

4b. 波束の理論と定常散乱波の理論

定常散乱波の理論に対する心理的抵抗

漸近領域における散乱波動関数

$$\Psi_{\mathbf{K}}^{(+)}(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + f_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{R}}') \frac{e^{iKR}}{R}$$

入射波数ベクトル

この波動関数は

- ・ 時間依存性が切り離されている。
- ・ 無限に広がった入射平面波が扱われている。

という点で、**実験条件(および直観的な描像)と合致しない。**

今回の目的

直観と合致する**波束の理論**と定常散乱波の理論
がどのような関係にあるのかを明らかにする。

波束状態

反応の初期状態(初期波束):

$$\Phi(t_0) = G(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}}$$

波束中心

波束の運動量(波数)

$$t_0 = -|\mathbf{Z}_0| \frac{\mu}{\hbar K_0} \quad (\leftarrow \text{初期時刻の定義})$$

換算質量

G はエンベロープ関数で、波束の形状を表す。ここではその具体形は問わない。

任意の時刻における波束状態:

$$\Phi(t) = e^{-iH/\hbar(t-t_0)} G(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}}$$

系のハミルトニアン

3つのスケール

反応領域の大きさ

fm のスケール。換算ド・ブロイ波長 $1/K_0$ に相当。

※波数 K_0 の波は位置変化 $\Delta x/K_0$ を位相変化 1 として“検出”する。

波束の広がり

典型的には cm のスケール。長さ w_0 として表現する。このとき
運動量(波数)は幅 $1/w_0$ ($\sim 10^{-13}$ 1/fm)に集中している。

漸近領域の距離

典型的には m のスケール。粒子を撃ち込んだり検出器で測定したりする領域。波動関数の漸近形が利用できる。 $|Z_0|$ に相当。

$$\frac{1}{K_0} \ll w_0 \ll |Z_0|$$

初期波束のフーリエ展開

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}} \Phi(t_0) d\mathbf{R} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}} G(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{R} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{R} \\ &= e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0)\cdot(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0)} d\mathbf{R} \\ &= \boxed{a(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0)} e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0}\end{aligned}$$

G のフーリエ変換 ($\sim 1/w_0$ の極めて狭い幅に分布)

逆変換:

$$\Phi(t_0) = \int a(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{P}$$

初期波束は $\mathbf{P} \sim \mathbf{K}_0$ に集中

初期波束の定常波動関数による表現

$$\boxed{\Phi(t_0)} = \int a(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{P}$$

$\mathbf{R} \sim \mathbf{Z}_0$ に局在

$$\Psi_{\mathbf{K}}^{(+)}(\mathbf{R}) = \boxed{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}} + f_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{R}}') \boxed{\frac{e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}}{R}}$$

運動量 \mathbf{K}

$\mathbf{R} \sim \mathbf{Z}_0$ で運動量 $\sim -\mathbf{K}$



$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\Psi_{\mathbf{K}}^{(+)}(\mathbf{R}), \Phi(t_0) \right) &\approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \Phi(t_0) d\mathbf{R} \\ &= a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} \end{aligned}$$



逆変換

$$\Phi(t_0) \approx \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} \Psi_{\mathbf{K}}^{(+)}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

測定がなされる時刻での波束と定常波動関数

$$\Phi(t) = e^{-(iH/\hbar)(t-t_0)} G(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} = e^{-(iH/\hbar)(t-t_0)} \Phi(t_0)$$

$$\Phi(t_0) \approx \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} \Psi_{\mathbf{K}}^{(+)}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

↓ $\Psi_{\mathbf{K}}^{(+)}$ は H の固有状態(固有値 E)

$$\Phi(t) \approx \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE/\hbar)(t-t_0)} \Psi_{\mathbf{K}}^{(+)}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

幅 $\sim 1/w_0$

↓ 測定領域では漸近系が利用可

$$\Phi(t) \rightarrow \int \boxed{a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0)} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE/\hbar)(t-t_0)} \times \left[e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} + f_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{R}}') \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{R} \right] d\mathbf{K} \equiv \Phi_{\text{asym}}(t)$$

方針: $q \equiv \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$ とし、 E と K を q の1次までで評価する。

定常散乱波の波数・エネルギー

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 \quad \sim 10^{-11} \text{ MeV}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} K^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu} (\mathbf{K}_0 + \mathbf{q})^2 \sim \frac{\hbar^2}{2\mu} K_0^2 + \frac{\hbar^2}{\mu} (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{q}) = E_0 + \hbar (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{q})$$

$$K^2 \sim K_0^2 + 2(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{q}) \rightarrow K \sim \sqrt{K_0^2 + 2(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{q})} \sim K_0 + (\hat{\mathbf{K}}_0 \cdot \mathbf{q})$$

 積分変数を \mathbf{K} から \mathbf{q} に変更

$$\Phi_{\text{asym}}(t) \approx \int a(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{q})(t-t_0)} \\ \times \left[e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{R}} + f_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{R}}') \frac{e^{iK_0 R} e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0 \cdot \mathbf{q})R}}{R} \right] d\mathbf{q}$$

波束の平面波成分

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{asym}}^{\text{PW}}(t) &\equiv \int a(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{q})(t-t_0)} e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{q} \\ &= e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} e^{-|\mathbf{Z}_0| \frac{\mu}{\hbar K_0}} \\ &\quad \times \int a(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{q})t} e^{i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{q})t_0} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{q} \\ &= e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \int a(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{q})t} d\mathbf{q}\end{aligned}$$

Trivialな時間依存性 $= G(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t)$

$$= e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} G(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t)$$

中心が速度 \mathbf{v}_0 で運動する波束
(入射波束の形を保持)

波束の拡散は？

波束の**拡散**を扱うには、 **q** の高次項が必要。ただし今の場合、その効果は無視して良い。

1次元の自由ガウス波束の**確率分布幅**(時間変化):

$$w(t) = w_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{\mu^2 w_0^4}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{(\hbar c)^2 (ct)^2}{(\mu c^2)^2 w_0^4}}$$

($\hbar c \sim 200$ [MeV · fm], $ct \sim 10^{15}$ fm, $\mu c^2 \sim 10^3$ MeV, $w_0 \sim 10^{13}$ fm)

検出器の距離

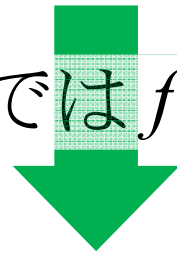


$$\frac{w(t)}{w_0} \sim \sqrt{1 + \frac{4 \times 10^4 \times 10^{15 \times 2}}{10^6 \times 10^{13 \times 4}}} \sim \sqrt{1 + 4 \times 10^{-14}}$$

波束の散乱波成分

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) &\equiv \int a(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{q})(t-t_0)} \\ &\quad \times f_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{R}}') \frac{e^{iK_0 R} e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0\cdot\mathbf{q})R}}{R} d\mathbf{q} \\ &= e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{e^{iK_0 R}}{R} \int a(\mathbf{q}) f_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{R}}') e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0\cdot\mathbf{q})(R-v_0 t)} d\mathbf{q}\end{aligned}$$

積分に關与する \mathbf{q} の範囲内では f の \mathbf{K} 依存性は無視できる。



$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) \approx \boxed{e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)}} f_{\mathbf{K}_0}(\hat{\mathbf{R}}') \frac{e^{iK_0 R}}{R} \boxed{G(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - v_0 t])}$$

Trivialな時間依存性

中心が速さ v_0 で動径
外向きに運動する波束

エンベロープ関数の性質(平面波成分)

$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{PW}}(t) = e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} G(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t)$$

- 中心は速度 v_0 で z 軸方向に運動。
- **cm 程度の拡がり**を持つので、散乱領域付近では、 G の X, Y 依存性は無視して良い(正確には X, Y 方向の拡がり Z 方向の拡がりよりも狭いが、それでも巨視的なスケール)。
- 散乱領域の**単位面積あたりに流れ込む確率の総量**は、 $X = Y = 0$ として、 G の Z 分布の積分を取ることで求まる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\hat{\mathbf{K}}_0 Z)|^2 dZ \equiv \mathfrak{F}$$

エンベロープ関数の性質(散乱波成分)

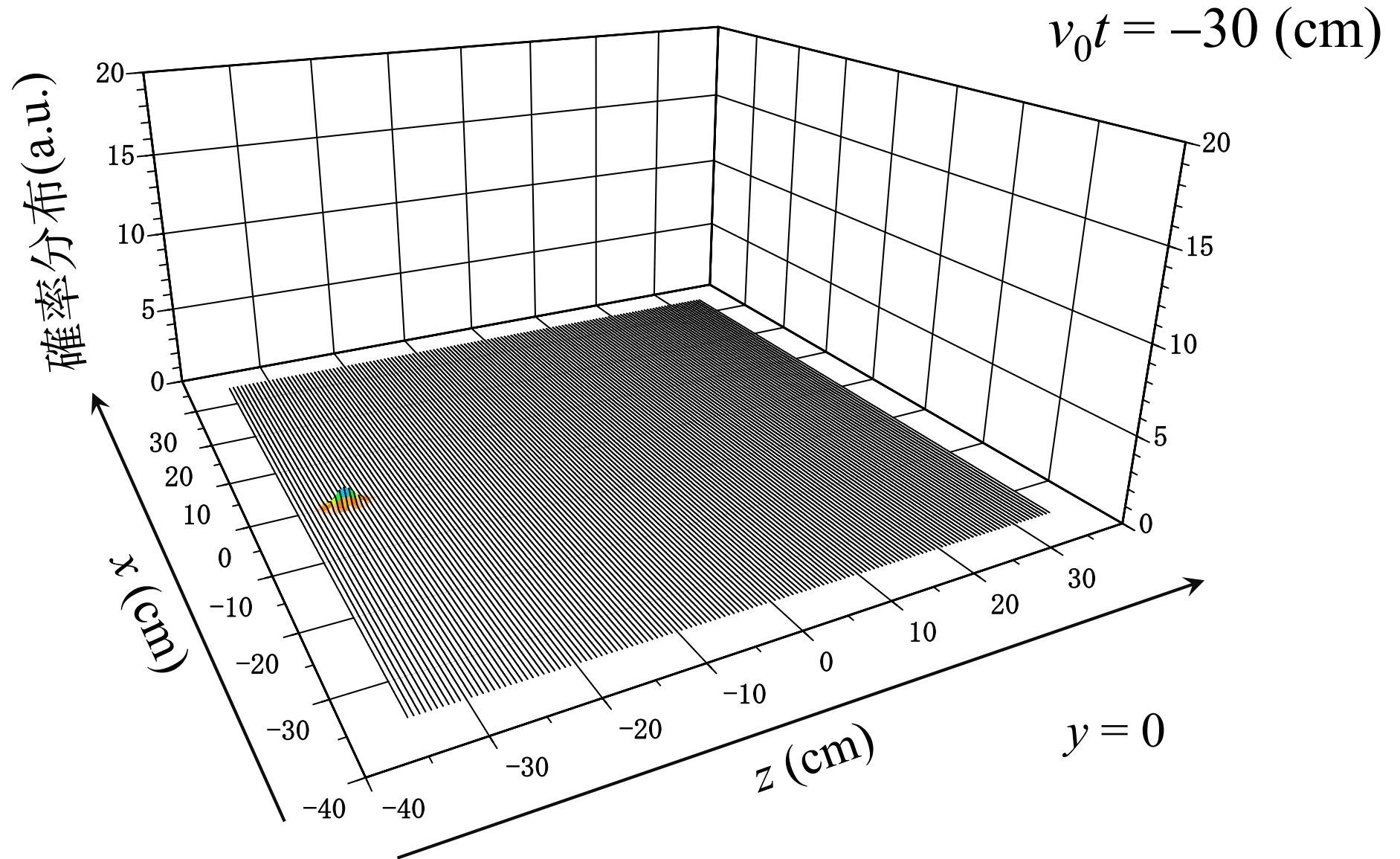
$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) \approx e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} f_{\mathbf{K}_0}(\hat{\mathbf{R}}') \frac{e^{iK_0 R}}{R} G(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - v_0 t])$$

- 中心は速さ v_0 で動径外向きに運動。
- 動径方向についての分布は初期波束の Z 方向の分布と同じ。
- 巨視的なスケールで考えると $R \sim v_0 t$ であり、 $R > 0$ であるから、 t は正であることが示唆される。すなわち散乱波成分は $t \sim 0$ で発生したとみなせる(因果律)。
- $\hat{\mathbf{R}}'$ 方向に出ていく確率の総量は、十分時間が経ったところで求めた G の R 分布の積分と、散乱振幅の絶対値自乗の積:

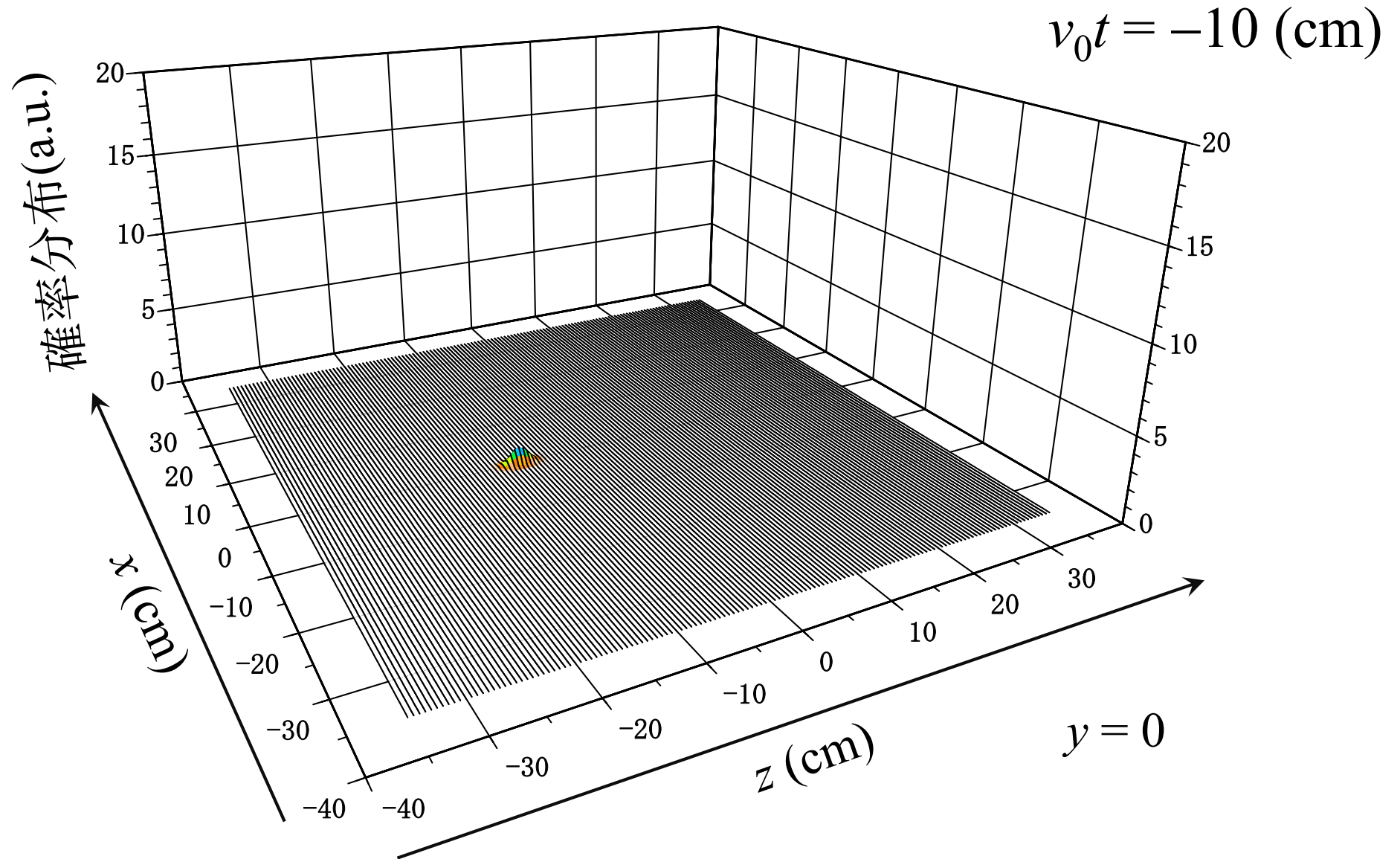
$$\left| f_{\mathbf{K}_0}(\hat{\mathbf{R}}') \right|^2 \int_0^\infty \left| G(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - R_0]) \right|^2 dR \approx \left| f_{\mathbf{K}_0}(\hat{\mathbf{R}}') \right|^2 \mathfrak{F}$$

巨視的な距離

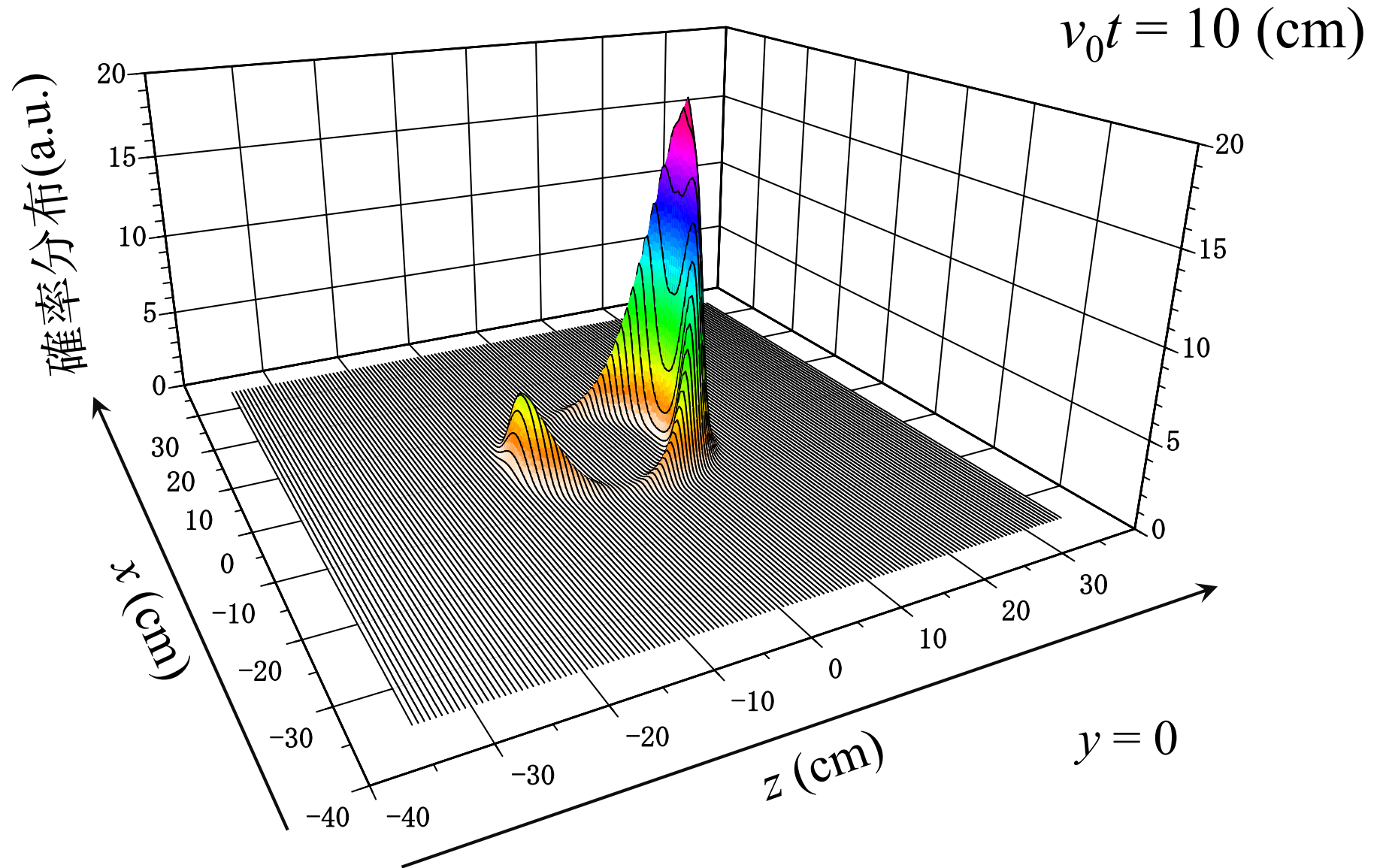
波束の伝播の様子



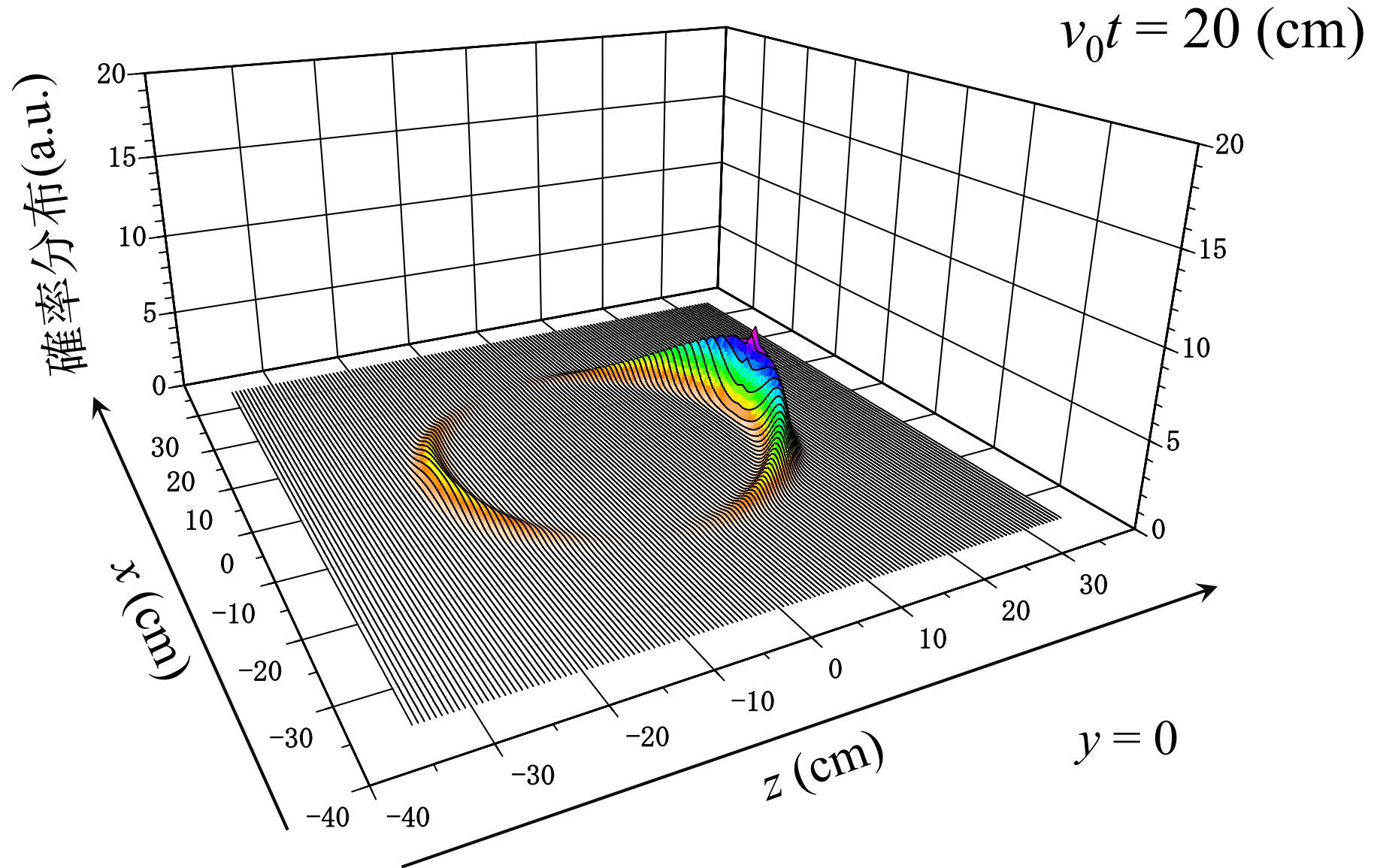
波束の伝播の様子



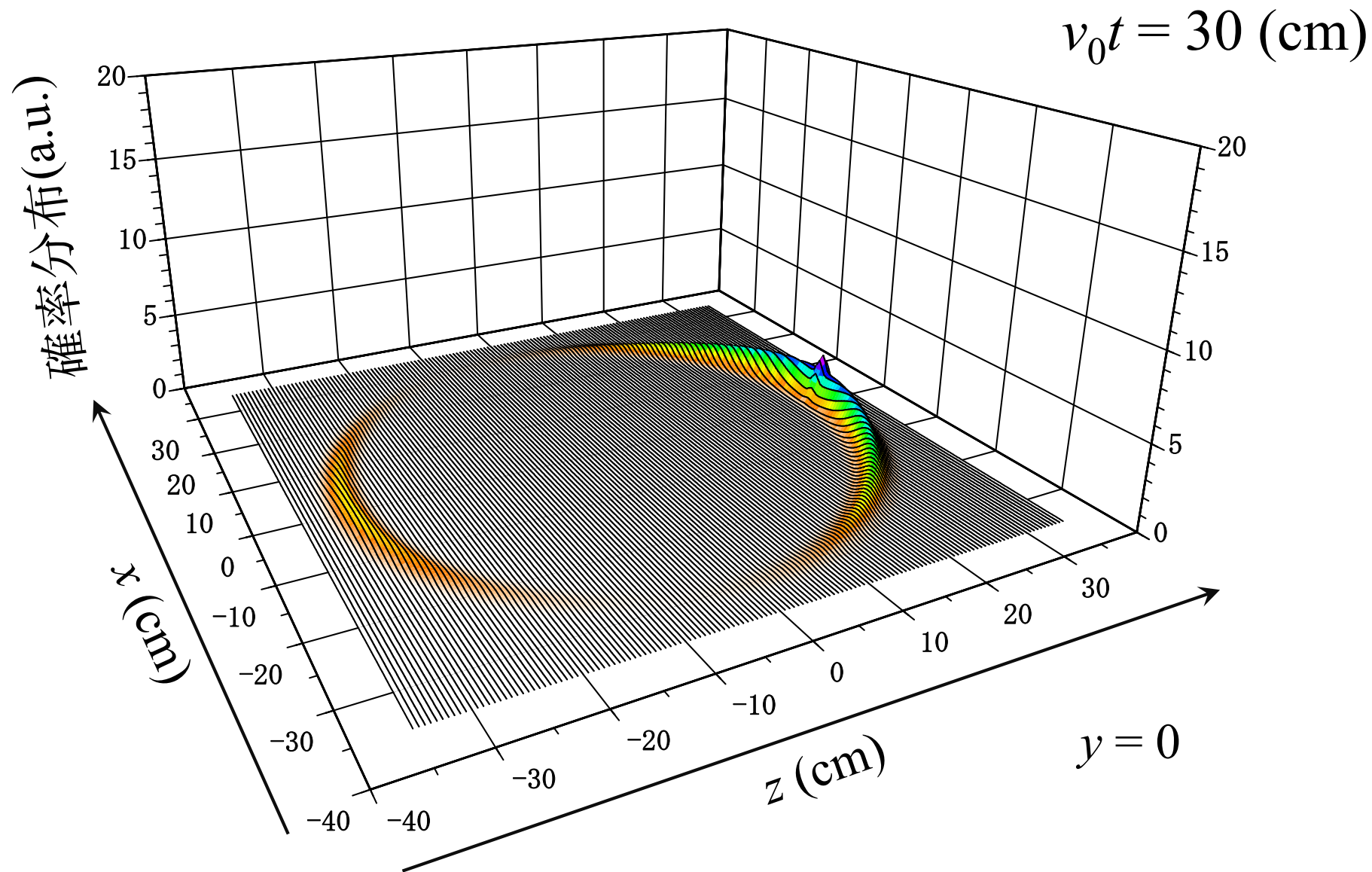
波束の伝播の様子



波束の伝播の様子



波束の伝播の様子



微分断面積

散乱領域の単位面積あたりに流れ込む確率の総量:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\hat{\mathbf{K}}_0 Z)|^2 dZ \equiv \mathfrak{F}$$

$\hat{\mathbf{R}}'$ 方向に出ていく確率の総量:

$$\int_0^{\infty} |f_{\mathbf{K}_0}(\hat{\mathbf{R}}') G(\hat{\mathbf{K}}_0 R)|^2 dR \approx |f_{\mathbf{K}_0}(\hat{\mathbf{R}}')|^2 \mathfrak{F}$$



微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{K}_0}(\hat{\mathbf{R}}')|^2$$

定常散乱波の理論の結論と完全に一致!

波束の理論と定常散乱波の理論のまとめ

- 現実の実験条件や直観的描像と合致する波束の理論と、これまでに学んだ定常散乱波の理論との関係を議論した。
- 運動量に(非常に狭い)幅を持たせる事によって、散乱現象を、直観と合致する波束の運動として描くことができる。
- そのようにして求めた微分断面積の表式は、定常散乱波の理論の結論と完全に一致する。これは本質的には、散乱領域の大きさと比べ、波束の拡がりが無限に大きいと見なせるからである。

※より詳しい議論については、以下を参照(ただしAusternは絶版)。

N. Austern, “Direct Nuclear Reaction Theories” (John Wiley & Sons) [Chap. 1]

笹川辰弥『散乱理論 (物理学選書20)』(裳華房) [第2章]

M. L. Goldberger and K. M. Watson, “Collision Theory” (Dover) [Chap. 3]