

模型空間における 3 体反応の理論

緒方 一介

大阪大学 核物理研究センター

3 体系の反応現象は、原子核・ハドロン物理の様々な局面に登場します。本稿では、3 体反応がなぜ難しいかを説明した後、連続状態離散化チャネル結合法 (CDCC) がいかにその困難を克服し、3 体反応の有効理論として確立されたかを中心に解説します。

1 はじめに

今回の講義は

I. 波束の理論と $+i\eta$ の意味 ~ 定常散乱理論の基礎付け ~

II. 3 体反応理論の難点とその克服 ~Faddeev, CDCC, DWIA~

III. 「秩序の崩れをもたらす秩序の理解」に向けた取り組み

という 3 部構成としましたが、紙面の都合上、本稿では II. に絞って解説したいと思います。講義と同様、粒子の内部構造と散乱粒子間のクーロン相互作用は省略し、相互作用としては中心力ポテンシャルのみを考慮します。また、非相対論的量子力学の問題として散乱現象を捉えることにします。なお講義の組み立てならびに本稿の執筆に際し、随所で文献 [1] および [2] を参考にさせていただきました。

2 3 体反応の難しさ: Faddeev 理論が必要な理由

まず 2 体問題から考えましょう。時間に依存しない Schrödinger 方程式を

$$[T + V - E] \Psi = 0 \quad (1)$$

と表すことにします。ただし T は運動エネルギー演算子、 V はポテンシャル、 E は重心系の散乱エネルギーを表します。以下では簡単のため、「重心系での」という表現はできるだけ省略することにします。式 (1) を解くには、境界条件が必須です。ここでは「無限の過去において、2 つの粒子は相互作用を及ぼし合わず、波数 K で指定される平面波状態をとり、それが相互作用 V によって変化し、 V の作用領域の外において平面波 + 外向きの波という形 (漸近形) をもつ」としましょう。そうすると式 (1) の解が定まります。その解は、平面波を ϕ として、

$$\Psi^{(+)} = \phi + \frac{1}{E - T + i\eta} V \Psi^{(+)} \quad (2)$$

と表されます。この式を Lippmann-Schwinger (LS) 方程式とよびます。 Ψ に付与されている上付きの (+) は、外向き波という漸近形をもつことを表しています。これを保証するのが、式 (2) 中の $+i\eta$ です。 η は正の微小量で、計算が終わった後に 0 の極限を取ります (この極限操作は式の上では省略しています)。 $+i\eta$ は、グリーン関数の極の避け方を指定したときに出てくるもので、物理的には、反応粒子を表す 2 つの波束が近づく速さに相当しますが、本稿ではこれ以上立ち入りません。重要な点は、この $+i\eta$ によって、2 体の散乱問題の境界条件が一意に指定されるということです。なお、 ϕ および $\Psi^{(+)}$ は、入射条件を規定する波数 K に依存しますが、簡単のため、表記からは落としています。

では、3体系の反応を考えましょう。3つの粒子に1, 2, 3のラベルを付けた上で、チャンネル番号を設定します。たとえば粒子2と3が束縛状態を形成し、これと粒子1が散乱状態にあるものをチャンネル1とよぶことにします。チャンネル2と3も同様に定義します。3つの粒子がばらばらになっている配位はチャンネル0とよぶことにしましょう。全系のハミルトニアンを

$$H = T + V_{12} + V_{23} + V_{31} \quad (3)$$

とします。 V_{ij} は i と j の間にはたらく相互作用で、 T は3粒子系の運動エネルギー演算子から3体の重心の運動エネルギーを差し引いたものです(2体問題のときと同じ記号 T を用いていますが、誤解のおそれはないかと思えます)。

反応は、上で定義した4つのチャンネルのどれか1つから始まります。それを入射チャンネルとよびます。ここではチャンネル1を入射チャンネルとして選ぶことにしましょう。入射波は $\phi_1 \Phi_{23}$ と書けます。ただし Φ_{23} は2と3の束縛状態の波動関数です。 ϕ_1 は、23の重心と1の間の平面波を表します。付録の式(37)によれば、散乱波は

$$\Psi_{(1)}^{(+)} = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} \phi_1 \Phi_{23} \quad (4)$$

となります。 Ψ の下付きの添字(1)は、入射チャンネルが1であることを表しています。式(4)は正しい式ではありますが、残念ながら、この式を用いて散乱波を具体的に求めることはできません。式中の $+i\eta$ により、漸近領域において3粒子系の波動関数が外向きの波であることだけは保証されていますが、それだけでは具体的な放出チャンネルが定まらないからです。

ある有限の空間の中でのみ信頼できる(具体的な散乱の境界条件に繋がっていない)3体系の“散乱”波動関数を求めたいときには、式(4)を活用することができます。たとえば文献[3]では、複素スケーリング法と組み合わせて式(4)と類似のLS方程式を解き、その結果を遷移行列に代入して3体の散乱観測量を求める手法が提案されています。

チャンネル1から見たとき、チャンネル2や3は、束縛している粒子の組が異なる、いわゆる組み替えチャンネルに相当します。組み替えチャンネルへと遷移する反応(組み替え反応)はもちろん物理的に重要ですが、ひとまず、そういった過程は考えない(研究の対象としない)という立場をとってみましょう。ハミルトニアンを

$$H = H_1 + V_{31} + V_{12}, \quad H_1 \equiv T + V_{23} \quad (5)$$

と表し、チャンネル1のグリーン関数を

$$G_1^{(+)}(E) = \frac{1}{E - H_1 + i\eta} \quad (6)$$

と定義した上で、付録の式(38)から(40)と同様の手続きを行うと

$$G^{(+)}(E) = \frac{1}{E - H_1 - V_{31} - V_{12} + i\eta} = G_1^{(+)}(E) \left[1 + (V_{31} + V_{12}) G^{(+)}(E) \right] \quad (7)$$

となります。入射状態はシュレディンガー方程式

$$[H_1 - E] \phi_1 \Phi_{23} = 0 \quad (8)$$

を満たすことに留意しつつ、式(7)を式(4)に代入すると

$$\Psi_{(1)}^{(+)} = \phi_1 \Phi_{23} + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) \Psi_{(1)}^{(+)} \quad (9)$$

が得られます。この式では、1 と、 V_{23} で相互作用している 23 系が、 $V_{31} + V_{12}$ によって散乱され、漸近領域において、「 $\phi_1 \Phi_{23} + 1-23$ 系の外向き波」という形をもつという条件が課されています。なお、式 (9) の $\Psi_{(1)}^{(+)}$ には、2 と 3 の分解状態も含まれることに注意してください。

こうして、チャンネル 1 に入射波をもつ 3 体の散乱波が求まりました。... といいたいところですが、そうはなりません。実は式 (9) は、チャンネル 2 に入射波をもつ波 $\Psi_{(2)}^{(+)}$ の混入を避けられないのです。以下、このことを示しましょう。 $\Psi_{(2)}^{(+)}$ が満たす LS 方程式は、式 (9) の導出と全く同様に、

$$\Psi_{(2)}^{(+)} = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} \phi_2 \Phi_{31} = \phi_2 \Phi_{31} + G_2^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) \Psi_{(2)}^{(+)} \quad (10)$$

と求まります。ところが、グリーン関数として式 (7) を用いると

$$\Psi_{(2)}^{(+)} = \frac{i\eta}{E - H_1 + i\eta} \phi_2 \Phi_{31} + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) \Psi_{(2)}^{(+)} = G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) \Psi_{(2)}^{(+)} \quad (11)$$

となり、これは式 (9) の右辺第 2 項と全く同じ形です。したがって、 $\Psi_{(1)}^{(+)} + \beta \Psi_{(2)}^{(+)}$ (β : 任意定数) もまた、式 (9) の解となってしまいます。同様に、チャンネル 3 に入射波をもつ波の混入も避けられません。これを、LS 方程式の解の非一意性とよびます。

単一の LS 方程式が、このように“無意味な”積分方程式になってしまう根本的な理由は、この方程式が表す散乱過程の中に、粒子が素通りするダイアグラム (disconnected diagrams; DD) が含まれるためであることが知られています。いま、グリーン関数を

$$G^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) + G_0^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23} + V_{31}) G^{(+)}(E) \quad (12)$$

と表し、これを逐次展開してみましょう。結果は

$$G^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) + G_0^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23} + V_{31}) G_0^{(+)}(E) + G_0^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23} + V_{31}) G_0^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23} + V_{31}) G_0^{(+)}(E) + \dots \quad (13)$$

となりますが、この式の右辺第 2 項は

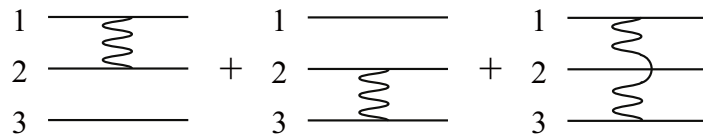


図 1: グリーン関数の逐次展開に現れるダイアグラム。

というダイアグラムに相当します。これらはすべて DD です。式 (14) の高次の項にも、DD は無数に存在します。DD では、どれか 1 つの粒子が自由に振る舞っていますから、その粒子の運動は反応前後で不変であり、そのため、3 次元運動量に関するデルタ関数が現れます。このデルタ関数がもたらす発散が、方程式を無意味なものにしているのです。

ここまでに明らかになった、単一の LS 方程式の問題をまとめておきます。

1. 組み替えチャンネルを生成できない。
2. 解が一意ではない。
3. DD に起因する発散を含む。

これらはすべて関連しており、3. に集約されるといっても過言ではありません。上の方で、「組み替え反応は研究の対象としないという立場をとる」と書きましたが、残念ながらそれで話が済むわけではなく、2. と 3. の問題に対しては、その表明は何の意味ももたないことがわかります。

この問題を解決するには、単一の LS 方程式ではなく、3 つの LS 方程式のセット

$$\Psi_{(1)}^{(+)} = \phi_1 \Phi_{23} + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) \Psi_{(1)}^{(+)} \quad (14)$$

$$\Psi_{(1)}^{(+)} = G_2^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) \Psi_{(1)}^{(+)} \quad (15)$$

$$\Psi_{(1)}^{(+)} = G_3^{(+)}(E) (V_{23} + V_{31}) \Psi_{(1)}^{(+)} \quad (16)$$

を考えればよいことが知られています。式 (15) と (16) から、組み替えチャンネルの波が生成されます。また $\Psi_{(2)}^{(+)}$ は、式 (10) のような非斉次方程式の解ですから、式 (15) を要請することによって排除されます。このように、3 つの LS 方程式をセットで考えることにより、上に掲げた問題の 1. と 2. が解決しています。DD が含まれないことを見るには、次のように、少し方程式を書き換える必要があります。

まず、散乱波を

$$\begin{aligned} \Psi_{(1)}^{(+)} &= \frac{i\eta}{E - T + i\eta} \phi_1 \Phi_{23} + G_0^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23} + V_{31}) \Psi_{(1)}^{(+)} \\ &= G_0^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23} + V_{31}) \Psi_{(1)}^{(+)} = \sum_{i=1}^3 \Psi_{i,(1)}^{(+)} \end{aligned} \quad (17)$$

と書き換えます。これを Faddeev 分解とよびます。ここで散乱波の Faddeev 成分は

$$\Psi_{i,(1)}^{(+)} = G_0^{(+)}(E) V_{jk} \Psi_{(1)}^{(+)} \quad (18)$$

と定義されます (i, j, k はサイクリック)。 $\Psi_{i,(1)}^{(+)}$ は、散乱波のうち、一番最後に相互作用 V_{jk} を受けた成分を表しています。次に、式 (14), (15), (16) の左から、それぞれ $G_0^{(+)}(E) V_{23}$, $G_0^{(+)}(E) V_{31}$, $G_0^{(+)}(E) V_{12}$ を作用させ、式 (18) と

$$(T + V_{23} - E) \phi_1 \Phi_{23} = 0 \rightarrow G_0^{(+)}(E) V_{23} \phi_1 \Phi_{23} = \phi_1 \Phi_{23}, \quad (19)$$

および付録の式 (41) で $V \rightarrow V_{ij}$, $G_0^{(+)}(E) \rightarrow G_k^{(+)}(E)$ と置き換えた

$$G_0^{(+)}(E) V_{ij} G_k^{(+)}(E) = G_k^{(+)}(E) V_{ij} G_0^{(+)}(E) \quad (20)$$

を用いて整理すると、

$$\Psi_{1,(1)}^{(+)} = \phi_1 \Phi_{23} + G_1^{(+)}(E) V_{23} \left(\Psi_{2,(1)}^{(+)} + \Psi_{3,(1)}^{(+)} \right) \quad (21)$$

$$\Psi_{2,(1)}^{(+)} = G_2^{(+)}(E) V_{31} \left(\Psi_{3,(1)}^{(+)} + \Psi_{1,(1)}^{(+)} \right) \quad (22)$$

$$\Psi_{3,(1)}^{(+)} = G_3^{(+)}(E) V_{12} \left(\Psi_{1,(1)}^{(+)} + \Psi_{2,(1)}^{(+)} \right) \quad (23)$$

が得られます。これが Faddeev 方程式です [4]。式 (21)–(23) の和を取ると

$$\begin{aligned} \Psi_{(1)}^{(+)} &= \phi_1 \Phi_{23} + \left[G_1^{(+)}(E) V_{23} G_0^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) + G_2^{(+)}(E) V_{31} G_0^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) \right. \\ &\quad \left. + G_3^{(+)}(E) V_{12} G_0^{(+)}(E) (V_{23} + V_{31}) \right] \Psi_{(1)}^{(+)} \end{aligned} \quad (24)$$

となり、これを逐次展開すれば、“諸悪の根源”たる DD が現れないことが見てとれると思います。

Faddeev 方程式は、3 体の散乱問題の厳密解を与える式として名高く、特に少数粒子系の物理の分野で数多くの実績があります。また、2000 年代中頃に長距離クーロン相互作用の新しい処方が開発されて以降は、より一般的な原子核の反応にも適用されています [5]。ただし、Faddeev 方程式を数値的に解くことはそれほど容易ではなく、多くの計算リソースを必要とします。また、厳密計算であるがゆえ、散乱現象の中身を解釈することも一般には困難です。したがって、より簡便に 3 体系の反応を記述する模型を開発することには、非常に大きな意味があると考えられます。

3 連続状態離散化チャネル結合法 (CDCC): Faddeev 理論の有効理論

連続状態離散化チャネル結合法 (Continuum-Discretized Coupled-Channels method; CDCC)[6] は、1980 年代に開発された 3 体反応模型です。CDCC には、弱く束縛した入射原子核 P が、標的核 A との相互作用によって分解する自由度が陽に取り入れられています。ここでいう分解とは、終状態で P が複数の粒子に壊れる過程はもちろん、最終的に P は基底状態に留まるものの、反応の途中でその分解状態を経由する過程も含みます。後者は virtual breakup とよばれます。本稿において、分解反応という言葉は、virtual breakup も含むものとします。

P の分解状態は連続無限“個”の状態からなりますが、CDCC ではこれを有限個の離散的状態で表現することにより、通常のチャネル結合問題として分解反応を取り扱います。これは、CDCC の名前の由来でもあります。しかし実は、CDCC の最も本質的な近似はこの離散化ではありません。以下ではこのことを議論したいと思います。

本節では、陽子 p と中性子 n の束縛状態である重陽子 d と、標的原子核 A の反応を考えましょう。チャネルのよび方は前節になります。たとえば p チャネルとは、 n と A が束縛状態をなし、これと p が散乱しているものを指します。 n チャネルと A チャネルも同様に定義します。ただし本稿では、 A チャネルのことを d チャネルとよぶことにします。これは、標的核 A が散乱しているとするよりも、 d が散乱しているとした方が直観的に捉えやすいからです (もちろん重心系で見ると、 d と A のどちらが散乱しているかという問いは意味をなしません)。なお、粒子間の相互作用としては実ポテンシャルを考え、吸収 (広義の吸収: 陽に取り扱っていないチャネルへの流束の逃げ) は考慮しないことにします。また、入射チャネルとしては d チャネルのみを考えるものとし、散乱波の下付きの添字 (d) は省略します。

CDCC が (模型が規定する空間の中で) 解いているのは、次の 単一の LS 方程式 です:

$$\Psi^{(+)} = \phi_d \Phi_{pn} + \frac{1}{E - H_d + i\epsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi^{(+)} \quad (25)$$

前節で強調したように、本来これは許されません。したがって、連続状態の離散化などという話の前に、単一の LS 方程式を解いて 3 体反応を記述することを正当化しなければなりません。そこで登場するのが、CDCC の最重要近似である l -truncation です。ここで l は、 p - n 間の相対軌道角運動量です。

今の場合、Schrödinger 方程式は

$$[E - T - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi^{(+)} = 0 \quad (26)$$

によって与えられます。前節にならない、散乱波を Faddeev 分解します:

$$\Psi^{(+)} = \Psi_d^{(+)} + \Psi_p^{(+)} + \Psi_n^{(+)} \quad (27)$$

Faddeev 成分は、次の方程式のセットを解くことで得られます:

$$[E - T - V_{pn}] \Psi_d^{(+)} = V_{pn}(\Psi_p^{(+)} + \Psi_n^{(+)}), \quad (28)$$

$$[E - T - V_{nA}] \Psi_p^{(+)} = V_{nA} \Psi_d^{(+)} + V_{nA} \Psi_n^{(+)}, \quad (29)$$

$$[E - T - V_{pA}] \Psi_n^{(+)} = V_{pA} \Psi_d^{(+)} + V_{pA} \Psi_p^{(+)}. \quad (30)$$

以下の論理展開を見通しよくするため、式 (28)–(30) は Schrödinger 方程式の形で与えていますが、これらには式 (21)–(23) と同じ境界条件が課されていると理解してください。実際、各方程式の左辺にある [] の inverse を両辺に作用させ、 d チャネルにのみ入射波成分を付与すれば、式 (21)–(23) と同様の形が得られます。この前提で、以下では式 (28)–(30) のことも Faddeev 方程式とよぶことにします。

ここで、式 (28)–(30) に補助ポテンシャルを導入し、

$$[E - T - V_{pn} - \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}}] \Psi_d^{(+)} = V_{pn}(\Psi_p^{(+)} + \Psi_n^{(+)}), \quad (31)$$

$$[E - T - V_{nA}] \Psi_p^{(+)} = (V_{nA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d^{(+)} + V_{nA} \Psi_n^{(+)}, \quad (32)$$

$$[E - T - V_{pA}] \Psi_n^{(+)} = (V_{pA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{pA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d^{(+)} + V_{pA} \Psi_p^{(+)}. \quad (33)$$

とします。式 (31)–(33) の和を取ると、補助ポテンシャルは相殺し、式 (26) が復元されることが見てとれるでしょう。つまり、式 (31)–(33) は Faddeev 方程式 (28)–(30) と完全に等価です。式 (31)–(33) は distorted Faddeev 方程式とよばれます。

では、補助ポテンシャルの具体的な中身を見ていくことにしましょう。ここで導入した $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ は、 l を l_{\max} 以下に制限する射影演算子です:

$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}'). \quad (34)$$

ただし \hat{r} は p - n の相対座標の立体角を表します。 Y_{lm} は球面調和関数です (m は磁気量子数)。式 (31) で、補助ポテンシャルは散乱ポテンシャルとしての役割を担いますが、それが $V_{nA} + V_{pA}$ そのものではなく、 $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ によって truncate された空間での相互作用であることがポイントです。たとえば V_{nA} は p の振る舞いと無関係な 2 体相互作用ですが、これに $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ を作用させたものは 3 体の相互作用 となります。 p - n の重心と A の相対座標を R とし、 $V_{nA} = -V_0 \exp[-\mu(R - r/2)^2]$ としましょう。これに $l_{\max} = 0$ とした \mathcal{P}_0 を作用させた結果は、簡単な計算により

$$\mathcal{P}_0 V_{nA} = -V_0 e^{-\mu(R^2 + r^2/4)} \frac{e^{\mu Rr} - e^{-\mu Rr}}{2\mu Rr} = -V_0 \frac{e^{-\mu(R-r/2)^2} - e^{-\mu(R+r/2)^2}}{2\mu Rr} \quad (35)$$

と求まります。この $\mathcal{P}_0 V_{nA}$ は、 R と r のいずれかが十分大きければ減衰します。たとえ n と A が近くにいても、 p がそれらから十分離れていれば、この相互作用ははたらかないのです。このことは、一般の $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ (ただし l_{\max} は有限) についても成り立ちます。これが、 $\mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA}$ が 3 体相互作用であるという意味です。これからただちに、式 (31) は DD を含まないことがわかります。

次に式 (32) および (33) の右辺第 1 項を見ると、 $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ で規定される空間の外にある相互作用と $\Psi_d^{(+)}$ の積が $\Psi_n^{(+)}$ と $\Psi_p^{(+)}$ の source term となっていることがわかります。そして $\Psi_n^{(+)}$ と $\Psi_p^{(+)}$ は、 V_{pn} という短距離相互作用との積の形で、式 (31) に影響します。 l_{\max} を十分大きく取れば、その影響は無視できる程に小さいと考えてよいでしょう。この理解の下で、式 (31) の右辺を 0 と近似し、これを LS 方程式の形で表せば

$$\Psi_{\text{CDCC}}^{(+)} = \phi_d \Phi_{pn} + \frac{1}{E - H_d + i\epsilon} \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}} \Psi_{\text{CDCC}}^{(+)} \quad (36)$$

となります。これが、CDCC が実際に解いている単一の LS 方程式です。式 (25) と見比べると、射影演算子 $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ の存在が式 (36) の本質的な特徴であることがわかります。CDCC は、 $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ で規定される模型空間の中で 3 体の反応を解いているということです。この模型空間の中では、前節で述べた DD に起因する問題は発生しませんから、式 (36) は物理的に意味をもった積分方程式です。また、distorted Faddeev 方程式との比較から、 l に関して収束した CDCC の解は Faddeev 理論の解と事実上同等とみなせることがわかります。ただし、もしも CDCC の解が l に関して収束しないとしたら、それは $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ で模型空間を規定して反応を記述することが許されないということの意味します。 l について解が収束するかどうかは、CDCC が 3 体反応問題の解法たり得るかどうかの分水嶺であるといえます。

なお、 n が A に移行する反応 (d チャネルから p チャネルへの移行反応) を記述したいときには、明らかに式 (25) だけでは不十分です。このときは、 d チャネルの波動関数を式 (25) で求め、 p チャネルへの遷移を Born 近似で扱う、いわゆる CDCC-BA がよく用いられます。 p チャネルの波動関数も CDCC (n -A 間の軌道角運動量を truncate した模型空間での LS 方程式) を用いて求めておけば、両チャネル間の遷移は十分小さいことが期待されます。

上記は、Faddeev 理論の専門家からの批判に対する 1 つの回答として、1989 年に Austern, Kawai, Yahiro によって提示された、CDCC の理論的基礎付け [7] の概要です。その後、約 20 年を経て、Faddeev 理論計算の進展により、種々の原子核反応で CDCC と Faddeev 理論 (正確にはそれを運動量表示で表した Alt-Grassberger-Sandhas 理論) の解が直接比較され、十分な精度で両者が一致していることが確かめられました。唯一の例外として、低エネルギーにおける重陽子の分解断面積の結果が CDCC と Faddeev 理論で数倍異なるという報告 [5] があります。しかしごく最近、その差は CDCC の模型空間の不足に起因するものであることが明らかになりました [8]。このときの鍵が、 p - n の高励起状態に対応する、いわゆる閉じたチャネルです。先行研究 [5] の CDCC 計算にはこの閉じたチャネルが取り入れられていなかったため、Faddeev 理論の結果との著しい違いが生じたというのが、文献 [8] の結論です。当然ながら、たとえ CDCC が正しい理論であっても (l -truncation が機能するケースであっても)、必要な模型空間を適切に取り入れられない限り、正しい結果は得られないということになります。 p - n 系の励起エネルギーの上限や、離散化された状態の数などは、計算結果が収束するところまで取らなければなりません。

2009 年、低エネルギーのトリプル α 反応の反応率を CDCC で計算すると、従来の値よりも著しく大きな結果が得られるという報告 [9] がなされましたが、この計算には閉じたチャネルが陽には取り入れられていません。文献 [8] の知見をそのまま適用すれば、閉じたチャネルを取り入れることにより、CDCC の計算結果は大きな変更を受けると予想されます。このことは、筑波大のグループの報告 [10] とも整合しています。

4 まとめ

以上、駆け足になりましたが、3 体反応理論の難しさと、それを“回避”する方法について解説しました。近年 CDCC は、特に不安定核の分解反応の記述に適用され、高い成功を収めています。CDCC が、厳密解を与える Faddeev 理論の有効理論であること、そして CDCC の最重要近似が l -truncation であることを理解していただけたら幸いです。なお、CDCC における離散化の手法や具体的な適用例については、松本琢磨氏による 2014 年夏の学校の講義録 [11] に非常によくまとめられていますので、是非参照してください。最後になりましたが、今回の夏の学校に関して様々な面でお世話になった皆さん、特に東北大学の野地和希さんに感謝します。

付録

LS 方程式 (2) の左から $E - T + i\eta$ を作用させ、 $(E - T + i\eta)\phi = i\eta\phi$ を用いて整理すると

$$(E - H + i\eta)\Psi^{(+)} = i\eta\phi \rightarrow \Psi^{(+)} = \frac{i\eta}{E - H + i\eta}\phi \equiv \Omega^{(+)}\phi \quad (37)$$

が得られます。 $\Omega^{(+)}$ を Møller の波動行列とよびます。式 (37) は、入射波動関数に演算子 $\Omega^{(+)}$ を作用させれば散乱波が得られるという、散乱問題を考えるときに大変便利な式です。

ハミルトニアンが $H = T + V$ で与えられるとします。グリーン関数を

$$G_0^{(+)}(E) = \frac{1}{E - T + i\eta}, \quad G^{(+)}(E) = \frac{1}{E - H + i\eta} = \frac{1}{E - T - V + i\eta} \quad (38)$$

と定義し、任意の演算子について成り立つ

$$\frac{1}{\hat{A}} - \frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{A}}(\hat{B} - \hat{A})\frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{B}}(\hat{B} - \hat{A})\frac{1}{\hat{A}} \quad (39)$$

において $\hat{A} = E - H + i\eta$, $\hat{B} = E - T + i\eta$ とすると、

$$G^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) + G_0^{(+)}(E)VG^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) \left[1 + VG^{(+)}(E) \right]. \quad (40)$$

これと、 \hat{A} と \hat{B} を入れ換えて得られる式の和を取って整理すれば、次の式が得られます:

$$G_0^{(+)}(E)VG^{(+)}(E) = G^{(+)}(E)VG_0^{(+)}(E). \quad (41)$$

参考文献

- [1] 砂川重信, 『散乱の量子論』(岩波書店, 2015) 第 5 章.
- [2] W. Glöckle, *The Quantum Mechanical Few-Body Problem* (Springer-Verlag, 1983).
- [3] Y. Kikuchi et al., Prog. Theor. Phys. 122, (2009) 499.
- [4] L. D. Faddeev, Zh. Eksp. Theor. Fiz. 39, (1960) 1459 [Sov. Phys. JETP 12, (1961) 1014].
- [5] N. J. Upadhyay, A. Deltuva, and F. M. Nunes, Phys. Rev. C 85, (2012) 054621.
- [6] M. Yahiro et al., Prog. Theor. Exp. Phys. 2012, (2012) 01A206, and references cited therein.
- [7] N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, (1989) 2649.
- [8] K. Ogata and K. Yoshida, Phys. Rev. C 94, (2016) 051603(R).
- [9] K. Ogata, M. Kan, and M. Kamimura, Prog. Theor. Phys. 122, (2009) 1055.
- [10] T. Akahori, Y. Funaki, and K. Yabana, Phys. Rev. C 92, (2015) 022801(R).
- [11] 松本琢磨, 原子核研究 59, Suppl. 1 (2014 年夏の学校特集号), (2015) p. 14.