

ハドロン散乱の対称性と量子エンタングルメント

兵藤 哲雄

2025 年 11 月 25 日

概 要

都立大 2025 年度後期集中講義の講義ノート

目 次

1 導入：核力、対称性、エンタングルメント	1
1.1 核子散乱	1
1.2 基礎理論の対称性と創発する対称性	1
1.3 状態、演算子のエンタングルメント	2
1.4 エンタングルメント抑制	3
1.5 講義の目標、参考文献	3
2 スピン 1/2 状態	5
2.1 状態の表現	5
2.2 密度行列	6
2.3 状態の変換（量子ゲート）	7
2.4 射影測定	8
3 2 スピン系とエンタングルメント・エントロピー	9
3.1 2 スピン状態と全スピン	9
3.2 クロネッカー積	9
3.3 完全正規直交系	10
3.4 相関の指標	11
4 古典相関と量子相関	13
4.1 純粋状態と混合状態	13
4.2 2 スピン間の相関	14
4.3 エンタングルメントと縮約密度行列	16

5 散乱理論、S行列、エンタングルメント・パワー	17
5.1 S行列と位相差	17
5.2 散乱長	17
5.3 2スピン系の量子ゲートとエンタングルメント	18
5.4 エンタングルメント・パワー	19
6 核力とエンタングルメント抑制	21
6.1 2核子系の波動関数	21
6.2 創発する対称性	22
6.3 2核子系のエンタングルメント抑制	23
6.4 量子ゲートによる解釈	24
7 一般のスピン、フレーバーへの拡張	25
7.1 ハドロンのスピンとフレーバー	25
7.2 8重項バリオンの散乱	26
7.3 スピン3/2状態	27
7.4 10重項バリオンの散乱	28

1 導入：核力、対称性、エンタングルメント

1.1 核子散乱

- 核子は**スピン**と**アイソスピン**の内部自由度を持つ

- スピン $1/2$: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$
- アイソスピン $1/2$: $|p\rangle, |n\rangle$

- 1 核子状態：4 種類

$$|p \uparrow\rangle, |p \downarrow\rangle, |n \uparrow\rangle, |n \downarrow\rangle \quad (1)$$

- 2 核子状態：16 種類

$$|p \uparrow p \uparrow\rangle, |p \uparrow p \downarrow\rangle, |p \uparrow n \uparrow\rangle, \dots \quad (2)$$

- 2 核子の散乱：さまざまな始状態・終状態の組み合わせが可能 ($16 \times 16 = 256$ 種類)

- 対称性**の要請

- 特定の散乱の禁止： $\sigma(p \uparrow p \uparrow \rightarrow p \uparrow p \downarrow) = 0$
- 異なる散乱の間の関係： $\sigma(p \uparrow p \uparrow \rightarrow p \uparrow p \uparrow) = \sigma(n \uparrow n \uparrow \rightarrow n \uparrow n \uparrow)$

→ 少ない自由度で記述可能

1.2 基礎理論の対称性と創発する対称性

- 基礎理論の対称性

- スピン $SU(2)_S \leftarrow$ QCD のスピン対称性と回転対称性
- アイソスピン $SU(2)_I \leftarrow$ QCD (u, d クォーク) のアイソスピン対称性

それぞれ独立な変換 → 核力は $SU(2)_S \times SU(2)_I$ **対称性** に従う

- $SU(2)_S \times SU(2)_I$ 対称性 → s 波の低エネルギー散乱は **2つの成分** のみで記述できる

- スピン $S = 0$ 、アイソスピン $I = 1$ (1S_0)
- スピン $S = 1$ 、アイソスピン $I = 0$ (3S_1)

ただし $SU(2)_S \times SU(2)_I$ 対称性のもとでは $S = 0$ と $S = 1$ の散乱は独立でよい

- 現実の核力の性質

- $S = 0$ と $S = 1$ の性質が近い

$$1/|a_{S=0}| \sim 1/|a_{S=1}| \quad (3)$$

スピン・フレーバー SU(4) 対称性 [11, 12]

- 散乱長がユニタリー極限（に近い）

$$|a_{S=0}|, |a_{S=1}| \gg 1/m_\pi \quad (4)$$

非相対論的共形対称性（シュレディンガー対称性） [13]

基礎理論の対称性から直接導けない：創発する対称性（emergent symmetry）

1.3 状態、演算子のエンタングルメント

- 2 スピン系のテンソル積状態（product state）： $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$

2つのスピンの独立、スピン間に相関がない

- スピン 0 の状態（Bell state）： $|S = 0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$

2つのスピンが相関している

- **エンタングルメント・エントロピー（EE）**：量子相関の度合いを定量化する尺度

$$\mathcal{E}(|\uparrow\uparrow\rangle) = 0 \quad \text{相関なし}, \quad (5)$$

$$\mathcal{E}(|S = 0\rangle) = \frac{1}{2} \quad \text{相関最大（線形エントロピーの場合の値）} \quad (6)$$

スピン間の相関が強い状態ほど EE が大きい

- ユニタリー演算子 U ：状態 $|\psi\rangle$ を別の状態 $|\phi\rangle$ に変換する

$$|\phi\rangle = U |\psi\rangle \quad (7)$$

- **エンタングルメント・パワー（EP）**：演算子 U が相関を作り出す能力 [14]

$$E(U) = \overline{\mathcal{E}(U | \text{テンソル積状態})} \quad (8)$$

テンソル積状態（無相関）に U を作用させた状態の EE の平均

1.4 エンタングルメント抑制

- 散乱 S 行列：散乱位相差 δ の情報を含む

$$S = e^{2i\delta} \quad (9)$$

各チャンネル ($^1S_0, ^3S_1$ など) ごとに散乱位相差 δ

- 始状態 $|\text{in}\rangle$ (散乱前) に作用して終状態 $|\text{out}\rangle$ (散乱後) に変化させる **演算子**

$$|\text{out}\rangle = S |\text{in}\rangle \quad (10)$$

→ S 行列の EP が定義できる

- **エンタングルメント抑制** [5]

$E(S) = 0$ と要請

→ 散乱位相差に条件が課せられる

→ 1S_0 と 3S_1 の核子散乱に関係がつく

→ スピン・フレーバー SU(4) または非相対論的共形対称性

- 量子情報理論による解釈 [6]

– スピン・フレーバー SU(4) : S 行列が **Identity ゲート** に対応

– 非相対論的共形対称性 : S 行列が **SWAP ゲート** に対応

1.5 講義の目標、参考文献

- 核力の創発する対称性をエンタングルメント抑制から導出する

– §2 スピン 1/2 状態

– §3 2 スピン系とエンタングルメント・エントロピー

– §4 古典相関と量子相関

– §5 散乱理論、 S 行列、エンタングルメント・パワー

– §6 核力とエンタングルメント抑制

– §7 一般のスピン、フレーバーへの拡張

- 参考文献：量子情報理論の教科書

– 石坂 智, 小川 朋宏, 河内 亮周, 木村 元, 林 正人 「量子情報科学入門」 第2版 (共立出版, 2024).

- 細谷 暁夫 「量子と情報」 (裳華房, 2024).
- 佐川 弘幸, 吉田 宣章 「量子情報理論」 (丸善出版, 2019).
- Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang 「Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition」 (Cambridge University Press, 2010).

- 原著論文

- 核力のエンタングルメント抑制 [5]
- 量子情報理論による解釈 [6]
- ハドロン物理への応用 (Octet バリオン、少数系原子核、heavy メソン散乱とエキゾチックハドロン、スピン 3/2 バリオン Decuplet 散乱...) [7, 8, 9, 10]
- 素粒子物理への応用 (Higgs セクター、電弱相転移、ニュートリノ...) [11, 12, 13, 14, 15]

2 スピン1/2状態

2.1 状態の表現

- パウリスピノル（量子ビット、**qubit**）：複素2成分ベクトル

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad (11)$$

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \quad (12)$$

条件がなければ $\text{Re } a, \text{Im } a, \text{Re } b, \text{Im } b$ の **4自由度** ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$)

- 規格化条件と波動関数の位相

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (13)$$

位相変換は期待値を変えない

→ 規格化条件を課し位相の自由度を除くと、 $|\psi\rangle$ は **2自由度** (斜線) で表現できる

- ブロッホ球による表示

$$|\theta, \phi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (14)$$

2自由度 $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ は3次元極座標の角度

- Fubini-Study measure (1/2 より大きなスピン状態にも一般化可能)
規格化と位相の自由度を除く： $\mathbb{C}^2$ を複素定数倍の同値関係で割った商空間
 $\mathbb{C}^2$ の斜線 $\sim \mathbb{CP}^1$ (複素射影空間)

$$|\theta_1, \nu_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 e^{i\nu_1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

2自由度 θ_1, ν_1

- スピン演算子 $\mathbf{s}$ ：複素2成分行列、パウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$ で表現

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

(量子情報分野では $\sigma_x = X, \sigma_y = Y, \sigma_z = Z$)

- s_z の固有状態

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$s_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle, \quad s_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle \quad (18)$$

(量子情報分野では $|\uparrow\rangle = |0\rangle, |\downarrow\rangle = |1\rangle$)

- s_x, s_y の固有状態

$$|\xi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\xi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$s_x |\xi_0\rangle = \frac{1}{2} |\xi_0\rangle, \quad s_x |\xi_1\rangle = -\frac{1}{2} |\xi_1\rangle, \quad (20)$$

$$|\eta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |\eta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$s_y |\eta_0\rangle = \frac{1}{2} |\eta_0\rangle, \quad s_y |\eta_1\rangle = -\frac{1}{2} |\eta_1\rangle \quad (22)$$

(量子情報分野では $|\xi_0\rangle = |+\rangle, |\xi_1\rangle = |-\rangle$)

- 完全正規直交系 (CONS) $\{|\psi_i\rangle\}$

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| = 1 \quad (23)$$

エルミート行列の固有ベクトルは CONS を構成する

例) $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ 、計算基底 (computational basis) と呼ばれる

- 任意の状態は CONS で展開できる

$$|\xi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle, \quad (24)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a |\uparrow\rangle + b |\downarrow\rangle \quad (25)$$

展開係数は内積で与えられる

$$a = \langle\uparrow|\psi\rangle, \quad b = \langle\downarrow|\psi\rangle \quad (26)$$

2.2 密度行列

- 状態 $|\psi\rangle$ に対応する密度行列 (密度演算子) ρ

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \quad (27)$$

- 演算子 O の **トレース** : 任意の CONS $\{|\psi_i\rangle\}$ による行列要素の対角成分の和

$$\text{Tr}[O] = \sum_i \langle\psi_i|O|\psi_i\rangle \quad (28)$$

結果は CONS の選び方によらない

- 状態の規格化

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho] &= \sum_i \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_i \rangle = \sum_i \langle \psi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \\ &= 1\end{aligned}\tag{29}$$

- 演算子 O の期待値

$$\langle \psi | O | \psi \rangle = \mathrm{Tr}[O\rho]\tag{30}$$

- 例) 式 (24) のブロッホ球表示の状態 $\rho = |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi|$ のパウリ行列の期待値

$$\mathrm{Tr}[\sigma_x \rho] = \sin \theta \cos \phi\tag{31}$$

$$\mathrm{Tr}[\sigma_y \rho] = \sin \theta \sin \phi\tag{32}$$

$$\mathrm{Tr}[\sigma_z \rho] = \cos \theta\tag{33}$$

半径 1 の球面上の点の極座標表示

2.3 状態の変換（量子ゲート）

- ユニタリー演算子 U

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \quad U^\dagger = U^{-1}\tag{34}$$

パウリ行列は全てエルミートかつユニタリー

- U は状態 $|\psi\rangle$ を $|\phi\rangle$ に変換：qubit を操作する量子ゲート

$$|\phi\rangle = U |\psi\rangle\tag{35}$$

- ユニタリー変換の下でノルム（確率）が保存

$$\langle \phi | \phi \rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle\tag{36}$$

系の時間発展はユニタリー演算子で表される

- X ゲート

$$\sigma_x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad \sigma_x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\tag{37}$$

上向きと下向きを入れ替える（古典論理の NOT ゲート）

- アダマール（Hadamard）ゲート

$$H = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\tag{38}$$

$$H |\uparrow\rangle = |\xi_0\rangle, \quad H |\downarrow\rangle = |\xi_1\rangle,\tag{39}$$

$$H |\xi_0\rangle = |\uparrow\rangle, \quad H |\xi_1\rangle = |\downarrow\rangle\tag{40}$$

z 軸と x 軸の中間 $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$ を軸とする 180° 回転

2.4 射影測定

- 物理量は**エルミート演算子**で表現される
- エルミート行列 O はユニタリー行列 U で対角化可能

$$U^{-1}OU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (41)$$

- スペクトル分解**: O を対角化する CONS $\{|i\rangle\}$ による表現

$$O = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \quad (42)$$

固有値 λ_i の状態への**射影演算子** P_i

$$P_i = |i\rangle \langle i|, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad \sum_i P_i = 1 \quad (43)$$

- 状態 $|\psi\rangle$ の $|i\rangle$ による展開

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|\psi\rangle = \sum_i C_i |i\rangle, \quad C_i = \langle i|\psi\rangle \quad (44)$$

- ボルン則**: 物理量 O を測定すると**確率的**にいずれかの**状態 $|i\rangle$ に遷移**

$$|\psi\rangle \rightarrow |i\rangle = \frac{P_i |\psi\rangle}{\|P_i |\psi\rangle\|} \quad (45)$$

$|i\rangle$ が選ばれる**確率**: 展開係数の絶対値二乗、射影演算子の期待値

$$\text{Pr}(i) = |C_i|^2 = |\langle i|\psi\rangle|^2 = \text{Tr}[P_i \rho] \quad (46)$$

- $O = s_z$ の場合: CONS は $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

$$P_\uparrow = |\uparrow\rangle \langle \uparrow| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_\downarrow = |\downarrow\rangle \langle \downarrow| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\text{Pr}(\uparrow) = |\langle \uparrow|\psi\rangle|^2 = \text{Tr}[P_\uparrow \rho] \quad (48)$$

問題 1

- 1*) 式 (30) を示せ。
- 2*) 式 (31) を示せ。
- 3*) 式 (40) を示せ。
- 4*) $H|\eta_0\rangle$ を $|\eta_1\rangle$ を用いて表せ。

3 2スピン系とエンタングルメント・エントロピー

3.1 2スピン状態と全スピン

- スピン A とスピン B の合成系 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ (量子情報分野では Alice と Bob の 2-qubit 系)

- テンソル積状態

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow_A\rangle \otimes |\uparrow_B\rangle, \quad |\uparrow\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\downarrow\rangle \quad (49)$$

- 各スピンの演算子

$$\mathbf{s}_A = \underbrace{\mathbf{s}}_{A \text{ に作用}} \otimes \underbrace{1}_{B \text{ に作用}}, \quad \mathbf{s}_B = 1 \otimes \mathbf{s} \quad (50)$$

- 演算子の作用

$$(s_A)_z |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle, \quad \dots \quad (51)$$

- 全スピン演算子 $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_A + \mathbf{s}_B \quad (52)$$

- $\mathbf{S}$ の固有状態：スピンの大きさ $S = 0, 1$ と z 成分 S_z で指定

$$|S, S_z\rangle = \underbrace{|0, 0\rangle}_{\text{スピン } S=0}, \quad \underbrace{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle}_{\text{スピン } S=1} \quad (53)$$

スピン演算子の作用

$$S_z |1, -1\rangle = -|1, -1\rangle, \quad \mathbf{S}^2 |1, -1\rangle = S(S+1) |1, -1\rangle = 2 |1, -1\rangle, \quad \dots \quad (54)$$

3.2 クロネッカー積

- 状態のクロネッカー積：テンソル積状態を 4 成分ベクトルで表現

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

- 演算子のクロネッカー積： 4×4 行列

$$\begin{aligned}
 (s_A)_x &= s_x \otimes 1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
 s_x \otimes s_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{58}$$

- テンソル積状態の密度行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow| = \underbrace{|\uparrow\rangle \langle\uparrow|}_{A \text{ の } \rho} \otimes \underbrace{|\uparrow\rangle \langle\uparrow|}_{B \text{ の } \rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

3.3 完全正規直交系

- **計算基底**： $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$
- **Bell 基底**： $\{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{全スピン } S \text{ の固有状態ではない}) \tag{60}$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (S_z = 0 \text{ で } S = 1 \text{ および } S = 0 \text{ の状態}) \tag{61}$$

- 一般の 2 スピン状態 ($\mathbb{C}^4$ のベクトル)

$$|\Psi\rangle = \alpha |\uparrow\uparrow\rangle + \beta |\uparrow\downarrow\rangle + \gamma |\downarrow\uparrow\rangle + \delta |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \tag{62}$$

規格化

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \tag{63}$$

3.4 相関の指標

- 相関を定量化する指標（「相関」については第 4 節で詳しく）
- エンタングルメント・エントロピー（von Neumann エントロピー）

$$\mathcal{E}_{\text{vN}} = -\text{Tr}_A [\rho_A \ln \rho_A] = -\text{Tr}_B [\rho_B \ln \rho_B] \quad (64)$$

- 縮約密度行列：式 (62) の一般の状態について

$$\rho_A = \text{Tr}_B [\rho] = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha\gamma^* + \beta\delta^* \\ \alpha^*\gamma + \beta^*\delta & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} \quad (65)$$

スピン B についての部分トレース： $\mathcal{H}_A$ の密度行列を与える

$$\text{Tr}_B [\rho] = \sum_i (1 \otimes \langle \psi_i |) \rho (1 \otimes | \psi_i \rangle) \quad (66)$$

$\rho = \rho_a \otimes \rho_b$ の場合

$$\text{Tr}_B [\rho_a \otimes \rho_b] = \rho_a \text{Tr} [\rho_b] \quad (67)$$

- 線形エントロピー ($\ln \rho_A = \ln[1 + (\rho_A - 1)] = \rho_A - 1 + \dots$)

$$\mathcal{E} = 1 - \text{Tr}_A [\rho_A^2] \quad (68)$$

- Concurrence [16, 17]

$$\Delta = |\langle \Psi | \sigma_y \otimes \sigma_y | \Psi^* \rangle| = 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \quad (69)$$

ρ_A を用いて定義される任意のエンタングルメント指標は Δ で表現できる：

$$\mathcal{E}_{\text{vN}} = -\lambda_+ \ln \lambda_+ - \lambda_- \ln \lambda_-, \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - \Delta^2}), \quad (70)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Delta^2 = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|^2 \quad (71)$$

- テンソル積状態 $|\uparrow\downarrow\rangle$ のエンタングルメント

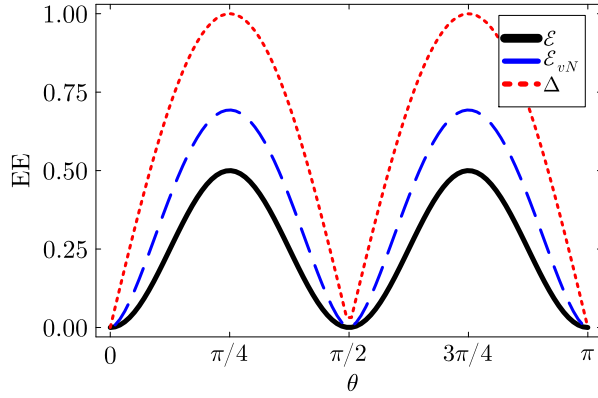
$$\beta = 1, \quad \alpha = \gamma = \delta = 0, \quad (72)$$

$$\Delta = 0, \quad (73)$$

$$\mathcal{E} = 0, \quad (74)$$

$$\lambda_+ = 1, \quad \lambda_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{\text{vN}} = 0 \quad (75)$$

どの指標でも 0



θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
$ \psi\rangle$	$ \uparrow\downarrow\rangle$	$ \Psi^+\rangle$	$ \downarrow\uparrow\rangle$	$-\lvert\Psi^-\rangle$
$\mathcal{E}$	0	$1/2$	0	$1/2$
$\mathcal{E}_{vN}$	0	$\ln 2$	0	$\ln 2$
Δ	0	1	0	1

図 1: 状態 (80) の線形エントロピー $\mathcal{E}$ 、フォンノイマンエントロピー $\mathcal{E}_{vN}$ 、Concurrence Δ 。

- Bell 状態 $|\Psi^+\rangle$ のエンタングルメント

$$\alpha = \delta = 0, \quad \beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (76)$$

$$\Delta = 1, \quad (77)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}, \quad (78)$$

$$\lambda_+ = \frac{1}{2}, \quad \lambda_- = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{E}_{vN} = \ln 2 \sim 0.693 \quad (79)$$

1 ebit (エンタングルメント・ビット)、エンタングルメントの基本単位

- 一般の線形結合の状態

$$|\psi\rangle = \cos \theta |\uparrow\downarrow\rangle + \sin \theta |\downarrow\uparrow\rangle \quad (80)$$

図 1: $\mathcal{E}$ 、 $\mathcal{E}_{vN}$ 、 Δ の比較

- テンソル積状態 ($\theta = 0, \pi/2$) で全て 0、Bell 状態 ($\theta = \pi/4, 3\pi/4$) で最大

問題 2

- 1*) 式 (65) を示せ。
- 2) 式 (69) を示せ。ただし $|\Psi^*\rangle$ は $|\Psi\rangle$ の複素共役を成分に持つ縦ベクトルである。
- 3) 式 (70) を示せ。
- 4) 式 (71) を示せ。

4 古典相関と量子相関

4.1 純粋状態と混合状態

- **純粋状態**：1つの状態 $|\psi\rangle$ のみを用いて密度行列が表現される

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \quad (81)$$

性質 (idempotent)

$$\rho^2 = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{=1} \langle\psi| = |\psi\rangle \langle\psi| = \rho, \quad (82)$$

$$\text{Tr} [\rho^2] = \text{Tr} [\rho] = 1 \quad (83)$$

- **混合状態**：密度行列が**実数**の重み $0 \leq p_i \leq 1$ で和を取られている状況

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle\phi_i|, \quad \sum_i p_i = 1, \quad \langle\phi_i|\phi_i\rangle = 1 \quad (84)$$

$|\phi_i\rangle$ は規格化されているが必ずしも直交していなくても良い

確率 p_i で状態 $|\phi_i\rangle$ を用意した「状態の集まり」(J.J. Sakurai では「混合アンサンブル」)

Bell 状態のような「状態の重ね合わせ」とは**異なる**

混合状態の表現は一意的でない (シュレディンガーの混合定理)

- 混合状態は規格化されているが $\rho^2 \neq \rho$

$$\text{Tr} [\rho] = \sum_i p_i \text{Tr} [|\phi_i\rangle \langle\phi_i|] = \sum_i p_i = 1, \quad (85)$$

$$\rho^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |\phi_i\rangle \langle\phi_i|\phi_j\rangle \langle\phi_j| \neq \rho \quad (86)$$

- **混合度**：混合状態の純粋状態からの「距離」を定量化

$$\mu = 1 - \text{Tr} [\rho^2], \quad \underbrace{0}_{\text{純粋状態}} \leq \mu \leq \underbrace{1 - \frac{1}{N}}_{\text{完全混合}} \quad (87)$$

N はヒルベルト空間の次元

- 1 スピン系の場合の例

$$|\uparrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{純粋状態}) \quad (88)$$

$$\frac{1}{2} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle \langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (\text{混合状態}) \quad (89)$$

4.2 2 スピン間の相関

- 2 スピン系の測定：2 スピン系の状態 $|\psi\rangle$ のスピン A とスピン B 両方の s_z を測定 A 、 B 両方上向き状態を得る確率

$$\text{Pr}(\uparrow\uparrow) = |\langle\uparrow\uparrow|\psi\rangle|^2 = \text{Tr}[P_{\uparrow\uparrow}\rho], \quad P_{\uparrow\uparrow} = P_{\uparrow} \otimes P_{\uparrow} \quad (90)$$

状態の変化

$$|\psi\rangle \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{P_{\uparrow\uparrow}|\psi\rangle}{\|P_{\uparrow\uparrow}|\psi\rangle\|} \quad (91)$$

- 以下の密度行列を考える：

$$\rho_p = |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| \quad (\text{テンソル積状態の純粋状態}), \quad (92)$$

$$\rho_m = \frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \quad (\text{混合状態}), \quad (93)$$

$$\rho_e = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow|}{\sqrt{2}} \quad (\text{Bell 状態の純粋状態}) \quad (94)$$

全て「スピン A が上向きならスピン B も上向き」という相関？

- z 方向のスピン測定

– ρ_p の場合： $|\psi\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ なので

$$\text{Pr}(\uparrow\uparrow) = |\langle\uparrow\uparrow|\uparrow\uparrow\rangle|^2 = 1, \quad \text{Pr}(\uparrow\downarrow) = |\langle\uparrow\downarrow|\uparrow\uparrow\rangle|^2 = 0, \quad \dots \quad (95)$$

– ρ_m の場合：

$$\text{Pr}(\uparrow\uparrow) = \text{Tr}[P_{\uparrow\uparrow}\rho_m] = \langle\uparrow\uparrow|\left(\frac{1}{2}|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|\right)|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2}, \quad (96)$$

$$\text{Pr}(\uparrow\downarrow) = \text{Tr}[P_{\uparrow\downarrow}\rho_m] = \langle\uparrow\downarrow|\left(\frac{1}{2}|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|\right)|\uparrow\downarrow\rangle = 0, \quad \dots \quad (97)$$

– ρ_e の場合： $|\psi\rangle = |\Phi^+\rangle$ なので

$$\text{Pr}(\uparrow\uparrow) = |\langle\uparrow\uparrow|\Phi^+\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{Pr}(\uparrow\downarrow) = |\langle\uparrow\downarrow|\Phi^+\rangle|^2 = 0, \quad \dots \quad (98)$$

- x 方向のスピン測定 (“+” = ξ_0 , “−” = ξ_1)

– ρ_p の場合：式 (24) より

$$|++\rangle = \left(\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \quad (99)$$

なので

$$\text{Pr}(++) = |\langle++|\uparrow\uparrow\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}, \quad (100)$$

$$\text{Pr}(+-) = |\langle+-|\uparrow\uparrow\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}, \quad \dots \quad (101)$$

– ρ_m の場合：

$$\begin{aligned}\Pr(++) &= \text{Tr}[P_{++}\rho_m] = \langle ++ | \left(\frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\downarrow\rangle \langle\downarrow\downarrow| \right) | ++ \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \dots\end{aligned}\quad (102)$$

– ρ_e の場合：

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

$$\begin{aligned}\frac{|++\rangle + |--\rangle}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ -1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2 \\ 1/2 - 1/2 \\ 1/2 - 1/2 \\ 1/2 + 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\Phi^+\rangle\end{aligned}\quad (104)$$

つまり $|\Phi^+\rangle$ は x 方向の基底でも Bell 状態になっている

$$\rho_e = \left(\frac{|++\rangle + |--\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle ++| + \langle --|}{\sqrt{2}} \right) \quad (105)$$

この場合 $(\uparrow, \downarrow) \leftrightarrow (+, -)$ と読み替えれば z 方向と同じ計算なので、確率は

$$\Pr(++) = \Pr(\uparrow\uparrow) = \frac{1}{2}, \quad \Pr(+-) = \Pr(\uparrow\downarrow) = 0, \quad \dots \quad (106)$$

● 結果のまとめ (表 Ⅲ)

- ρ_p ： z 上向きのみでスピンの揃う、 x 方向は全ての状態がランダム（逆向きも出る）
- ρ_m ： z 上向き、下向き両方でスピンの揃う、 x 方向は全ての状態がランダム（逆向きも出る）
- ρ_e ： z 方向、 x 方向、上向き、下向き全ての場合にスピンの揃う。

● ρ_m と ρ_e の違い：

$$\begin{aligned}\rho_e &= \frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle \langle\downarrow\downarrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\downarrow\rangle \langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\downarrow\rangle \langle\downarrow\downarrow| \\ &= \rho_m + \underbrace{\frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle \langle\downarrow\downarrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\downarrow\rangle \langle\uparrow\uparrow|}_{\text{干渉項}}\end{aligned}\quad (107)$$

ρ_e ：状態 $|\psi\rangle$ の複素数の重みによる **コヒーレント** な重ね合わせ：量子相関

ρ_m ：実数の重みによる ρ の重ね合わせ：古典相関

表 1: 密度行列 ρ_p, ρ_m, ρ_e に対するスピン測定の結果の確率。

密度行列	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\downarrow$	$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$++$	$+-$	$-+$	$--$
ρ_p	1	0	0	0	1/4	1/4	1/4	1/4
ρ_m	1/2	0	0	1/2	1/4	1/4	1/4	1/4
ρ_e	1/2	0	0	1/2	1/2	0	0	1/2

4.3 エンタングルメントと縮約密度行列

- ρ が **テンソル積状態** の純粋状態のとき、 ρ_A は純粋状態

$$\rho = (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)(\langle\psi_1| \otimes \langle\psi_2|) = |\psi_1\rangle \langle\psi_1| \otimes |\psi_2\rangle \langle\psi_2|, \quad (108)$$

$$\rho_A = \text{Tr}_B[\rho] = |\psi_1\rangle \langle\psi_1| \text{Tr}[|\psi_2\rangle \langle\psi_2|] = |\psi_1\rangle \langle\psi_1| \quad (109)$$

$\rho_p = |\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow| = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle \langle\uparrow|$ の場合、式 (65) より

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| \quad (110)$$

- ρ が **エンタングルした状態** の純粋状態のとき、 ρ_A は混合状態

$\rho_e = |\Phi^+\rangle \langle\Phi^+|$ の場合、式 (65) より

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \quad (111)$$

- 線形エントロピーは ρ_A の混合度 μ

$$\mathcal{E} = \mu(\rho_A) = 1 - \text{Tr}[\rho_A^2] \quad (112)$$

問題 3

1*) 式 (88) の混合度が $\mu = 0$ となることを示せ。

2*) 式 (89) の混合度が $\mu = 1/2$ となることを示せ。

5 散乱理論、S 行列、エンタングルメント・パワー

5.1 S 行列と位相差

- **S 行列**：散乱の始状態を終状態に変換する **演算子**

$$|\text{out}\rangle = S |\text{in}\rangle \quad (113)$$

- 散乱は運動量 p と散乱角 θ で特徴付けられる
→ 角度について部分波展開し、軌道角運動量 ℓ ごとに p の関数で散乱を表現
- 以下では基本的に低エネルギーで支配的な s 波散乱 ($\ell = 0$) のみを考える

$$S(p) = e^{2i\delta} \quad (114)$$

散乱位相差 δ ： p の関数、 δ と $\delta + n\pi$ は等価な S 行列

- 微分断面積、散乱振幅

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(p)|^2, \quad f(p) = \frac{1}{p \cot \delta - ip} \quad (115)$$

位相差は散乱の情報を含んでいる

- **散乱長 a** ：低エネルギー極限での散乱を特徴付ける

$$-\frac{1}{a} = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cot \delta] \quad (116)$$

($p \rightarrow 0$ で $\delta \rightarrow 0$ 、散乱長を逆符号で定義する文献もあるので注意)

- 全断面積の低エネルギー極限

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sigma(p) = 4\pi a^2, \quad \sigma(p) = \int d\Omega |f(p)|^2 \quad (117)$$

- a の符号は正負どちらも可能

5.2 散乱長

- ユニタリティ限界：S 行列のユニタリー性から決まる散乱断面積の上限

$$\sigma(p) \leq \frac{4\pi}{p^2} \quad (118)$$

$p \rightarrow 0$ で断面積の上限が無限大になる $\Rightarrow$ 散乱長の大きさ $|a|$ は 0 から無限大まで可能

- $a = 0$ ： $p \rightarrow 0$ で相互作用なし (noninteracting)

- $|a| \rightarrow \infty : p \rightarrow 0$ で相互作用無限大（ユニタリー極限）
- 原子物理のフェッシュバッハ共鳴：散乱長を外部磁場で制御しユニタリー極限が実現可能
- ユニタリー極限近傍では低エネルギー普遍性が発現する [18, 19]
 ← 系の典型的なスケールより大きな散乱長によるスケール不変性
- 例) a が正で大きい場合、浅い束縛状態が存在し、束縛エネルギー B は a のみで決まる

$$B = \frac{1}{2\mu a^2} \quad (119)$$

μ は換算質量

- 非相対論的な系ではスケール不変性は非相対論的共形対称性を導く [3]
- シュレディンガー方程式が持つ最大の対称性（時空並進、回転、ガリレイブースト、スケール変換、共形変換）

5.3 2 スピン系の量子ゲートとエンタングルメント

- 演算子（量子ゲート） U による状態の変化： $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$

$$|\phi\rangle = U |\psi\rangle \quad (120)$$

- 制御 NOT ゲート：スピン A （制御ビット）が $|\downarrow\rangle$ のときのみスピン B （標的ビット）を反転

$$\text{CNOT} = P_{\uparrow} \otimes 1 + P_{\downarrow} \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (121)$$

演算子の作用

$$\text{CNOT} |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad \text{CNOT} |\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (122)$$

$$\text{CNOT} |\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle, \quad \text{CNOT} |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle, \quad (123)$$

$$\text{CNOT} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (124)$$

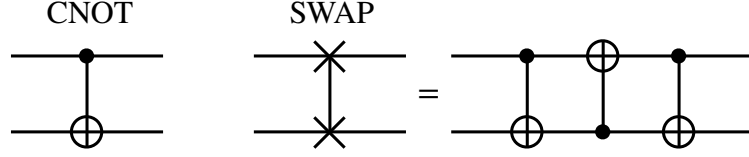


図 2: 2-qubit 系の量子ゲートの回路図。左) 制御 NOT ゲート、右) SWAP ゲート。

- **SWAP ゲート**：スピン A とスピン B を交換

$$\text{SWAP} = \frac{1 + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (125)$$

CNOT を用いても表現できる (図 2)

演算子の作用

$$\text{SWAP} |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad \text{SWAP} |\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle, \quad (126)$$

$$\text{SWAP} |\downarrow\uparrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle, \quad \text{SWAP} |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (127)$$

$$\text{SWAP} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad (128)$$

- **エンタングルメント** の変化

$$\begin{cases} \text{CNOT} |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, & \text{エンタングルメントは0のまま} \\ \text{CNOT} |\xi_0 \uparrow\rangle = |\Phi^+\rangle, & \text{エンタングルメントは0から最大へ} \\ \text{CNOT} |\Phi^+\rangle = |\xi_0 \uparrow\rangle, & \text{エンタングルメントは最大から0へ} \end{cases} \quad (129)$$

エンタングルメントは**量子ゲートによって増減**しうる

作用させる状態によって増減が変わる

5.4 エンタングルメント・パワー

- **エンタングルメント・パワー** (EP) : U がエンタングルメントを**生成**する能力 [4]

$$E(U) = \overline{\mathcal{E}(U | \text{テンソル積状態})} \quad (130)$$

- 始状態がテンソル積状態 :

$$\mathcal{E}(| \text{テンソル積状態} \rangle) = 0, \quad (131)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(U | \text{テンソル積状態}) = U \text{ が生成したエンタングルメント} \quad (132)$$

- 可能な全ての始状態について**平均化**：**状態に依存しない** EP の定義
- スピン A 、スピン B をブロッホ球表示

$$\begin{aligned}
|\theta_A, \phi_A\rangle \otimes |\theta_B, \phi_B\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_A}{2} \\ \sin \frac{\theta_A}{2} e^{i\phi_A} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_B}{2} \\ \sin \frac{\theta_B}{2} e^{i\phi_B} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} \\ \cos \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} e^{i\phi_B} \\ \sin \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} e^{i\phi_A} \\ \sin \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} e^{i(\phi_A + \phi_B)} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{133}$$

スピン A は θ_A, ϕ_A で決まる向き、スピン B は θ_B, ϕ_B で決まる向き

- θ, ϕ は全立体角を覆う：

$$\int d\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \tag{134}$$

- EP の具体形

$$E(U) = \int \frac{d\Omega_A}{4\pi} \int \frac{d\Omega_B}{4\pi} \mathcal{E}(U |\theta_A, \phi_A\rangle \otimes |\theta_B, \phi_B\rangle) \tag{135}$$

$$= 1 - \int \frac{d\Omega_A}{4\pi} \int \frac{d\Omega_B}{4\pi} \text{Tr}_A [\rho_A^2], \tag{136}$$

$$\rho_A = \text{Tr}_B [U(|\theta_A, \phi_A\rangle \otimes |\theta_B, \phi_B\rangle)(\langle\theta_A, \phi_A| \otimes \langle\theta_B, \phi_B|)U^\dagger] \tag{137}$$

- EP は U のみに依存： U が S 行列で位相差 δ を含む場合、EP は δ の関数となる

問題 4

- 1*) $\sigma_A \cdot \sigma_B$ をクロネッカー積であらわし式 (125) を示せ。
- 2*) $\sigma_A \cdot \sigma_B |\Psi^-\rangle = -3 |\Psi^-\rangle$ 、 $\sigma_A \cdot \sigma_B |\Psi^+\rangle = +1 |\Psi^+\rangle$ を示せ。
- 3*) 式 (129) を示せ。

6 核力とエンタングルメント抑制

6.1 2核子系の波動関数

- 2核子系の対称性

- 空間回転対称性 $O(3) \leftarrow$ QCD のローレンツ対称性
- スピン $SU(2)_S \leftarrow$ QCD のスピン対称性とローレンツ対称性
- アイソスピン $SU(2)_I \leftarrow$ QCD (u, d クォーク) のアイソスピン対称性

それぞれ独立な変換 $\rightarrow$ 核子は $SU(2)_S \times SU(2)_I$ 対称性に従う

- 2核子系

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad (138)$$

全スピン S は 0 または 1、全アイソスピン I も 0 または 1

- 2核子状態：

$$|NN\rangle = |\phi_\ell(\mathbf{r})\rangle \otimes |\text{Spin}\rangle \otimes |\text{Isospin}\rangle, \quad (139)$$

$|\phi_\ell(\mathbf{r})\rangle$: 相対座標 $\mathbf{r}$ の空間波動関数：軌道角運動量 ℓ で指定,

$|\text{Spin}\rangle$: 2核子のスピン波動関数： $|S, S_z\rangle = |0, 0\rangle, |1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$,

$|\text{Isospin}\rangle$: 2核子のアイソスピン波動関数： $|I, I_z\rangle = |0, 0\rangle, |1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$

- Bell 状態との関係

$$|0, 0\rangle = |\Psi^-\rangle, \quad |1, 0\rangle = |\Psi^+\rangle, \quad |1, \pm 1\rangle = \frac{|\Phi^+\rangle \pm |\Phi^-\rangle}{\sqrt{2}} \quad (140)$$

- 空間座標交換演算子 P_r : 核子を交換 ($\mathbf{r}_A \leftrightarrow \mathbf{r}_B$) すると相対座標は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B \rightarrow -\mathbf{r}$
球面調和関数の性質より

$$P_r \phi_\ell(\mathbf{r}) = \phi_\ell(-\mathbf{r}) = (-1)^\ell \phi_\ell(\mathbf{r}) \quad (141)$$

s 波 ($\ell = 0$) など ℓ が偶数のとき空間波動関数は対称、奇数のとき反対称

- 2つのスピン演算子の内積の固有値

$$\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B |0, 0\rangle = -3 |0, 0\rangle, \quad \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B |1, S_z\rangle = +1 |1, S_z\rangle \quad (142)$$

表 2: s 波 2 核子状態のスピンとアイソスピン。

軌道角運動量	スピン	アイソスピン
$\ell = 0$ (対称)	$S = 0$ (反対称) $S = 1$ (対称)	$I = 1$ (対称) $I = 0$ (反対称)

- スピン交換演算子

$$P_\sigma = \frac{1 + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B}{2}, \quad (143)$$

$$P_\sigma |0, 0\rangle = -|0, 0\rangle, \quad P_\sigma |1, S_z\rangle = +|1, S_z\rangle \quad (144)$$

これは核子 A 、 B のスピンの入れ替えに対する対称性を表している
 $S = 0$ は入れ替えに対して**反対称**、 $S = 1$ は**対称**

- アイソスピン交換演算子

$$P_\tau |0, 0\rangle = -|0, 0\rangle, \quad P_\tau |1, I_z\rangle = +|1, I_z\rangle \quad (145)$$

$I = 0$ は入れ替えに対して**反対称**、 $I = 1$ は**対称**

- 核子はフェルミオン：粒子の交換（全ての自由度の入れ替え）に対して全波動関数は**反対称**

$$P_r P_\sigma P_\tau |NN\rangle = -|NN\rangle \quad (146)$$

条件を満たす状態（表 2）：スピン S を決めればアイソスピン I は自動的に指定される

- s 波の低エネルギー散乱は**2つの成分**のみで記述できる

– スピン $S = 0$ 、アイソスピン $I = 1$ (1S_0)

– スピン $S = 1$ 、アイソスピン $I = 0$ (3S_1)

ただし $SU(2)_S \times SU(2)_I$ 対称性のもとでは **$S = 0$ と $S = 1$ の散乱は独立**でよい

6.2 創発する対称性

- 現実の核力の散乱長 a_S [18]

$$a_0 \approx -23.76 \text{ fm}, \quad a_1 \approx 5.42 \text{ fm} \quad (147)$$

- ハドロン物理の典型的長さスケール

$$1/m_\pi \approx 1.43 \text{ fm} \quad (148)$$

π 中間子交換（最も長距離のハドロン間力）の到達距離

- 散乱長が典型的長さスケールより大きくユニタリー極限に近い
⇒ 非相対論的共形対称性 [3]

$$|a_0| \gg 1/m_\pi, \quad |a_1| \gg 1/m_\pi \quad (149)$$

- $S = 0$ と $S = 1$ 両方がユニタリー極限に近い

$$1/|a_0| \sim 1/|a_1| \ll m_\pi \quad (150)$$

$S = 0$ と $S = 1$ の性質が類似

⇒ スピン・フレーバー SU(4) 対称性 [11, 12]

$$\{|p \uparrow\rangle, |p \downarrow\rangle, |n \uparrow\rangle, |n \downarrow\rangle\} \quad (151)$$

- 基礎理論の対称性からは直接導けない：創発する対称性 (emergent symmetry)

6.3 2核子系のエンタングルメント抑制

- 全スピン S の状態への射影演算子 $\mathcal{J}_S$

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1 - \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B}{4}, \quad \mathcal{J}_1 = \frac{3 + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B}{4} \quad (152)$$

- pn 散乱：アイソスピンは $I = 0$ または $I = 1$

$$S = e^{2i\delta_0} \mathcal{J}_0 + e^{2i\delta_1} \mathcal{J}_1 \quad (153)$$

δ_S は全スピン S の散乱位相差

- pn 散乱の EP [5]

$$E(S) = \frac{1}{6} \sin^2[2(\delta_0 - \delta_1)] \geq 0 \quad (154)$$

- 最小値 $E(S) = 0$ は $\sin[2(\delta_0 - \delta_1)] = 0$ のとき

- 解 1 : $|\delta_0 - \delta_1| = 0$
- 解 2 : $|\delta_0 - \delta_1| = \pi/2$

- 解1：スピン0と1が同じ位相差、つまり同じ散乱が起きる

⇒ **スピン・フレーバー SU(4) 対称性**

- 解2が低エネルギー極限 ($p \rightarrow 0$) で成立する場合、散乱長は

$$-\frac{1}{a_0} = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cot \delta_0], \quad -\frac{1}{a_1} = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cot \delta_1] \quad (155)$$

$\delta_1 = \delta_0 + \pi/2$ として辺々かける：

$$\frac{1}{a_0} \frac{1}{a_1} = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cot \delta_0 \cdot p \cot(\delta_0 + \pi/2)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p^2 \cot \delta_0 (-\tan \delta_0)] = -\lim_{p \rightarrow 0} p^2 = 0 \quad (156)$$

$1/a_0$ または $1/a_1$ のどちらかが0：どちらかのチャンネルの**散乱長が発散**

⇒ **非相対論的共形対称性 (シュレディンガー対称性)**

6.4 量子ゲートによる解釈

- S 行列を量子ゲートとみなす解釈 [6]

- 解1のS行列： $\delta_1 = \delta_0$ とすると

$$S = e^{2i\delta_0} \mathcal{J}_0 + e^{2i\delta_0} \mathcal{J}_1 = e^{2i\delta_0} (\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1) \quad (157)$$

射影演算子の和に比例

- 解2のS行列： $\delta_1 = \delta_0 + \pi/2$ とすると

$$S = e^{2i\delta_0} \mathcal{J}_0 + e^{2i(\delta_0 + \pi/2)} \mathcal{J}_1 = e^{2i\delta_0} \mathcal{J}_0 + e^{2i\delta_0} \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} \mathcal{J}_1 = -e^{2i\delta_0} (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_0) \quad (158)$$

射影演算子の差に比例

- 射影演算子 (152) を用いると

$$\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1 = \frac{1 - \sigma_A \cdot \sigma_B}{4} + = \frac{3 + \sigma_A \cdot \sigma_B}{4} = 1 \quad (159)$$

$$\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_0 = \frac{3 + \sigma_A \cdot \sigma_B}{4} - \frac{1 - \sigma_A \cdot \sigma_B}{4} = \frac{1 + \sigma_A \cdot \sigma_B}{2} = \text{SWAP} \quad (160)$$

解1はS行列がスピン空間で **Identity ゲート** (恒等演算子)

解2はS行列がスピン空間で **SWAP ゲート** (スピン交換演算子)

- Identity、SWAP は**テンソル積状態をテンソル積状態に射影**する

$$1 |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (161)$$

$$\text{SWAP } |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = |\psi_B\rangle \otimes |\psi_A\rangle \quad (162)$$

作用後もテンソル積なので EE が $0 \rightarrow \text{EP}$ が 0

- $E(S) = 0$ を与えるのは **Identity と SWAP のみ**

← $\text{SU}(4)/(\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))$ のカルタン分解 [6]

7 一般のスピン、フレーバーへの拡張

7.1 ハドロンのスピンとフレーバー

- QCD の **フレーバー対称性**

- $|u\rangle, |d\rangle$: フレーバー (アイソスピン) $SU(2)$
- $|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle$: フレーバー $SU(3)$

$\Rightarrow$ ハドロンはフレーバー $SU(2)$ および $SU(3)$ 対称性に従う

- フレーバー対称性は近似的対称性 ($p \sim uud, n \sim udd, \Lambda \sim uds$)

$$m_p = 938 \text{ MeV}, \quad m_n = 940 \text{ MeV}, \quad m_\Lambda = 1116 \text{ MeV} \quad (163)$$

$SU(2)$: 数%, $SU(3)$: $\sim 20\%$ の精度で成立

- バリオン (3 クォーク状態) の波動関数

$$|qqq\rangle = |\phi_\ell(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda})\rangle \otimes |\text{Spin}\rangle \otimes |\text{Flavor}\rangle \otimes |\text{Color}\rangle \quad (164)$$

空間波動関数 $|\phi_\ell(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda})\rangle$: ヤコビ座標 $\{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}\}$ と全軌道角運動量 ℓ で指定
スピン波動関数 $|\text{Spin}\rangle$

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \quad (165)$$

フレーバー波動関数 $|\text{Flavor}\rangle$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \quad (166)$$

カラー波動関数 $|\text{Color}\rangle$: 完全反対称である $\mathbf{1}$ (カラーの閉じ込め)

- 基底状態 $\ell = 0$ で $|qqq\rangle$ を完全反対称にするには (図 3)

$$|\text{Spin}\rangle \otimes |\text{Flavor}\rangle = \begin{cases} |S = 1/2\rangle \otimes |\mathbf{8}\rangle & \text{スピン } 1/2 \text{ の } \mathbf{8} \text{ 重項バリオン} \\ |S = 3/2\rangle \otimes |\mathbf{10}\rangle & \text{スピン } 3/2 \text{ の } \mathbf{10} \text{ 重項バリオン} \end{cases} \quad (167)$$

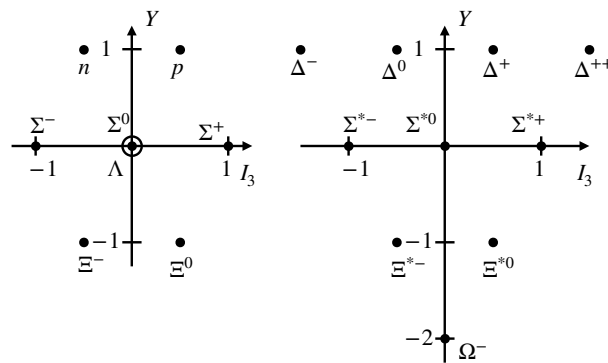


図 3: 基底状態のバリオンのウェイト図。左：バリオン 8 重項、右：バリオン 10 重項。

7.2 8重項バリオンの散乱

- 8重項バリオン2体系のスピンとフレーバー

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \underbrace{0}_A \oplus \underbrace{1}_S \quad (168)$$

$$8 \otimes 8 = \underbrace{1 \oplus 8_S \oplus 27}_S \oplus \underbrace{8_A \oplus 10 \oplus \overline{10}}_A \quad (169)$$

s 波ではスピン A フレーバー S またはスピン S フレーバー A の組み合わせのみ

- S 行列：独立な散乱は **6 成分**

$$S = \mathcal{J}_0(\mathcal{F}_1 e^{2i\delta_{0,1}} + \mathcal{F}_{8_S} e^{2i\delta_{0,8_S}} + \mathcal{F}_{27} e^{2i\delta_{0,27}}) \\ + \mathcal{J}_1(\mathcal{F}_{8_A} e^{2i\delta_{1,8_A}} + \mathcal{F}_{10} e^{2i\delta_{1,10}} + \mathcal{F}_{\overline{10}} e^{2i\delta_{1,\overline{10}}}) \quad (170)$$

$\mathcal{J}_i$ は (152) のスピン i への射影、 $\mathcal{F}_R$ はフレーバー R への射影

- 電荷 Q 、ストレンジネス S の保存：2体系の (Q, S) で決まるセクターごとに散乱
例) $(Q, S) = (+1, 0)$: pn 散乱、 $\delta_{0,27}$ (1S_0) と $\delta_{1,\overline{10}}$ (3S_1) を含む $\rightarrow$ 核力の場合の結果
- 最も多くのチャンネルを含むセクター： $(Q, S) = (0, -2)$

$$\Sigma^+ \Sigma^-, \Sigma^0 \Sigma^0, \Lambda \Sigma^0, \Xi^- p, \Xi^0 n, \Lambda \Lambda \quad (171)$$

エンタングルメント抑制の帰結 [4]

$$S \propto 1 \quad \text{スピン・フレーバー SU(16) 対称性} \quad (172)$$

$$S \propto \text{SWAP} \quad \text{フレーバー SU(8) かつ非相対論的共形対称性} \quad (173)$$

フレーバー自由度が増えたため対称性が拡大
核力など他のセクターの対称性を部分対称性として含む

$$\text{SU(16)} \supset \text{SU(4)} \quad (174)$$

- スピン・フレーバー SU(16) 対称性：バリオンの対称性 ($16 = 8 \times 2$)

$$\{|p \uparrow\rangle, |p \downarrow\rangle, |n \uparrow\rangle, |n \downarrow\rangle, |\Lambda \uparrow\rangle, |\Lambda \downarrow\rangle, \dots\} \quad (175)$$

c.f.) large N_c 極限ではスピン・フレーバー SU(6)：クォークの対称性 ($6 = 3 \times 2$)

$$\{|u \uparrow\rangle, |u \downarrow\rangle, |d \uparrow\rangle, |d \downarrow\rangle, |s \uparrow\rangle, |s \downarrow\rangle\} \quad (176)$$

$\Rightarrow$ エンタングルメント抑制は large N_c より強い条件を与える [5]

格子 QCD は SU(16) 対称性を示唆する結果 [20]

- 2 フレーバーの場合、クォーク $\{u, d\}$ もバリオン $\{p, n\}$ もどちらも基本表現
 $\Rightarrow$ スピン・フレーバー対称性はクォークでもバリオンでも SU(4)

7.3 スピン3/2状態

- スピン3/2状態（4成分量子ビット、4d-qudit）：複素4成分ベクトル

$$|\psi_4\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (177)$$

条件がなければ **8 自由度** ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$)

規格化条件、位相の自由度により、 $|\psi_4\rangle$ は **6 自由度** で表現できる

- $\mathbb{C}^4$ の斜線 $\sim \mathbb{CP}^3$ の Fubini-Study measure

$$|\psi_4\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 e^{i\nu_1} \\ \cos \theta_2 \sin \theta_3 e^{i\nu_2} \\ \cos \theta_3 e^{i\nu_3} \end{pmatrix}, \quad d\omega_4 = \frac{3!}{\pi^3} \prod_{i=1}^3 d\theta_i d\nu_i \cos \theta_i \sin^{2i-1} \theta_i, \quad \int d\omega_4 = 1 \quad (178)$$

6 自由度 $\theta_i, \nu_i, (i = 1, 2, 3)$

- スピン演算子 s ：複素4成分行列

$$s_x = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ i\sqrt{3}/2 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (179)$$

$$s_z = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \quad (180)$$

- s_z の固有状態

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (181)$$

$$s_z |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{3}{2} |\uparrow\uparrow\rangle, \quad s_z |\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle, \quad s_z |\downarrow\uparrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\uparrow\rangle, \quad s_z |\downarrow\downarrow\rangle = -\frac{3}{2} |\downarrow\downarrow\rangle \quad (182)$$

7.4 10 重項バリオンの散乱

- 10 重項バリオン 2 体系のスピンのフレバー

$$\frac{3}{2} \otimes \frac{3}{2} = \underbrace{0 \oplus 2}_A \oplus \underbrace{1 \oplus 3}_S \quad (183)$$

$$10 \otimes 10 = \underbrace{27 \oplus 28}_S \oplus \underbrace{\overline{10} \oplus 35}_A \quad (184)$$

s 波ではスピン A フレバー S またはスピン S フレバー A の組み合わせのみ

- S 行列：独立な散乱は **8 成分**

$$S = \mathcal{J}_0(\mathcal{F}_{27}e^{2i\delta_{0,27}} + \mathcal{F}_{28}e^{2i\delta_{0,28}}) + \mathcal{J}_1(\mathcal{F}_{\overline{10}}e^{2i\delta_{1,\overline{10}}} + \mathcal{F}_{35}e^{2i\delta_{1,35}}) \\ + \mathcal{J}_2(\mathcal{F}_{27}e^{2i\delta_{2,27}} + \mathcal{F}_{28}e^{2i\delta_{2,28}}) + \mathcal{J}_3(\mathcal{F}_{\overline{10}}e^{2i\delta_{3,\overline{10}}} + \mathcal{F}_{35}e^{2i\delta_{3,35}}) \quad (185)$$

- スピン 3/2 の射影演算子：2 次のカシミアの線形結合

$$\mathcal{J}_0 = \frac{33}{128} + \frac{31}{96}(\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B) - \frac{5}{72}(\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B)^2 - \frac{1}{18}(\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B)^3, \quad \dots \quad (186)$$

- 電荷 Q 、ストレンジネス S の保存：2 体系の (Q, S) で決まるセクターごとに散乱
- 最も多くのチャンネルを含むセクター： $(Q, S) = (0, -2)$ (他に 5 セクター)

$$\Delta^+\Xi^{*-}, \Delta^0\Xi^{*0}, \Sigma^{*0}\Sigma^{*0}, \Sigma^{*+}\Sigma^{*-} \quad (187)$$

エンタングルメント抑制 [100]

$$S \propto 1 \quad \text{スピン・フレバー SU(40)} \quad (188)$$

$$S \propto \text{SWAP} \quad \text{スピン SU(4) かつ フレバー SU(10) かつ 非相対論的共形対称性} \quad (189)$$

スピンおよびフレバー自由度が増えたため対称性が拡大

- 現象論的な応用： $(Q, S) = (-2, -6)$ の $\Omega\Omega$ 散乱
フレバー自由度がない同種粒子系：反対称のスピン $S = 0$ と $S = 2$ のみ
- 格子 QCD： $S = 0$ はユニタリー極限に近い [21]
- $\Omega\Omega$ 散乱のエンタングルメント抑制 [100] (同種粒子の規格化の必要がある)

$$S \propto 1_A \quad \text{スピン SU(4)} \quad (190)$$

$$S \propto \text{SWAP}_A \quad \text{非相対論的共形対称性} \quad (191)$$

$\Rightarrow$ スピン $S = 2$ はユニタリー極限 ($S \propto 1_A$) または相互作用が弱い ($S \propto \text{SWAP}_A$)

参考文献

- [1] E. Wigner, Phys. Rev. **51**, 106 (1937).
- [2] D. B. Kaplan and M. J. Savage, Phys. Lett. B **365**, 244 (1996), hep-ph/9509371.
- [3] T. Mehen, I. W. Stewart, and M. B. Wise, Phys. Lett. B **474**, 145 (2000), hep-th/9910025.
- [4] P. Zanardi, C. Zalka, and L. Faoro, Phys. Rev. A **62**, 030301 (2000), quant-ph/0005031.
- [5] S. R. Beane, D. B. Kaplan, N. Klco, and M. J. Savage, Phys. Rev. Lett. **122**, 102001 (2019), arXiv:1812.03138 [nucl-th].
- [6] I. Low and T. Mehen, Phys. Rev. D **104**, 074014 (2021), arXiv:2104.10835 [hep-th].
- [7] Q. Liu, I. Low, and T. Mehen, Phys. Rev. C **107**, 025204 (2023), arXiv:2210.12085 [quant-ph].
- [8] T. Kirchner, W. Elkhawy, and H.-W. Hammer, Few Body Syst. **65**, 29 (2024), arXiv:2312.14484 [nucl-th].
- [9] T.-R. Hu, S. Chen, and F.-K. Guo, Phys. Rev. D **110**, 014001 (2024), arXiv:2404.05958 [hep-ph].
- [10] T.-R. Hu, K. Sone, F.-K. Guo, T. Hyodo, and I. Low, (2025), arXiv:2506.08960 [hep-ph], Phys. Rev. Res., in press.
- [11] M. Carena, I. Low, C. E. M. Wagner, and M.-L. Xiao, Phys. Rev. D **109**, L051901 (2024), arXiv:2307.08112 [hep-ph].
- [12] J. Thaler and S. Trifunopoulos, Phys. Rev. D **111**, 056021 (2025), arXiv:2410.23343 [hep-ph].
- [13] M. Carena *et al.*, JHEP **08**, 016 (2025), arXiv:2505.00873 [hep-ph].
- [14] J. Liu, M. Tanaka, X.-P. Wang, J.-J. Zhang, and Z. Zheng, (2025), arXiv:2505.06001 [hep-ph].
- [15] I. Chernyshev, C. E. P. Robin, and M. J. Savage, Phys. Rev. Res. **7**, 023228 (2025), arXiv:2411.04203 [quant-ph].
- [16] S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997), quant-ph/9703041.
- [17] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998), quant-ph/9709029.
- [18] E. Braaten and H.-W. Hammer, Phys. Rept. **428**, 259 (2006), cond-mat/0410417.
- [19] P. Naidon and S. Endo, Rept. Prog. Phys. **80**, 056001 (2017), arXiv:1610.09805 [quant-ph].
- [20] M. L. Wagman *et al.*, Phys. Rev. D **96**, 114510 (2017), arXiv:1706.06550 [hep-lat].
- [21] S. Gongyo *et al.*, Phys. Rev. Lett. **120**, 212001 (2018), arXiv:1709.00654 [hep-lat].