV) が小さく、励起ハドロンの質量より低いエネルギーに π 中間子を含む閾値エネルギーが位置することが多いため、 π を含むチャンネルへの崩壊が起りやすい。ハドロンの不安定性を尊重するには、ハドロン散乱中の**共鳴状態**としてエキゾチックハドロンを記述し、その構造を議論する必要がある。

5.2 ハミルトニアン固有状態

量子力学において、不安定な共鳴状態は、安定な束

*4) ハドロンは質量をもつので重力も作用する、つまり自然界の 4 つの力すべてが作用する。通常のハドロン研究では重力の効果は無視できるが、中性子星など天体現象では重力を含めた議論が必要になる。

縛状態といくつかの点で共通する性質をもつ^{15~17)}．
具体的に、束縛状態 $|B\rangle$ は、実数の固有エネルギー $E = -B \in \mathbb{R}$ をもつハミルトニアン H の固有状態であり、シュレディンガー方程式

$$H|B\rangle = -B|B\rangle, \quad (7)$$

に従う．座標表示の波動関数の漸近形は

$$\psi_B(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|B\rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{2\mu B}r}}{r}, \quad (8)$$

であるが、これはシュレディンガー方程式を解く際に、遠方で $e^{+\sqrt{2\mu B}r}/r$ と振る舞う解を落とすような外向き (Siegert) 境界条件¹⁸⁾を課したことに起因する．

不安定な共鳴状態 $|R\rangle$ もハミルトニアンの固有状態

$$H|R\rangle = E_R|R\rangle \quad (9)$$

であるが、複素数の固有エネルギー $E_R \in \mathbb{C}$ をもつ^{7, 15~23)}．励起エネルギー $M_R > 0$ 、崩壊幅 $\Gamma_R > 0$ を用いると

$$E_R = M_R - i\frac{\Gamma_R}{2}, \quad (10)$$

と表現できる．エネルギーが負の虚部を持つことで、波動関数の時間発展が指数減衰となり、崩壊する共鳴状態が記述される．シュレディンガー方程式を解く際には、束縛状態と同じ外向き境界条件を課すことで $|R\rangle$ が得られることが知られている^{7, 15~23)}．このように、 $|B\rangle$ と $|R\rangle$ はどちらもハミルトニアン H の (一般化された) 固有状態であり、共通の境界条件で得られるという類似性がある．この事実は、共鳴状態がある種の「状態」であり、束縛状態と同様に構造が議論できることを期待させる．

一方で、 $|B\rangle$ と $|R\rangle$ の間には重要な違いがある．共鳴状態の波動関数の座標表示は、

$$\psi_R(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|R\rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{i\sqrt{2\mu E_R}r}}{r}, \quad (11)$$

であり、 $\sqrt{2\mu E_R} = p_R + ip_i$ とすると $p_R > 0$ 、 $p_i < 0$ であることから、

$$\psi_R(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{ip_R r} e^{-p_i r}}{r}, \quad (12)$$

は遠方で増大する波動関数になっている．つまり共鳴状態の波動関数は二乗可積分ではない：

$$\langle R|R\rangle = \int d\mathbf{r} |\psi_R(\mathbf{r})|^2 \rightarrow \infty. \quad (13)$$

これは、束縛状態の波動関数が二乗可積分であることと対照的である：

$$\langle B|B\rangle = \int d\mathbf{r} |\psi_B(\mathbf{r})|^2 < \infty. \quad (14)$$

5.3 共鳴状態による期待値

歴史的には、ハミルトニアンの複素エネルギー固有状態は、Gamow によって不安定原子核の α 崩壊を記述するために発見法的に導入された¹⁹⁾．一方で、状態空間としてヒルベルト空間 (完備な内積空間) を考える場合、エルミート (自己共役) 演算子の固有値は実数になるため、ハミルトニアンが複素固有値を持つことは不自然に見える．しかし、よく知られているように、通常のヒルベルト空間は、超関数であるデルタ関数や、平面波のような無限遠まで広がる散乱波動関数を含んでいない．崩壊を通じて散乱状態と結合する共鳴状態を記述するためには、Rigged Hilbert space と呼ばれる拡張された空間を用いる必要がある^{20, 21)}．実際に、式 (11) の共鳴状態の波動関数は二乗可積分でなく、通常のヒルベルト空間には含まれない．

通常の内積が発散する共鳴状態 $|R\rangle$ に対しても、内積を拡張することで状態の規格化を行い、有限の期待値を計算することができる^{15, 16, 20~23)}．まず、複素固有値を持つ共鳴状態に対しては、通常の内積 $\langle R|R\rangle$ が適切でないことは以下のようにわかる．式 (9) に従う $|R\rangle$ に共役な $\langle R|$ は一般に H の固有状態ではなく、

$$\langle R|H^\dagger = \langle R|E_R^*, \quad (15)$$

に従う $H^\dagger$ の固有状態である．これは有限次元の非エルミート行列に対し、左固有ベクトルが右固有ベクトルの転置複素共役にならないことと対応している．よって通常の内積で期待値 $\langle R|H|R\rangle$ を計算すると問題があることがわかる．そこで $\langle R|$

の代わりに、 $|R\rangle$ と同じ固有エネルギーを与える左固有状態として

$$\langle \tilde{R} | H = \langle \tilde{R} | E_R, \quad (16)$$

を導入する。 $\langle \tilde{R} |$ と $|R\rangle$ の内積は

$$\langle \tilde{R} | R \rangle = \int d\mathbf{r} [\psi_R(\mathbf{r})]^2, \quad (17)$$

と複素数の 2 乗の積分となり、式 (11) を代入すると r の大きいところで発散するものの、Zel'dovich の正則化などを用いて有限の積分値を一意に定めることができる²⁰⁾。よって

$$\langle \tilde{R} | R \rangle = 1, \quad (18)$$

と規格化を行うことができる。

拡張された内積で規格化した状態を用いると、ハミルトニアン の期待値は

$$\langle \tilde{R} | H | R \rangle = E_R \quad (19)$$

と問題なく得られる。しかし、これは同時に、任意の演算子 O の期待値 $\langle \tilde{R} | O | R \rangle$ が複素数になり得ることを示している。実際に、共鳴状態の平均二乗半径などが複素数になることが知られている。第 4 節の複合性 X も、ハドロン分子成分の空間への射影演算子 $\int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|$ の期待値とみなせるため、やはり複素数となる。状態中に複合的成分を見出す確率として定義された複合性が複素数になると、何らかの解釈方法を導入する必要性が生じる。様々な提案がなされているものの¹⁴⁾、複素数の複合性 X の解釈方法は確立していない。

6. おわりに

近年エキゾチックハドロン研究では、実験技術の発展を契機として活発な議論が行われている。本稿では、エキゾチックハドロンの理論研究における曖昧な点に注目し、3 つの課題と関連する議論を紹介した。エキゾチックな量子数を持つハドロンが極端に少ない理由の解明、任意の状態の複合性の決定、不安定状態の構造の適切な解釈方法などは、課題として残されている。今後の理論研

究でこれらの問題が解決し、低エネルギー QCD の理解が進展することを期待する。

参考文献

- 1) Particle Data Group, S. Navas *et al.*, *Phys. Rev. D* **110**, 030001 (2024).
- 2) A. Hosaka *et al.*, *PTEP* **2016**, 062C01 (2016); F.-K. Guo *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015004 (2018); N. Brambilla *et al.*, *Phys. Rept.* **873**, 1 (2020).
- 3) LEPs, T. Nakano *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 012002 (2003).
- 4) Belle, S.-K. Choi *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 262001 (2003).
- 5) LHCb, R. Aaij *et al.*, *Nature Phys.* **18**, 751 (2022); *Nature Commun.* **13**, 3351 (2022).
- 6) T. Hyodo and D. Jido, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **67**, 55 (2012).
- 7) T. Hyodo and M. Niiyama, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **120**, 103868 (2021).
- 8) 永江知文, 兵藤哲雄, 『 K 中間子原子核の物理』, 共立出版 (2023).
- 9) V. Kopeliovich, *Phys. Lett. B* **259**, 234 (1991); D. Diakonov and V. Petrov, *Phys. Rev. D* **69**, 056002 (2004); E. Jenkins and A. V. Manohar, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 022001 (2004); *Phys. Rev. D* **70**, 034023 (2004).
- 10) T. Hyodo, D. Jido, and A. Hosaka, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 192002 (2006); *Phys. Rev. D* **75**, 034002 (2007).
- 11) S. Weinberg, *Phys. Rev.* **137**, B672 (1965).
- 12) T. Hyodo, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1330045 (2013).
- 13) V. Baru, J. Haidenbauer, C. Hanhart, Y. Kalashnikova, and A. E. Kudryavtsev, *Phys. Lett. B* **586**, 53 (2004).
- 14) T. Kinugawa and T. Hyodo, arXiv:2411.12285 [hep-ph].
- 15) V. I. Kukulin, V. M. Krasnopol'sky, and J. Horacek, *Theory of Resonances* (Kluwer Academic Publishers, 1989).
- 16) N. Moiseyev, *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 2011).
- 17) 羽田野直道, 井村健一郎, 『非エルミート量子力学』, 講談社 (2023).
- 18) A. J. F. Siegert, *Phys. Rev.* **56**, 750 (1939).
- 19) G. Gamow, *Z. Phys.* **51**, 204 (1928).
- 20) T. Berggren, *Nucl. Phys. A* **109**, 265 (1968).
- 21) A. Bohm, *J. Math. Phys.* **22**, 2813 (1981).
- 22) A. Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications* (Springer, 2001).
- 23) R. de la Madrid and M. Gadella, *Am. J. Phys.* **70**, 626 (2002).

(ひょうどう・てつお, 東京都立大学理学部)