

模型空間における3体反応の理論

2017年度 原子核三者若手夏の学校

原子核パート講義1

おがた かずゆき

緒方 一介

大阪大学 核物理研究センター(RCNP)

- I. 波束の理論と $+i\eta$ の意味 ～定常散乱理論の基礎付け～
- II. 3体反応理論の難点とその克服 ～Faddeev, CDCC, DWIA～
- III. 「秩序の崩れをもたらす秩序の理解」に向けた取り組み

I. 波束の理論と $+i\eta$ の意味

～定常散乱理論の基礎付け～

散乱理論の教科書によれば…

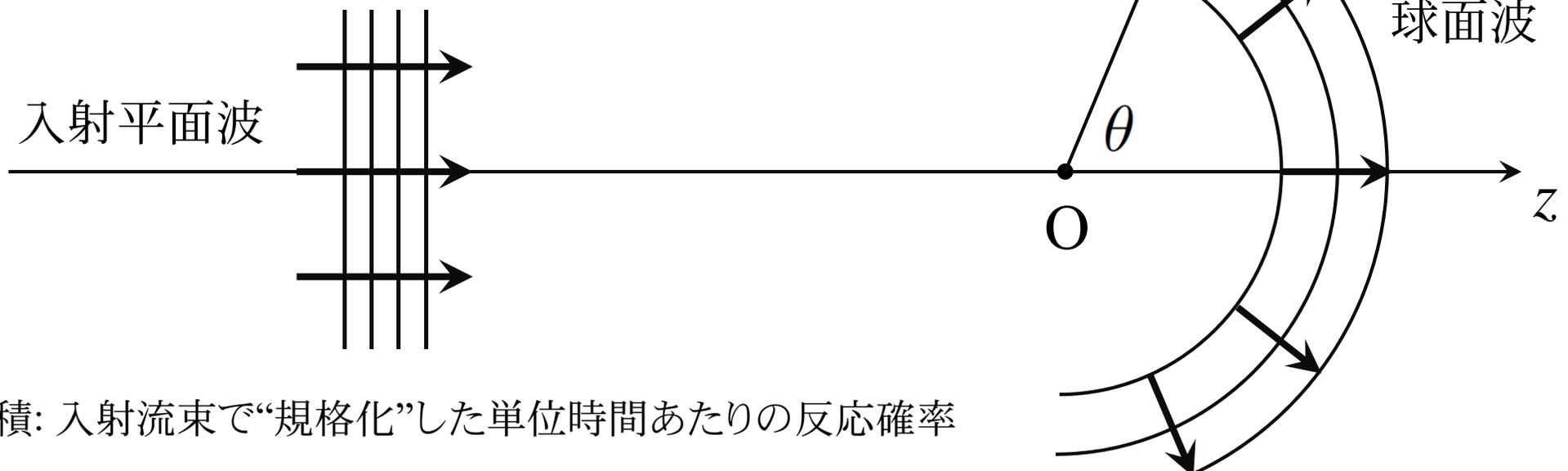
適切な境界条件を満足する散乱波は、無限遠方において

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta_R) \frac{e^{iKR}}{R} \equiv \chi_{\mathbf{K}}^{\text{asym}}(\mathbf{R})$$

となる。このとき、微分散乱断面積は以下のように与えられる。

クーロンなし・スピンなし

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{K}}(\theta)|^2$$



※断面積: 入射流束で“規格化”した単位時間あたりの反応確率

疑問

- 突然「適切な境界条件」と言われても...
- 仮にそういう形で散乱波を表現しただけだとしても、 $|f_{\mathbf{K}}(\theta)|^2$ が観測される断面積になるというのはどうにも腑に落ちない。
- 波動関数の時間依存性はどこに？
- 入射平面波って、宇宙の彼方まで広がっているよね？



散乱理論は、実験条件(および直観的な描像)と合致しない。

Part I. の目的

直観と合致する波束の理論と定常散乱波の理論がどのような関係にあるのかを明らかにする。

波束状態

反応の初期状態(初期波束):

$$\Phi(t_0) = \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}}$$

波束中心
波束の運動量(波数)

$$t_0 = -|\mathbf{Z}_0| \frac{\mu}{\hbar K_0} \quad (\leftarrow \text{初期時刻の定義})$$

換算質量

\mathcal{G} はエンベロープ関数で、波束の形状を表す(たとえばガウス型)。ここではその具体形は問わない。

任意の時刻における波束状態:

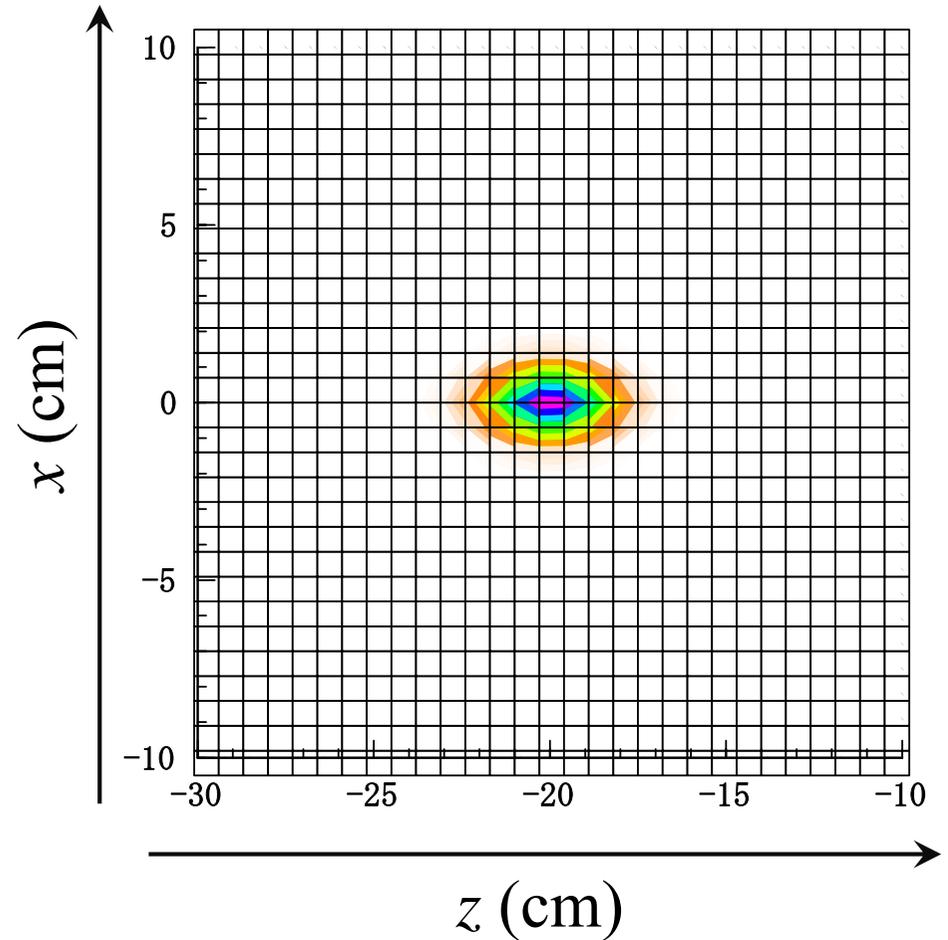
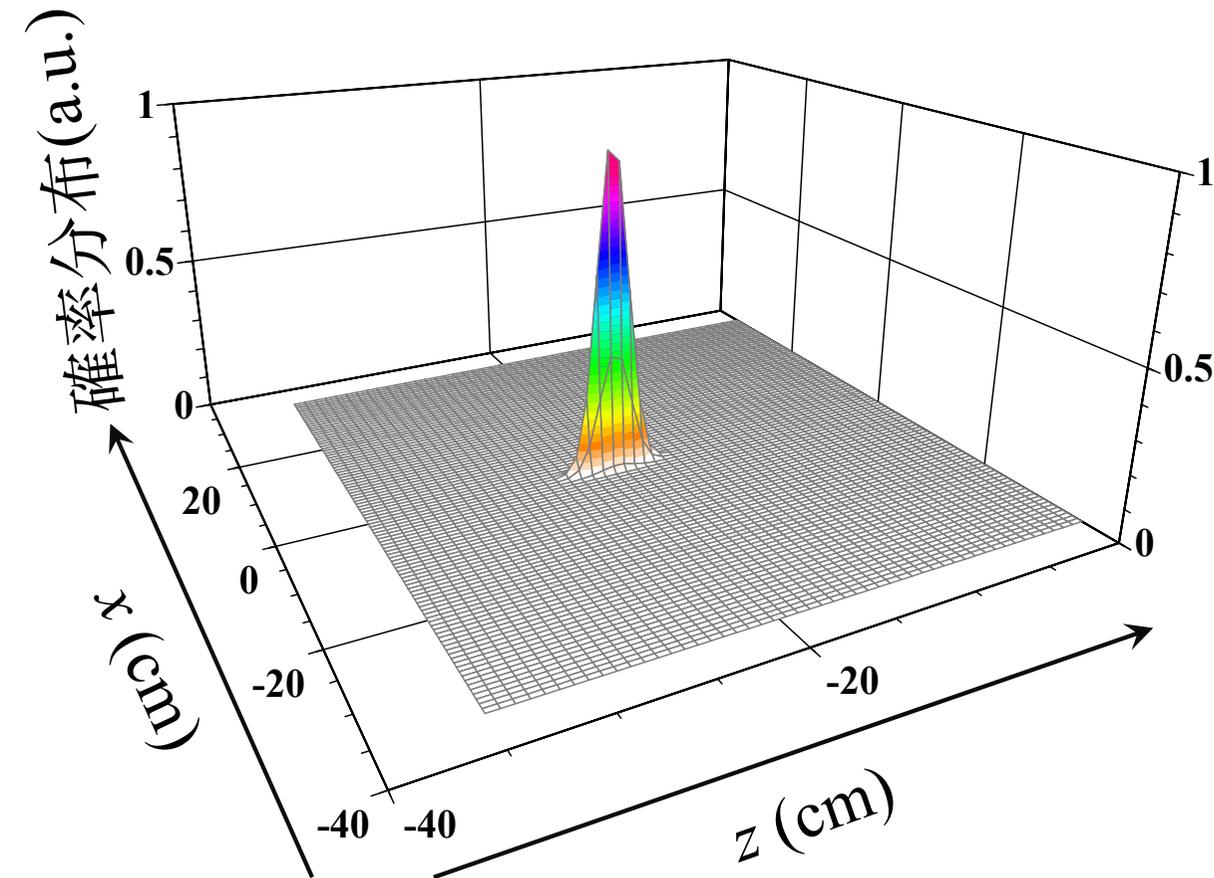
$$\Phi(t) = e^{-\left(\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right)(t-t_0)} \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}}$$

系のハミルトニアン

初期波束の例(イメージ)

$$v_0 t = -20 \text{ (cm)}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu z^2}$$



$$y = 0$$

※現実の波束のx, y方向の広がりはずっと狭い。

3つのスケール

反応領域の大きさ

fm のスケール。換算ド・ブロイ波長 $1/K_0$ に相当。

※波数 K_0 の波は位置変化 $1/K_0$ を位相変化 1 として“検出”する。

波束の広がり

典型的には cm のスケール。長さ w として表現する。このとき
運動量(波数)は幅 $1/w$ ($\sim 10^{-13}$ 1/fm)に集中している。

漸近領域の距離

典型的には m のスケール。粒子を撃ち込んだり検出器で測定したりする領域。波動関数の漸近形が利用できる。 $|Z_0|$ に相当。

$$\frac{1}{K_0} \ll w \ll |Z_0|$$

初期波束のフーリエ展開

$$\begin{aligned}\int e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}\Phi(t_0)d\mathbf{R} &= \int e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}\mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{R} \\ &= \int \mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{R} \\ &= e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0}\int \mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)}d\mathbf{R} \\ &= \boxed{a(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)}e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0}\end{aligned}$$

\mathcal{G} のフーリエ変換 ($\sim 1/w$ の極めて狭い幅に分布)

逆変換:
$$\Phi(t_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{P}$$

初期波束は $\mathbf{P} \sim \mathbf{K}_0$ に集中

初期波束の定常波動関数による表現

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{P}$$

$\mathbf{R} \sim \mathbf{Z}_0$ に局在

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta_R) \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{R}$$

運動量 \mathbf{K}

$\mathbf{R} \sim \mathbf{Z}_0$ で運動量 $\sim -\mathbf{K}$



$$I_0 \equiv (\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}), \Phi(t_0)) \approx \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \Phi(t_0) d\mathbf{R}$$

逆変換



$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0}$$

$$\Phi(t_0) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

測定がなされる時刻での波束と定常波動関数

$$\Phi(t) = e^{-(i\hat{H}/\hbar)(t-t_0)} \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} = e^{-(i\hat{H}/\hbar)(t-t_0)} \Phi(t_0)$$

$$\Phi(t_0) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

↓ $\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$ は H の固有状態(固有値 E)

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE/\hbar)(t-t_0)} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

幅 $\sim 1/w$

↓ 測定領域では漸近系が利用可

$$\Phi(t) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int \boxed{a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0)} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE/\hbar)(t-t_0)} \\ \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} + f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{R} \right] d\mathbf{K} \equiv \Phi_{\text{asym}}(t)$$

方針: $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$ とし、 E と \mathbf{K} を \mathbf{Q} の1次までで評価する。

定常散乱波の波数・エネルギー

$$Q \equiv K - K_0 \quad \sim 10^{-11} \text{ MeV}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} K^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu} (\mathbf{K}_0 + \mathbf{Q})^2 \sim \frac{\hbar^2}{2\mu} K_0^2 + \frac{\hbar^2}{\mu} (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Q}) = E_0 + \hbar (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q})$$

$$K^2 \sim K_0^2 + 2(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Q}) \rightarrow K \sim K_0 + (\hat{\mathbf{K}}_0 \cdot \mathbf{Q})$$

 積分変数を \mathbf{K} から \mathbf{Q} に変更

$$\Phi_{\text{asym}}(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q})(t-t_0)} \\ \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i(\mathbf{Q} + \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{R}} + f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{iK_0 R} e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0 \cdot \mathbf{Q})R}}{R} \right] d\mathbf{Q}$$

波束の平面波成分

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{asym}}^{\text{PW}}(t) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int a(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \\
 &\quad \times e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})(t-t_0)} e^{i(\mathbf{Q}+\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{Q} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \underbrace{-|\mathbf{Z}_0| \frac{\mu}{\hbar K_0}}_{\substack{\text{---} \\ \nearrow}} \\
 &\quad \times \int a(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})t} e^{i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})t_0} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{Q} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \boxed{\int a(\mathbf{Q}) e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})t} d\mathbf{Q}} \\
 &\quad \quad \quad = (2\pi)^3 \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t) \\
 &= \boxed{e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \boxed{\mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t)}
 \end{aligned}$$

Trivialな時間依存性

中心が速度 \mathbf{v}_0 で運動する波束
(入射波束の形を保持)

波束の拡散は？

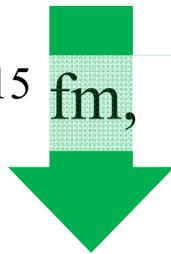
波束の**拡散**を扱うには、 **Q** の高次項が必要。ただし今の場合、その効果は無視して良い。

1次元の自由ガウス波束の**確率分布幅**(時間変化):

$$w(t) = \sqrt{w_0^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{\mu^2 w_0^2}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{\mu^2 w_0^4}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{(\hbar c)^2 (ct)^2}{(\mu c^2)^2 w_0^4}}$$

($\hbar c \sim 200$ [MeV · fm], $ct \sim 10^{15}$ fm, $\mu c^2 \sim 10^3$ MeV, $w_0 \sim 10^{13}$ fm)

検出器の距離

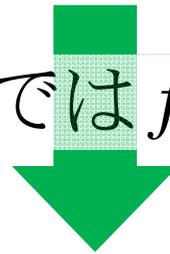


$$\frac{w(t)}{w_0} \sim \sqrt{1 + \frac{4 \times 10^4 \times 10^{15 \times 2}}{10^6 \times 10^{13 \times 4}}} \sim \sqrt{1 + 4 \times 10^{-14}}$$

波束の球面波成分

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int a(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})(t-t_0)} \\ &\quad \times f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{iK_0 R} e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0\cdot\mathbf{Q})R}}{R} d\mathbf{Q} \\ &= e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{e^{iK_0 R}}{R} \int a(\mathbf{Q}) f_{\mathbf{K}}(\theta) e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0\cdot\mathbf{Q})(R-v_0 t)} d\mathbf{Q}\end{aligned}$$

積分に關与する \mathbf{Q} の範囲内では f の \mathbf{K} 依存性は無視できる。



$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) \approx \underbrace{e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)}}_{\text{Trivialな時間依存性}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}_0}(\theta) \frac{e^{iK_0 R}}{R} \underbrace{\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - v_0 t])}_{\text{中心が速さ } v_0 \text{ で動径外向きに運動する波束}}$$

エンベロープ関数について(補足)

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu z^2}$$

- 平面波成分

$$\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + (z - v_0 t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu(z-v_0 t)^2}$$

- 球面波成分

$$\hat{\mathbf{K}}_0(R - v_0 t) = (R - v_0 t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0[R - v_0 t]) = e^{-\nu(R-v_0 t)^2}$$

エンベロープ関数の性質(平面波成分)

$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{PW}}(t) = e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t)$$

- 中心は速さ v_0 で z 軸方向に運動。
- **cm 程度の拡がり**を持つので、散乱領域付近では、 \mathcal{G} の x, y 依存性は無視して良い(正確には x, y 方向の拡がり z 方向の拡がりよりも狭いが、それでも巨視的なスケール)。
- 散乱領域の**単位面積あたりに流れ込む確率の総量**は、 $x = y = 0$ として、 \mathcal{G} の z 分布の積分を取ることで求まる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 z)|^2 dz \equiv \mathfrak{G}$$

エンベロープ関数の性質(球面波成分)

$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) \approx e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}_0}(\theta) \frac{e^{iK_0 R}}{R} \mathcal{G}\left(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - v_0 t]\right)$$

- 中心は速さ v_0 で動径外向きに運動。
- 動径方向についての分布は初期波束の z 方向の分布と同じ。
- 巨視的なスケールで考えると $R \sim v_0 t$ であり(\because 波束幅 \sim cm)、 $R > 0$ であるから、 t は正であることが示唆される。すなわち球面波成分は $t \sim 0$ で発生したとみなせる(因果律)。
- θ 方向に出ていく確率の総量は、十分時間が経ったところで求めた \mathcal{G} の R 分布の積分と、散乱振幅の絶対値二乗の積:

$$|f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \int_0^\infty \left| \mathcal{G}\left(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - \underbrace{R_0}_{\text{巨視的な距離}}]\right) \right|^2 dR \approx |f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \mathcal{G}$$

巨視的な距離

微分断面積

散乱領域の単位面積あたりに流れ込む確率の総量:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 z)|^2 dz \equiv \mathfrak{G}$$

θ 方向に出ていく、単位立体角あたりの確率の総量:

$$|f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \int_0^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 R - R_0)|^2 dR \approx |f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \mathfrak{G}$$

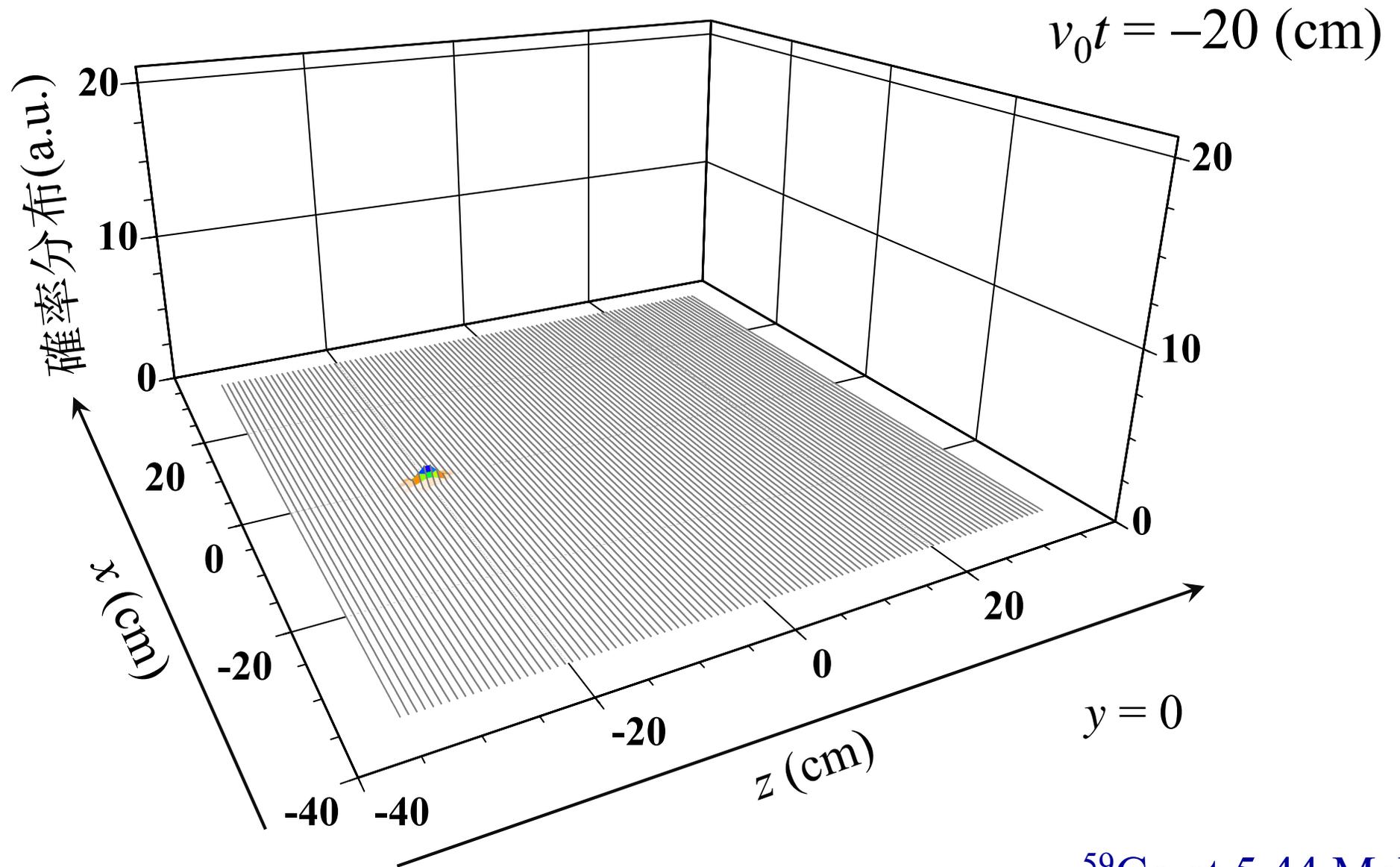


微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{K}}(\theta)|^2$$

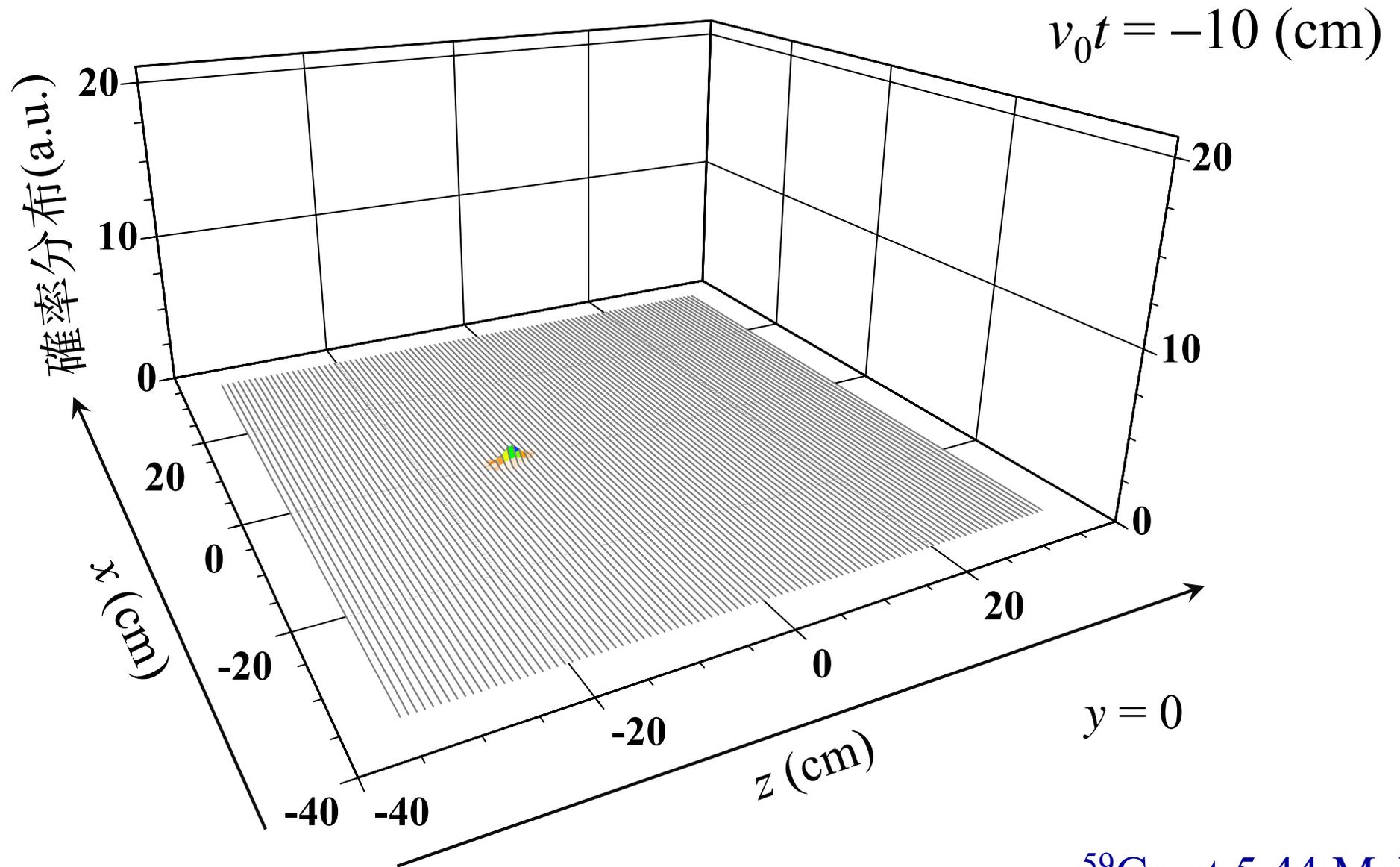
定常散乱波の理論の結論と完全に一致!

波束の伝播の様子



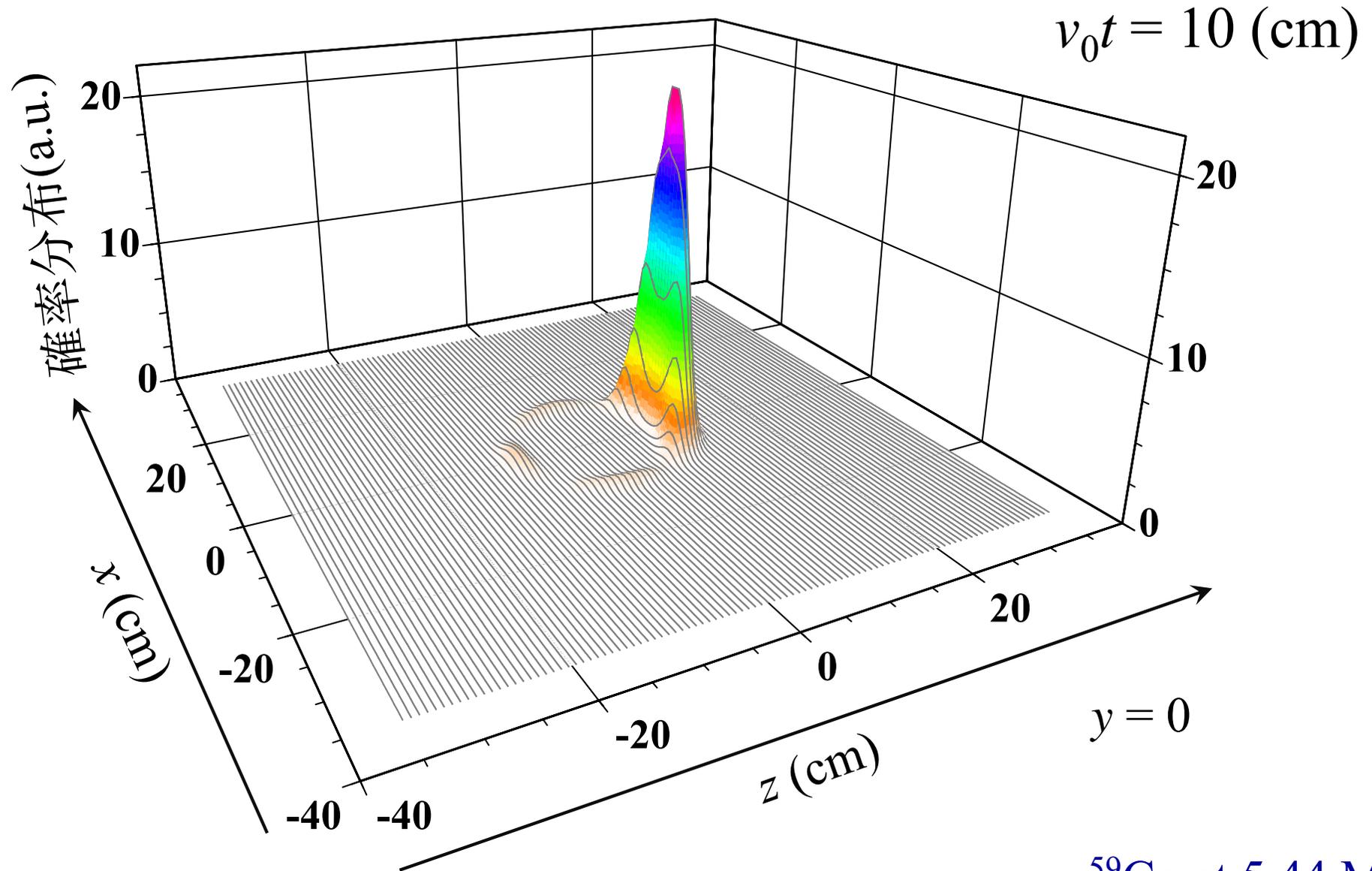
n - ^{59}Co at 5.44 MeV

波束の伝播の様子



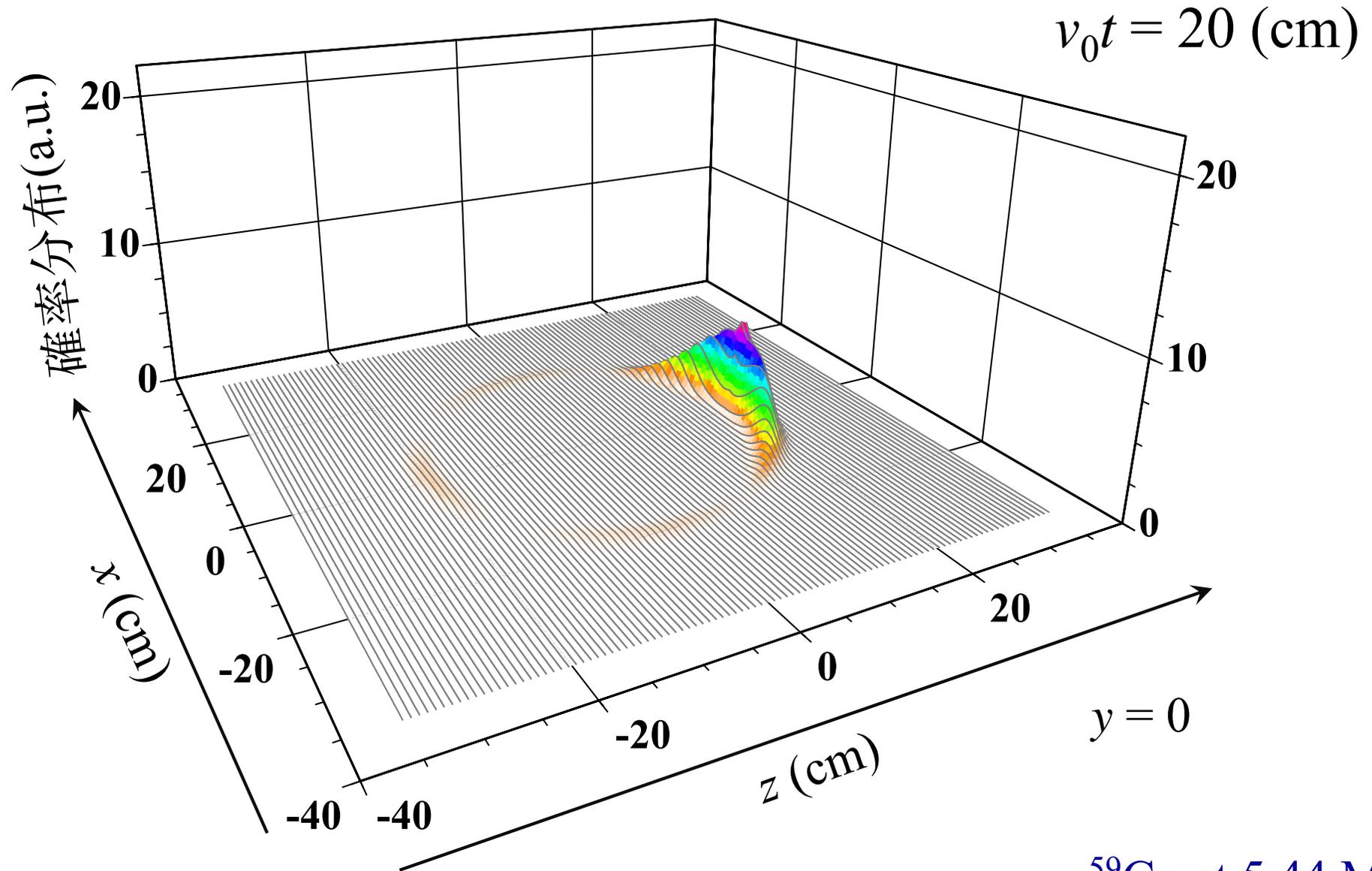
n - ^{59}Co at 5.44 MeV

波束の伝播の様子



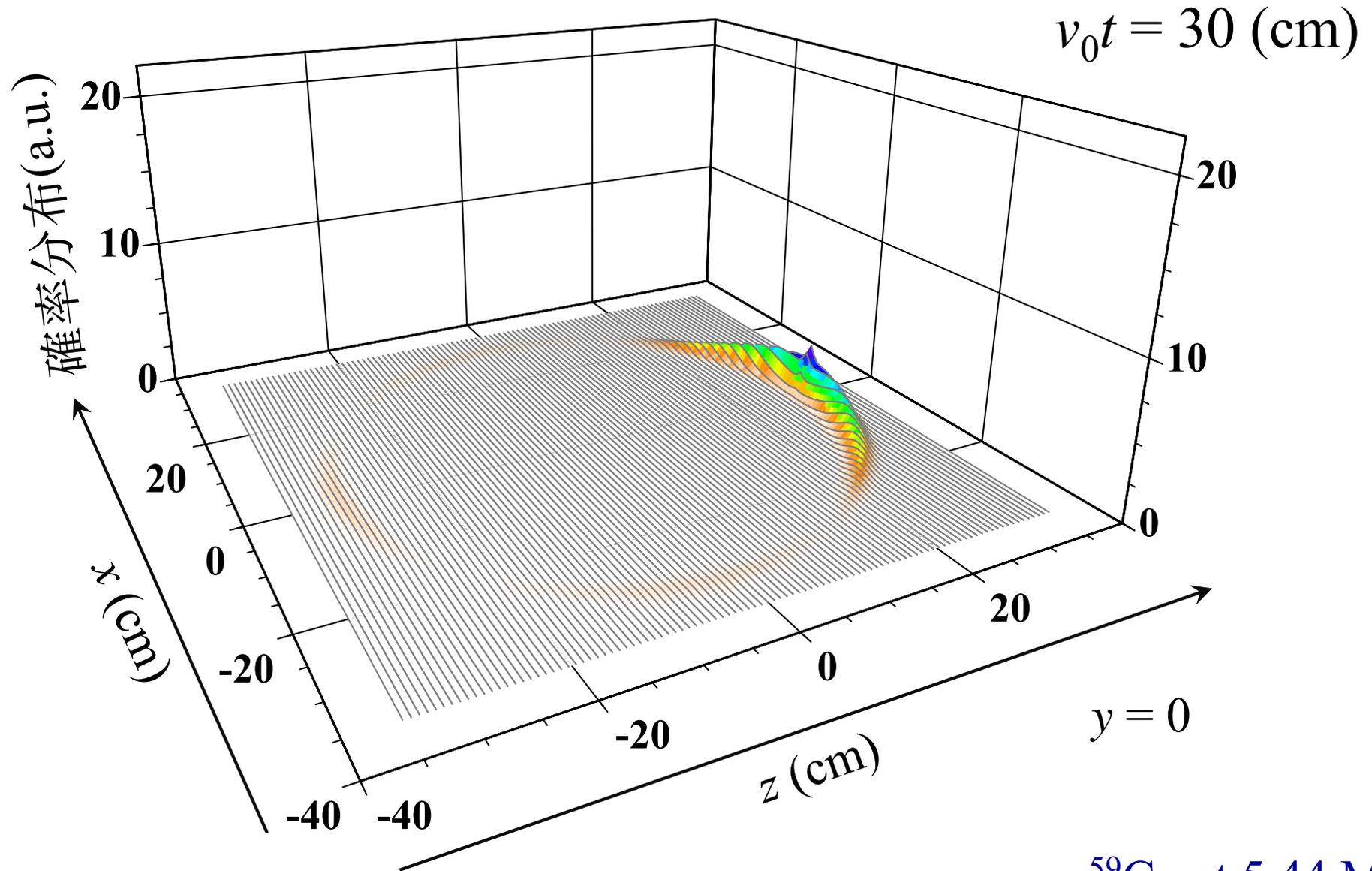
n - ^{59}Co at 5.44 MeV

波束の伝播の様子



n - ^{59}Co at 5.44 MeV

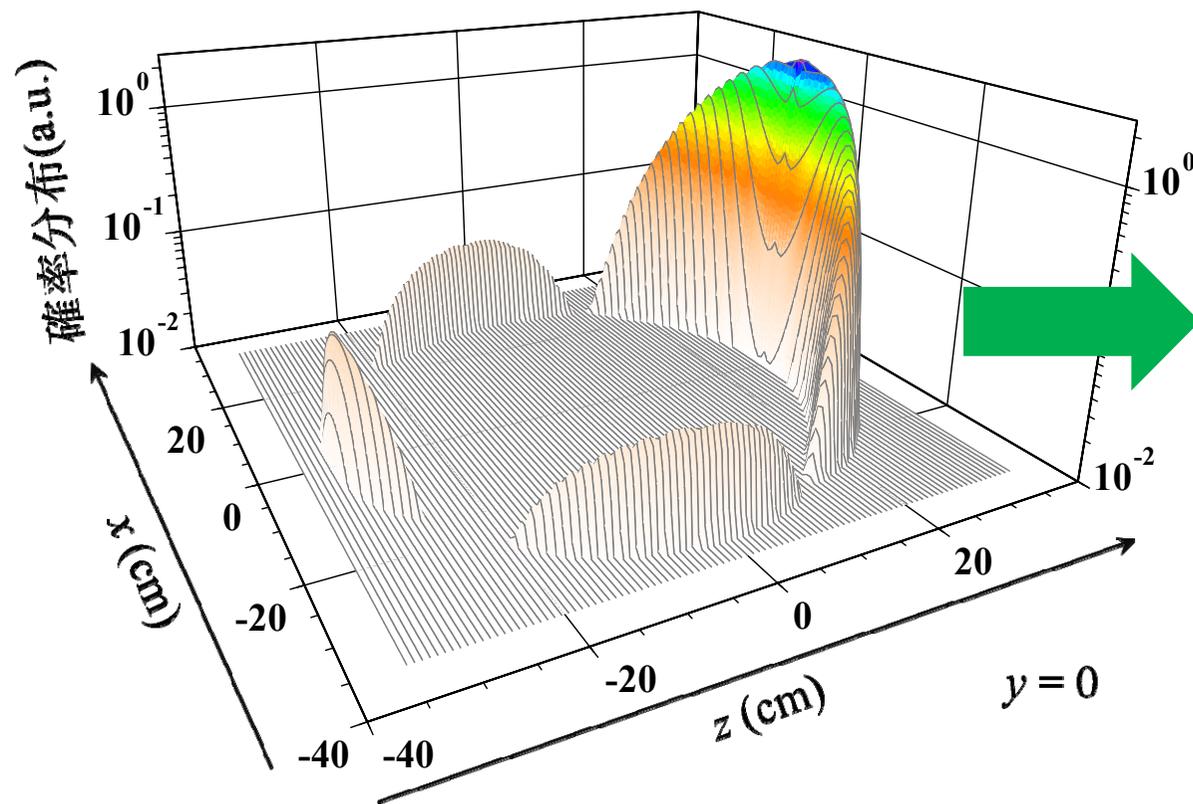
波束の伝播の様子



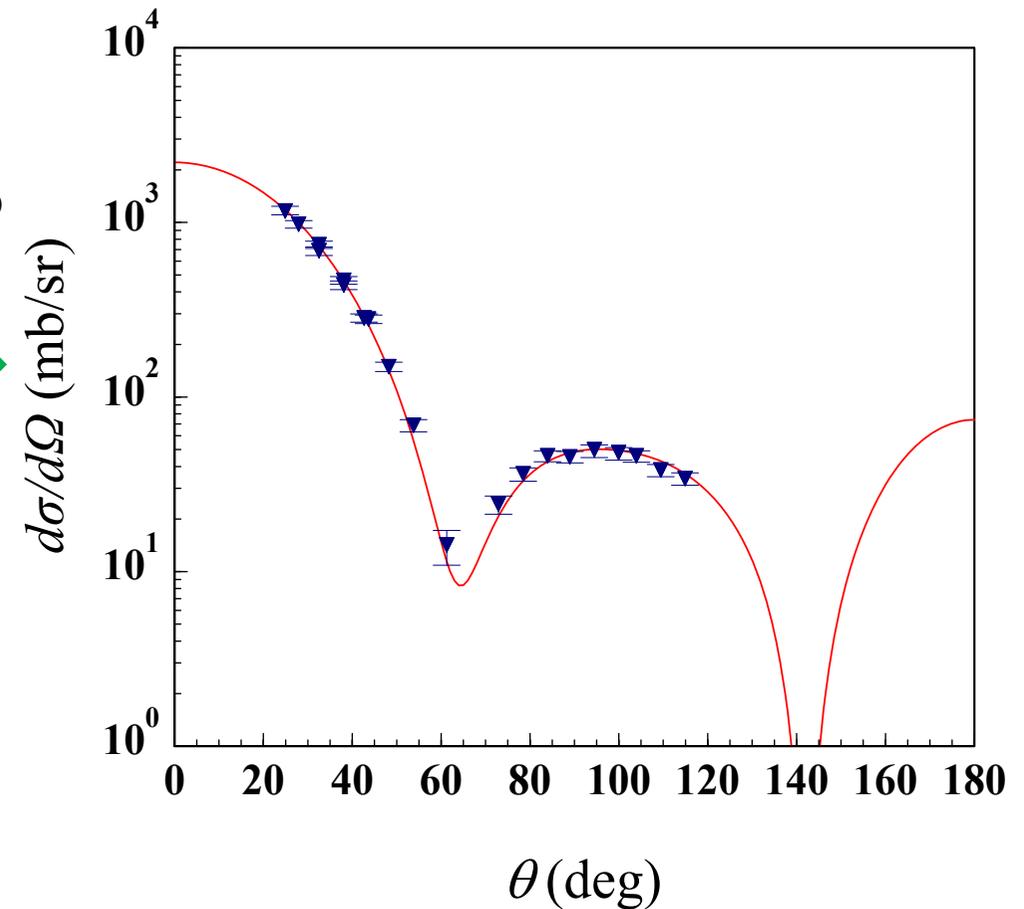
n - ^{59}Co at 5.44 MeV

波束の伝播の様子

$$v_0 t = 30 \text{ (cm)}$$



n - ^{59}Co at 5.44 MeV



前半のまとめ

- 現実の実験条件や直観的描像と合致する波束の理論と、これまでに学んだ定常散乱波の理論との関係を議論した。
- 運動量に(非常に狭い)幅を持たせる事によって、散乱現象を、直観と合致する波束の運動として描くことができる。
- そのようにして求めた微分断面積の表式は、定常散乱波の理論の結論と完全に一致する。これは本質的には、散乱領域の大きさと比べ、波束の拡がりが無限に大きいと見なせるからである。

※より詳しい議論については、以下を参照(ただしAusternは絶版)。

N. Austern, “Direct Nuclear Reaction Theories” (John Wiley & Sons) [Chap. 1]

笹川辰弥『散乱理論 (物理学選書20)』(裳華房) [第2章]

M. L. Goldberger and K. M. Watson, “Collision Theory” (Dover) [Chap. 3]

後半の話

- 巨視的な空間に広がった波動関数を用いた時間依存散乱理論を概観する。
- 波束の理論で得られた知見を援用し、時間に依存しない散乱波に、その波が本来有していた時間依存性の名残 $+i\eta$ を与える。
- 散乱の基礎方程式である Lippmann-Schwinger (LS) 方程式を導出する。

時間依存シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{R}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + V(\mathbf{R}) \right] \Psi(\mathbf{R}, t)$$

巨視的空間(☐: 1辺の長さ L の立方体)で規格化された平面波によって展開:

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}}$$



$$\omega_{n'n} \equiv \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar}$$

$$i\hbar \frac{dC_{n'}(t)}{dt} = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\square} C_n(t) e^{i\omega_{n'n} t}$$

$$\langle n' | V | n \rangle_{\square} \equiv \int_{\square} \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\mathbf{K}_{n'} \cdot \mathbf{R}} V(\mathbf{R}) \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{R}$$

時間依存シュレディンガー方程式の摂動解

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}}$$

$$i\hbar \frac{dC_{n'}(t)}{dt} = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\text{sp}} C_n(t) e^{i\omega_{n'n} t}$$

無摂動解: $C_n^{(0)}(t) = \delta_{n\alpha}$ (α は入射チャンネルのラベル)

1次の摂動解: $C_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n | V | \alpha \rangle_{\text{sp}} e^{i\omega_{n\alpha} t'} dt'$

入射時刻

2次の摂動解: $i\hbar \frac{d}{dt} C_{n'}^{(2)}(t) = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\text{sp}} C_n^{(1)}(t) e^{i\omega_{n'n} t}$
(の方程式)

2次の摂動解

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_{n'}^{(2)}(t) = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} C_n^{(1)}(t) e^{i\omega_{n'n}t}$$

$$C_{n'}^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \sum_n \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'n}t'} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n\alpha}t''}$$

t'' 積分を以下のように処理:

$t \rightarrow -\infty$ で相互作用消失

$$\int_{-\infty}^{t'} e^{i\omega_{n\alpha}t''} dt'' \rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{t'} e^{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)t''} dt'' = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{e^{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)t'}}{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)}$$

$$= i\hbar \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{e^{i\omega_{n\alpha}t'}}{E_{\alpha} - E_n + i\eta}$$

微小な相互作用変化
(極限は最後に取り)

$+i\eta$ は、現実の散乱が波束の時間発展で表されることを簡便に表現するもの(+は無限の過去で自由状態という意味)。

2次の摂動解(つづき)

$$\begin{aligned}
 C_{n'}^{(2)}(t) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \sum_n \int_{-\infty}^t \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'n}t'} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}} \left(i\hbar \frac{e^{i\omega_{n\alpha}t'}}{E_\alpha - E_n + i\eta} \right) dt' \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \sum_n \int_{-\infty}^t \frac{\langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}}}{E_\alpha - E_n + i\eta} e^{i\omega_{n'\alpha}t'} dt'
 \end{aligned}$$

lim は省略(以下も同様)。1次の摂動解とまとめて

$$C_{n'}^{(1)}(t) + C_{n'}^{(2)} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n' | V | \chi^{(+)(1)} \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'\alpha}t'} dt'$$

$$|\chi^{(+)(1)}\rangle \equiv |\alpha\rangle + \sum_n \frac{|n\rangle \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}}}{E_\alpha - E_n + i\eta} = |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V |\alpha\rangle$$

1次の摂動入り散乱波

$$G_0^{(+)} \equiv \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\eta} = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{E_\alpha - E_n + i\eta}$$

グリーン関数の
スペクトル展開

Lippmann-Schwinger方程式

同様にして摂動の高次まで取り入れる。

$$\bar{C}_{n'}(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} C_{n'}^{(i)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n' | V | \chi^{(+)} \rangle_{\mathfrak{M}} e^{i\omega_{n'\alpha} t'} dt'$$

$$|\chi^{(+)}\rangle \equiv |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V G_0^{(+)} V |\alpha\rangle + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(G_0^{(+)} V \right)^i |\alpha\rangle$$

Lippmann-Schwinger (LS)方程式

$$|\chi^{(+)}\rangle = |\alpha\rangle + \frac{1}{E_{\alpha} - H_0 + i\eta} V |\chi^{(+)}\rangle$$

LS方程式は、適切な境界条件を満たす散乱波の形式解を与える。
+ $i\eta$ を含む式は、無限の過去で平面波状態であったことと、それが相互作用によって平面波+外向波となることの双方を保証する。

後半のまとめ

- 波束の理論が定常散乱波の理論と等価である事実に基づき、波束による散乱現象を模倣する処理を行うことで、適切な境界条件を満たす定常散乱波の形式解が得られる。これがLippmann-Schwinger (LS)方程式である。
- LS 方程式に現れる $+i\eta$ は、散乱現象が、無限の過去において相互作用を受けていない自由な状態(平面波状態)から始まり、きわめてゆっくりと相互作用がはたらいて、平面波+外向波という漸近条件をもつ状態に推移するものであることを保証している。これが、2体散乱における適切な境界条件の実体である。
- 3体反応では、上記のものだけでは境界条件として不足である(II.に続く)。

II. 3体反応理論の難点とその克服

～Faddeev, CDCC, DWIA～

はじめに

ここで議論したい問題は、よく指摘される「3体問題は解けない」というものではありません。つまり、解が解析的に表されるかどうかを、ここでは問いません。そして、3体の束縛問題は解けているという立場を取ります(たとえば量子力学的3体系の束縛状態については、変分法を用いることにより、厳密解と同等とみなせる解が得られています)。

では何が問題か。それは

「3体の散乱問題の解を与える方程式は何か？」

です。Part IIの前半では、この問題とその解答であるFaddeev理論を紹介します。

準備1

LS方程式

$$|\chi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\eta} V |\chi^{(+)}\rangle$$

↓ 左から $(E - H_0 + i\eta)$ を作用

$$(E - H_0 + i\eta) |\chi^{(+)}\rangle = (E - H_0 + i\eta) |\phi\rangle + V |\chi^{(+)}\rangle$$

↓ $(E - H_0 + i\eta) |\phi\rangle = i\eta |\phi\rangle$

$$(E - H + i\eta) |\chi^{(+)}\rangle = i\eta |\phi\rangle$$

Møller の波動行列を用いた散乱波の表現

$$|\chi^{(+)}\rangle = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} |\phi\rangle \equiv \boxed{\Omega^{(+)}} |\phi\rangle$$

波動行列

準備2

グリーン関数 $G^{(+)} = \frac{1}{E - H + i\eta} = \frac{1}{E - H_0 - V + i\eta}$

$$\frac{1}{\hat{A}} - \frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{A}} (\hat{B} - \hat{A}) \frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{B}} (\hat{B} - \hat{A}) \frac{1}{\hat{A}}$$

$$\hat{A} = E - H + i\eta, \quad \hat{B} = E - H_0 + i\eta$$



$$G^{(+)} = G_0^{(+)} + G_0^{(+)} V G^{(+)} = G_0^{(+)} (1 + V G^{(+)})$$

$$\hat{A} \longleftrightarrow \hat{B} \quad \Rightarrow \quad G_0^{(+)} = G^{(+)} - G^{(+)} V G_0^{(+)}$$

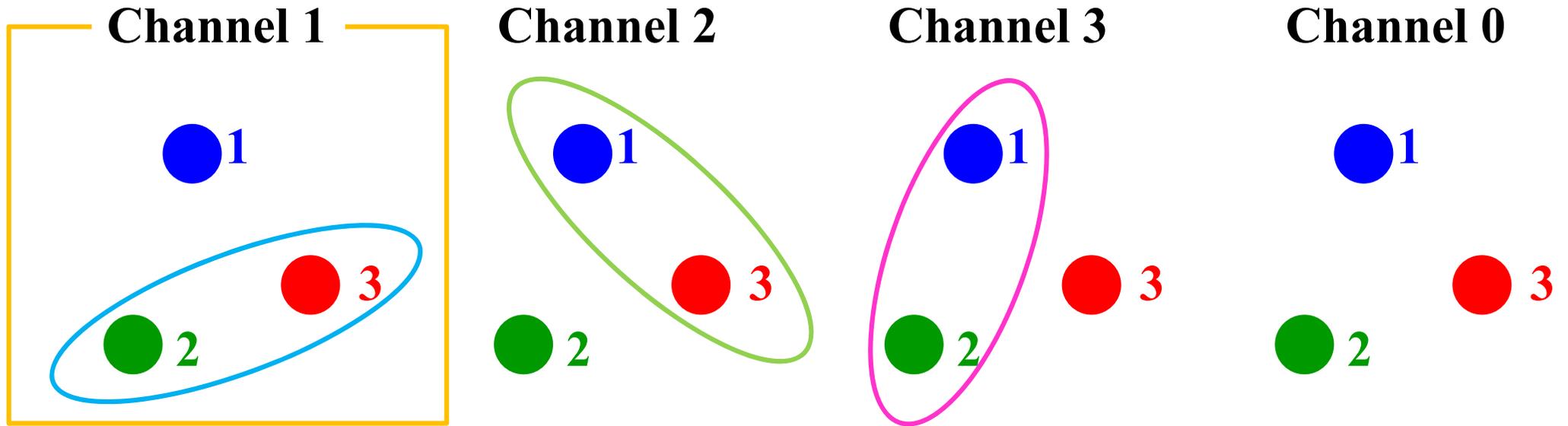


両辺足す

$$G^{(+)} + G_0^{(+)} = G_0^{(+)} + G_0^{(+)} V G^{(+)} + G^{(+)} - G^{(+)} V G_0^{(+)}$$

$$\Rightarrow G_0^{(+)} V G^{(+)} = G^{(+)} V G_0^{(+)}$$

3体系の散乱問題



ハミルトニアン

$$H = H_0 + V_{12} + V_{23} + V_{31}$$

チャンネル1に入射波が存在する場合の散乱波

入射チャンネルのラベル $|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle$ 23の束縛状態

無限の過去は指定されているが、具体的な終状態が未指定

LS方程式の解の非一意性

チャンネル1に入射波が存在する場合の散乱波

$$|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle$$

$$G^{(+)}(E) \equiv \frac{1}{E - H_1 - V_{31} - V_{12} + i\eta} = G_1^{(+)}(E) \left[1 + (V_{31} + V_{12}) G^{(+)}(E) \right]$$



$$\times G_i^{(+)}(E) \equiv \frac{1}{E - H_i + i\eta}$$

$$\begin{aligned} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle &= \frac{i\eta}{E - H_1 + i\eta} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ &= |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{aligned}$$

終状態は、 $V_{31} + V_{12}$ で生成される散乱状態のみ(3つばらばらの状態も含む)。**31および12の束縛状態は生成されない。**

(「そういう終状態は見ない」と宣言するだけで済めばよいが...)

LS方程式の解の非一意性(つづき)

チャンネル2に入射波が存在する場合の散乱波

$$\begin{aligned} |\chi_{(2)}^{(+)}\rangle &= |\phi_2\rangle|\Phi_{31}\rangle + G_2^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23})|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle \\ &= \frac{i\eta}{E - H_1 + i\eta}|\phi_2\rangle|\Phi_{31}\rangle + G_1^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12})|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle \\ &= G_1^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12})|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle \end{aligned}$$

チャンネル1に入射波が存在する場合の散乱波

$$|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle$$

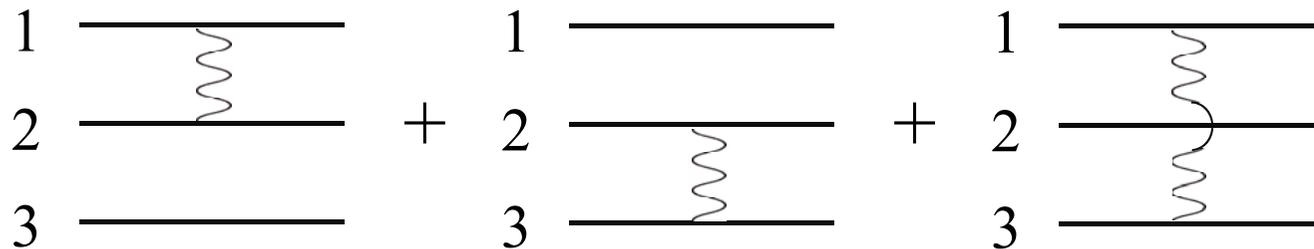
$|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle + \beta|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle$ は上の方程式を満たす(β は任意の定数)。すなわち単一のLS方程式は、異なるチャンネルに入射波をもつ成分の混在を防げない。これをLS方程式の解の非一意性とよぶ。

Disconnected Diagram

$$G^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) + G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})G^{(+)}(E)$$

摂動展開

$$G^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) + \boxed{G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})G_0^{(+)}(E)} \\ + G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})G_0^{(+)}(E) + \dots$$



素通りする粒子が存在すると、運動量が等しい平面波のノルム積が表れ、発散が生じる。このような、粒子の素通りを含むダイアグラムを **disconnected diagram** とよぶ(諸悪の根源)。

一意な解を与えるLS方程式のセット

$$\begin{cases} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = G_2^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = G_3^{(+)}(E)(V_{23} + V_{31})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{cases}$$

※チャンネル2に入射波をもつ波の混入は、2つ目のLS方程式によって防がれている。

Faddeev分解

$$\begin{aligned} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle &= \frac{i\eta}{E - H_0 + i\eta} |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle + G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ &= G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = \sum_{i=1}^3 |\chi_{i,(1)}^{(+)}\rangle \end{aligned}$$

$$|\chi_{i,(1)}^{(+)}\rangle \equiv G_0^{(+)}(E)V_{jk}|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle$$

Faddeev方程式(1/3)

$$\begin{aligned}
 G_0^{(+)}(E) V_{23} &\longrightarrow |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\
 G_0^{(+)}(E) V_{31} &\longrightarrow |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = G_2^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\
 G_0^{(+)}(E) V_{12} &\longrightarrow |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = G_3^{(+)}(E) (V_{23} + V_{31}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle
 \end{aligned}$$


 $|\chi_{i,(1)}^{(+)}\rangle \equiv G_0^{(+)}(E) V_{jk} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle$

$$\begin{cases}
 |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{23} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_0^{(+)}(E) V_{23} G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\
 |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{31} G_2^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\
 |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{12} G_3^{(+)}(E) (V_{23} + V_{31}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle
 \end{cases}$$

Faddeev方程式(2/3)

$$\left\{ \begin{array}{l} |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{23} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_0^{(+)}(E) V_{23} G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{31} G_2^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{12} G_3^{(+)}(E) (V_{23} + V_{31}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{array} \right.$$

$$(H_0 + V_{23} - E) |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle = 0 \longrightarrow G_0^{(+)}(E) V_{23} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle = |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle$$

$$G_0^{(+)}(E) V_{ij} G_k^{(+)}(E) = G_k^{(+)}(E) V_{ij} G_0^{(+)}(E)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E) V_{23} \left(|\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle \right) \\ |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle = G_2^{(+)}(E) V_{31} \left(|\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle \right) \\ |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle = G_3^{(+)}(E) V_{12} \left(|\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle \right) \end{array} \right.$$

Faddeev方程式(3/3)

$$\begin{cases} |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E)V_{23}\left(|\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle\right) \\ |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle = G_2^{(+)}(E)V_{31}\left(|\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle\right) \\ |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle = G_3^{(+)}(E)V_{12}\left(|\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle\right) \end{cases}$$

チャンネル1に入射波をもつ散乱波

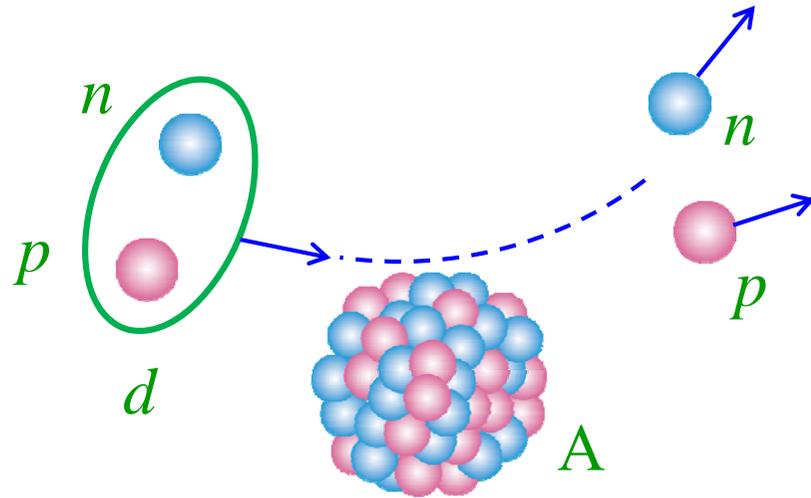
$$\begin{aligned} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle &= |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle \\ &+ \left[G_1^{(+)}(E)V_{23}G_0^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12}) + G_2^{(+)}(E)V_{31}G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23}) \right. \\ &\quad \left. + G_3^{(+)}(E)V_{12}G_0^{(+)}(E)(V_{23} + V_{31}) \right] |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{aligned}$$

- 解の一意性が保証。
- 全ての組み替えチャンネルが生成される。
- Disconnected diagram は存在しない。

ここからの話

- 重陽子(陽子と中性子の2体系)と原子核の反応を考える。
- 3体反応理論の困難を認識した上で、Faddeev 方程式を解かずに済む方法を考える。
 - ✓ 厳密解法を用いる計算は**大変**(最近はそれが流行?)。
 - ✓ 議論できる物理が**制限**される。
 - ✓ 問題が解けることと問題を**理解**することは異なる(cf. 実験)。
- 連続状態離散化チャンネル結合法(Continuum-Discretized Coupled-Channels method; **CDCC**)の理論的基盤を示す。

$(p+n)+A$ three-body scattering problem



Assumptions for simplicity:

- No spins
- No Coulomb
- No absorption (imaginary pot.)
- 2-body problem solved

Schrödinger Equation

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0.$$

$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \phi_d + \frac{1}{E - \underbrace{(K + V_{pn})}_{\equiv H_d} + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

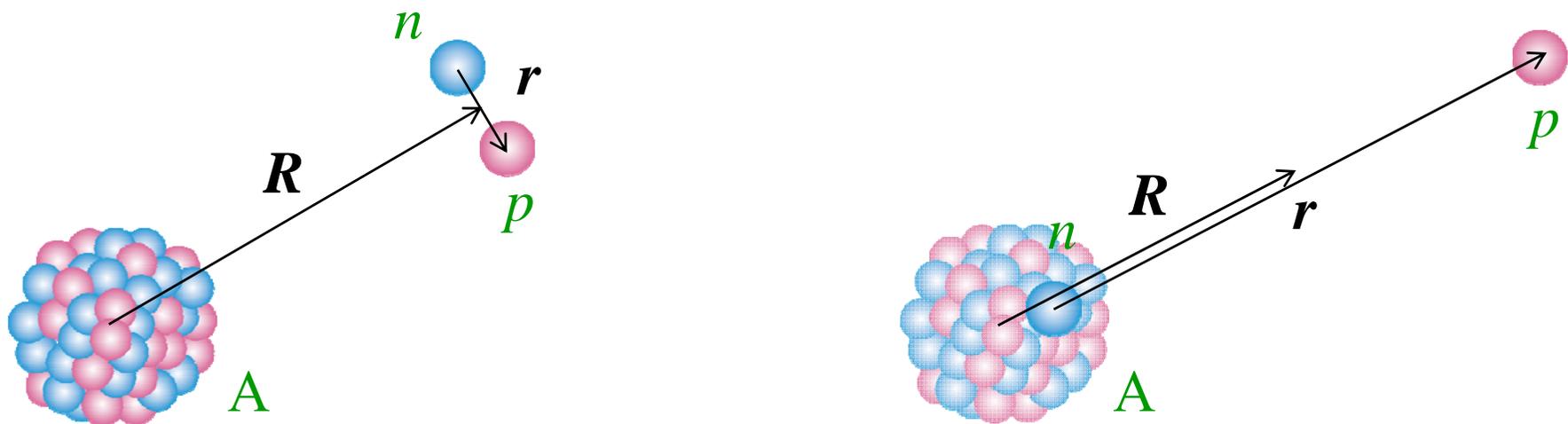
Lippmann-Schwinger (LS) equation

Problems of the LS equation

$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

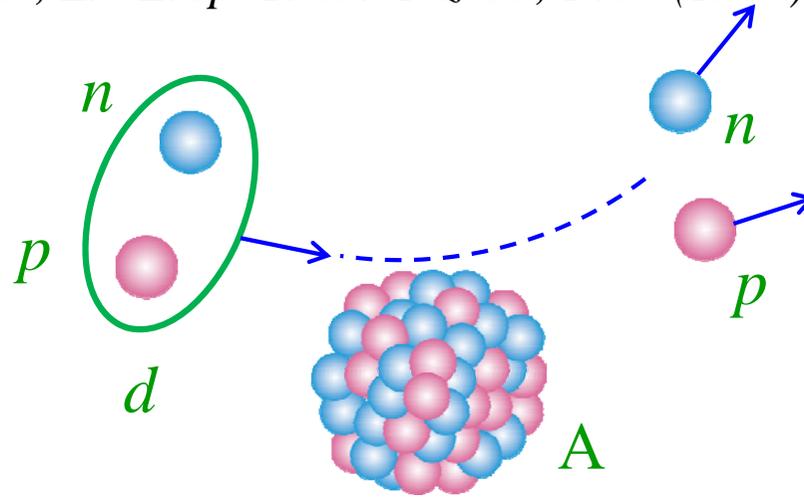
1. Absence of **the rearrangement channels**
2. Divergence problem due to **the disconnected diagram**
3. **Nonuniqueness** of the solution

The b.c. of the LS Eq. is not appropriate.



The Faddeev theory

L. D. Faddeev, Zh. Eksp. Theor. Fiz. 39, 1459 (1960) [Sov. Phys. JETP 12, 1014 (1961)].



$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Faddeev Eqs.

$$[E - K - V_{pn}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n),$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = V_{nA} \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = V_{pA} \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

Three-body theory in a model space

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Distorted Faddeev Eqs. not pair int. but 3-body int.

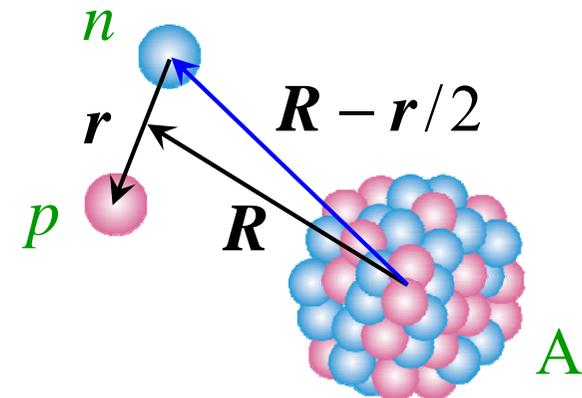
$$[E - K - V_{pn} - \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n),$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = (V_{nA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = (V_{pA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{pA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$$\mathcal{P}_0 e^{-\mu(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)^2} \rightarrow e^{-\mu R^2} e^{-\mu r^2/4}$$

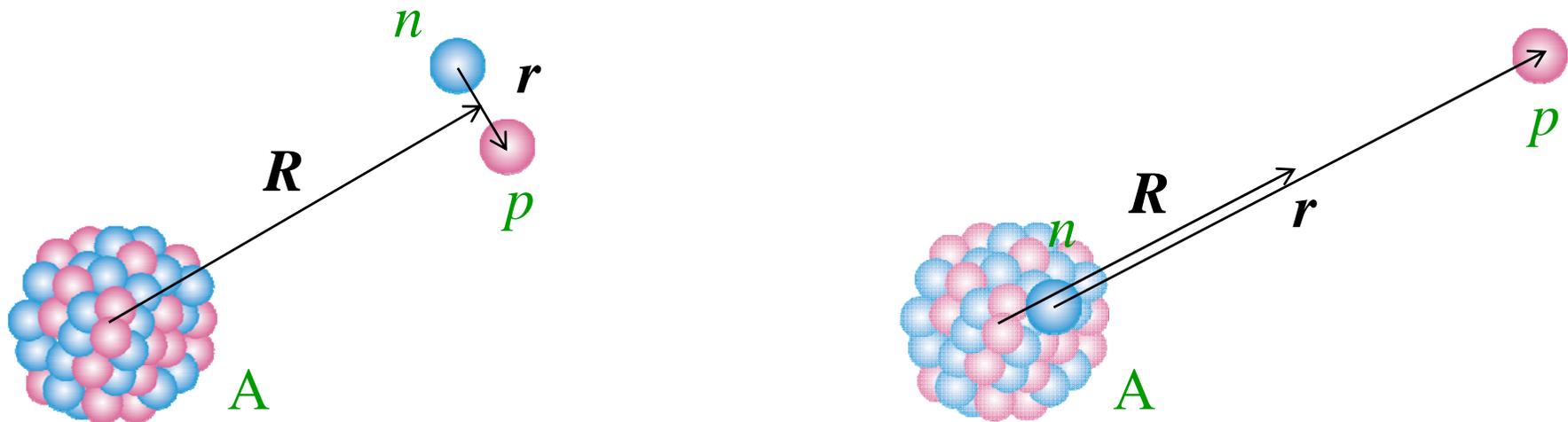


Problems of the LS equation

$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

1. Absence of **the rearrangement channels**
- ✓ 2. Divergence problem due to **the disconnected diagram**
- ✓ 3. **Nonuniqueness** of the solution

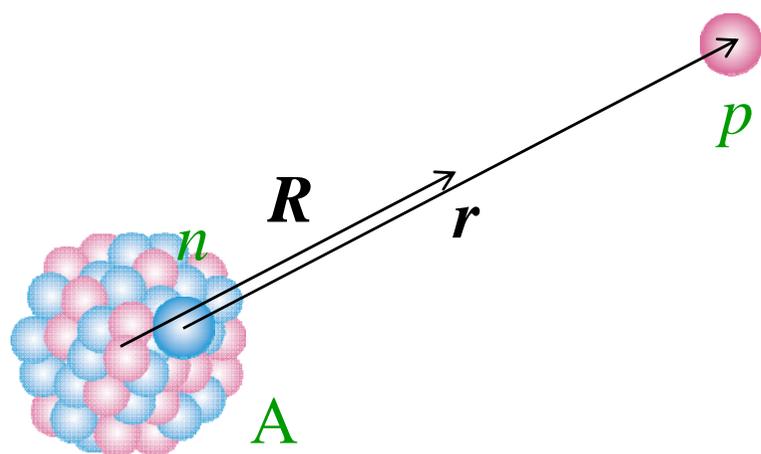
The b.c. of the LS Eq. is not appropriate.



l -truncation, the center of CDCC

N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);

N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).



$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$\mathcal{P}_{l_{\max}}$ smears out \hat{r} w/ the resolution of $1/l_{\max}$.

[If $l_{\max} \rightarrow \infty$, it means $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$.]

- We have no rearrangement-like channel in the asymptotic region because of $\mathcal{P}_{l_{\max}}$.
- As l_{\max} increases, the coupling between the 1st Eq. and the other two becomes weaker.

Three-body theory in a model space

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Distorted Faddeev Eqs.

not pair int. but 3-body int. $\rightarrow 0$

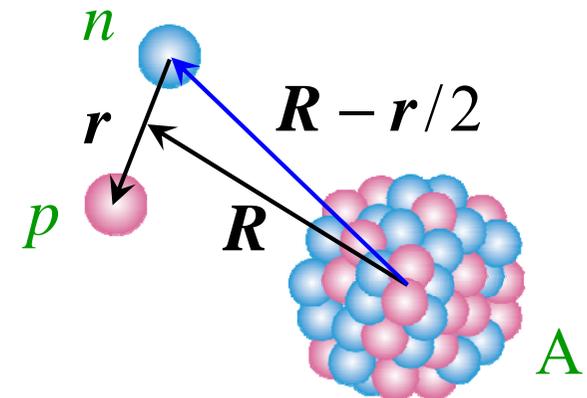
$$[E - K - V_{pn} - \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n)$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = (V_{nA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = (V_{pA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{pA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$$\mathcal{P}_0 e^{-\mu(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)^2} \rightarrow e^{-\mu R^2} e^{-\mu r^2/4}$$



CDCC, as an alternative to the Faddeev theory

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*

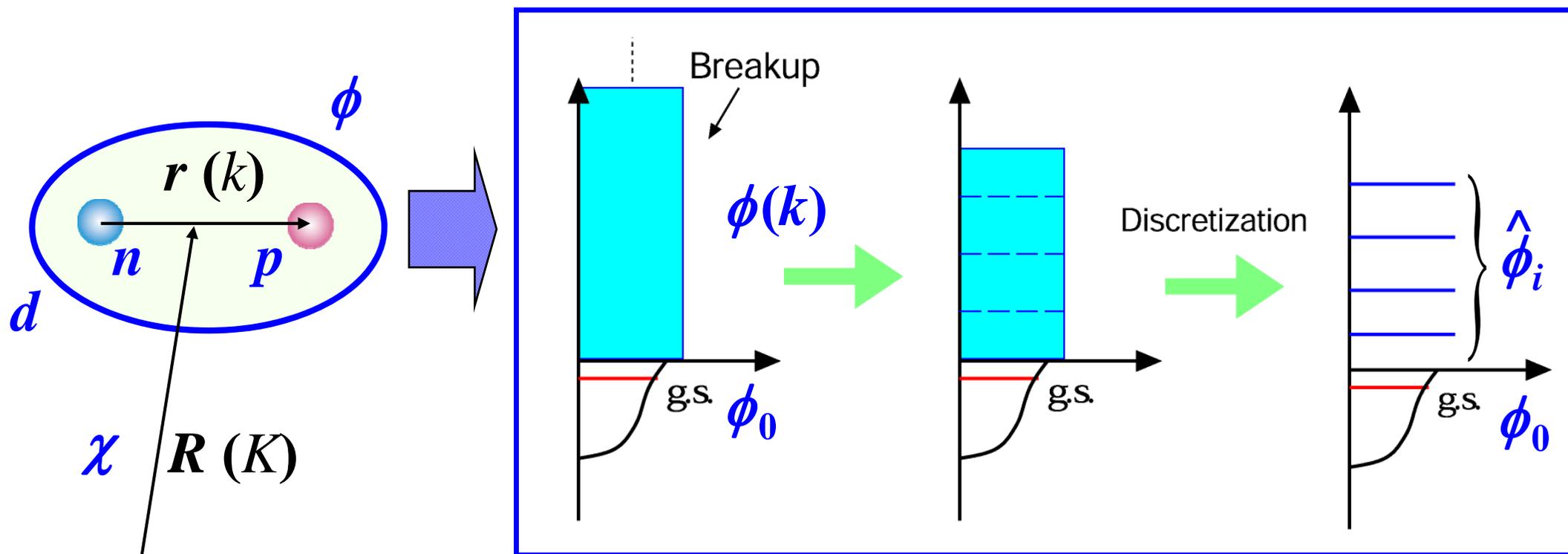
CDCC solves the following LS eq.:

$$\Psi^{\text{CDCC}} = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}} \Psi^{\text{CDCC}}.$$

CDCC gives a proper solution to a three-body scattering problem *if* the solution converges w/ respect to l .

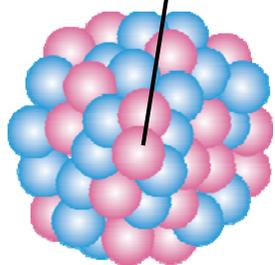
- **Continuum-Discretization has nothing to do w/ the justification of CDCC.**
- l -truncation allows one to **truncate** also r and k .
- Convergence for other quantities (r_{\max} , k_{\max} , and $\Delta\mathbf{k}$, etc.) must be confirmed to obtain a proper solution to the LS Eq.

The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after l -truncation)



$$\psi = \phi_0 \chi_0 + \int_0^\infty \phi_k \chi_k dk \quad \Rightarrow \quad \psi^{\text{CDCC}} = \sum_i^{i_{\max}} \hat{\phi}_i \hat{\chi}_i$$

cf. M. Kamimura, Yahiro, Iseri, Sakuragi, Kameyama, and Kawai, *PTP Suppl.* **89**, 1 (1986);
 N. Austern, Iseri, Kamimura, Kawai, Rawitscher, and Yahiro, *Phys. Rep.* **154** (1987) 126;
 M. Yahiro, Ogata, Matsumoto, and Minomo, *PTEP* **2012**, 01A206 (2012).



A

Faddeev-AGS vs. CDCC

N. J. Upadhyay, A. Deltuva, F. M. Nunes, PRC 85, 054621 (2012).

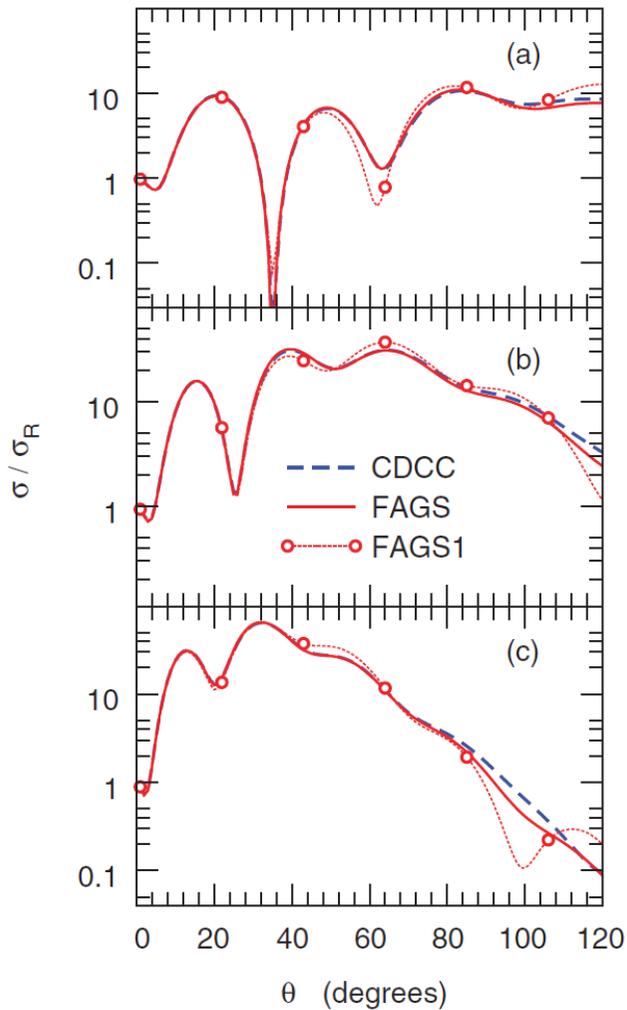


FIG. 2. (Color online) Elastic cross section for $d+^{10}\text{Be}$: (a) $E_d = 21.4$ MeV, (b) $E_d = 40.9$ MeV, and (c) $E_d = 71$ MeV.

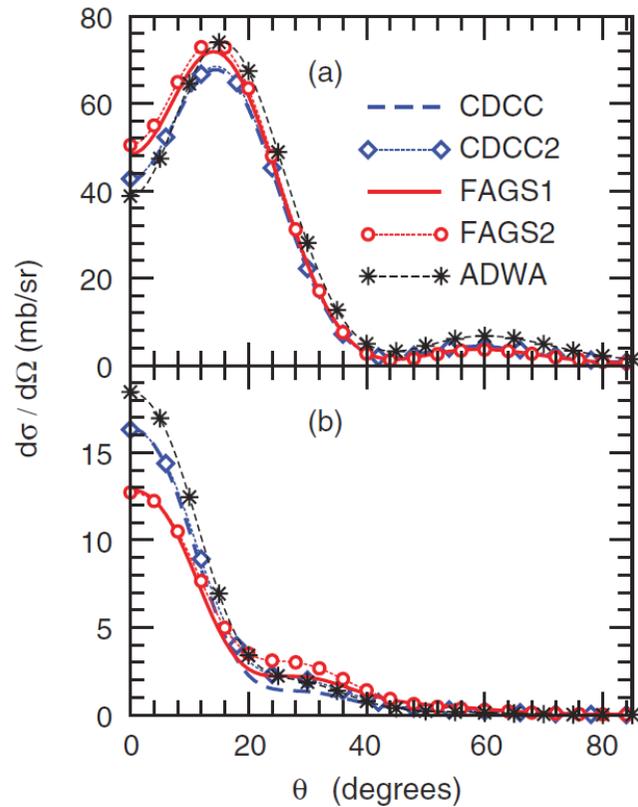


FIG. 6. (Color online) Angular distribution for $^{12}\text{C}(d, p)^{13}\text{C}$: (a) $E_d = 12$ MeV and (b) $E_d = 56$ MeV.

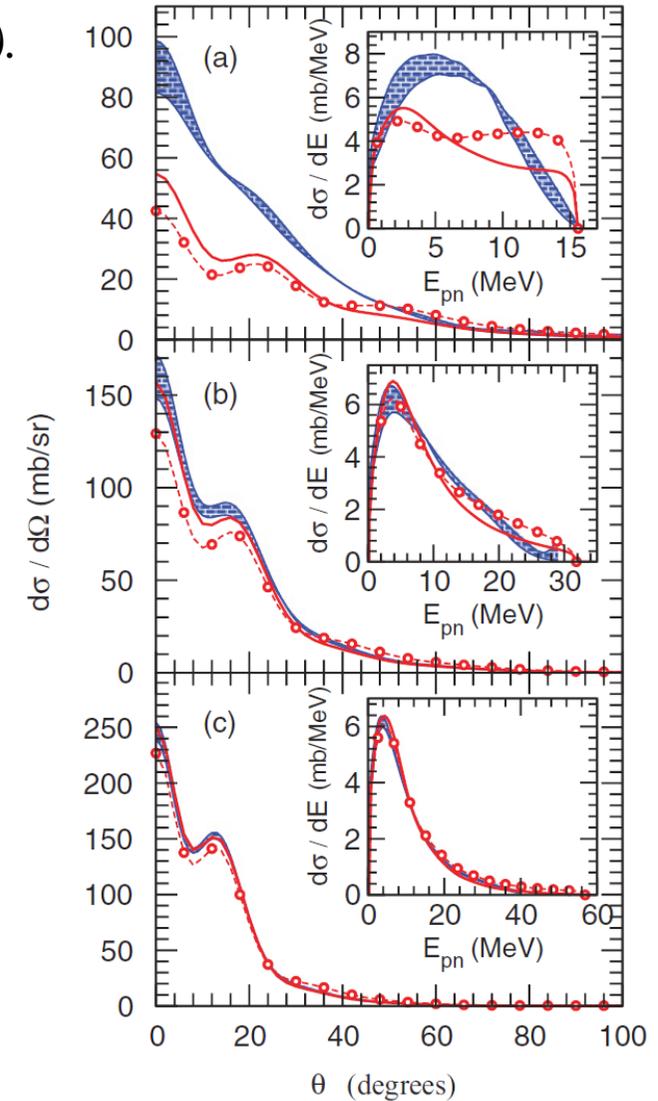
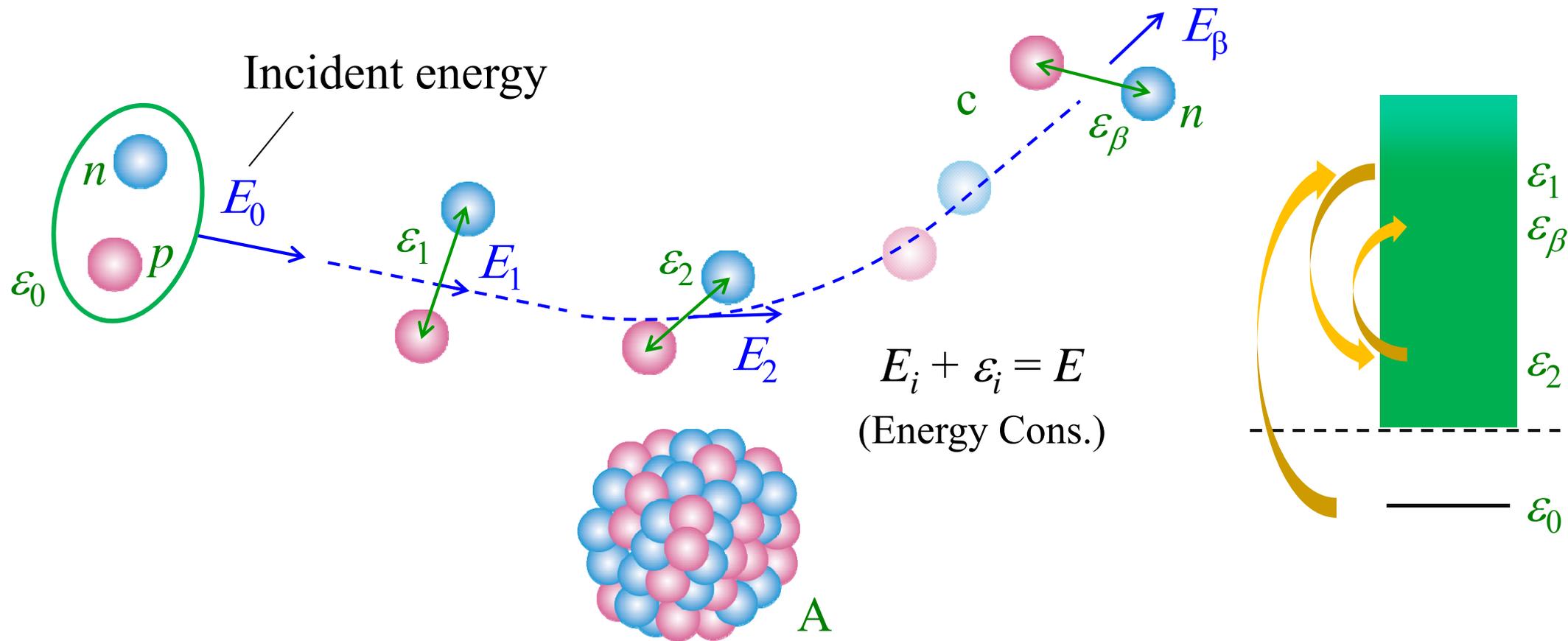


FIG. 8. (Color online) Breakup distributions for the $^{10}\text{Be}(d, pn)^{10}\text{Be}$ reaction at (a) $E_d = 21$ MeV, (b) $E_d = 40.9$ MeV, and (c) $E_d = 71$ MeV. Results for CDCC (hatched band), FAGS (solid), and FAGS1 (circles).

Description of deuteron breakup process by CDCC



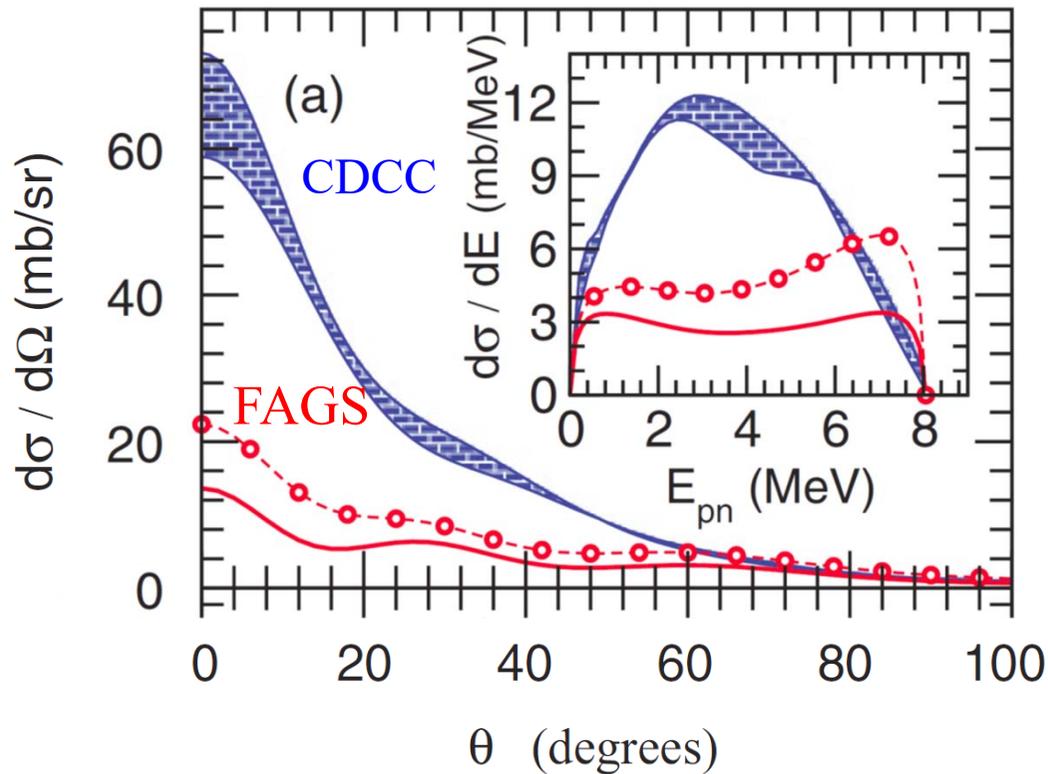
- Open channels ($E_i > 0$): directly connected to observables
- Closed channels ($E_i < 0$): virtual breakup channels

Neglected in the preceding study

Applicability of CDCC to low energy BU process

N. J. Upadhyay et al., PRC 85, 054621 (2012).

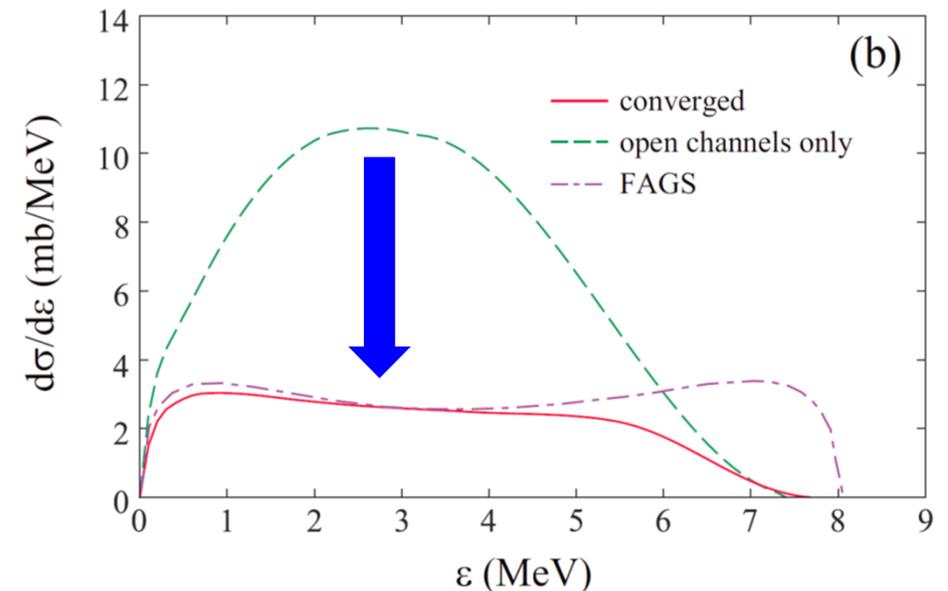
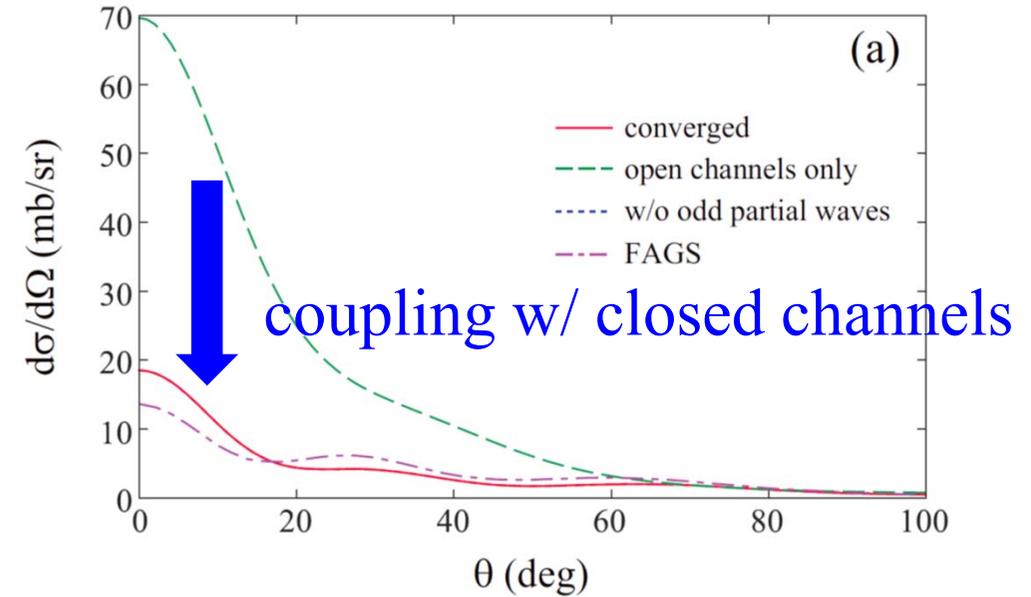
$^{12}\text{C}(d,pn)^{12}\text{C}_{\text{gs}}$ at $E_d = 12$ MeV



CDCC severely overshoots the result of FAGS, if closed-channels are neglected.

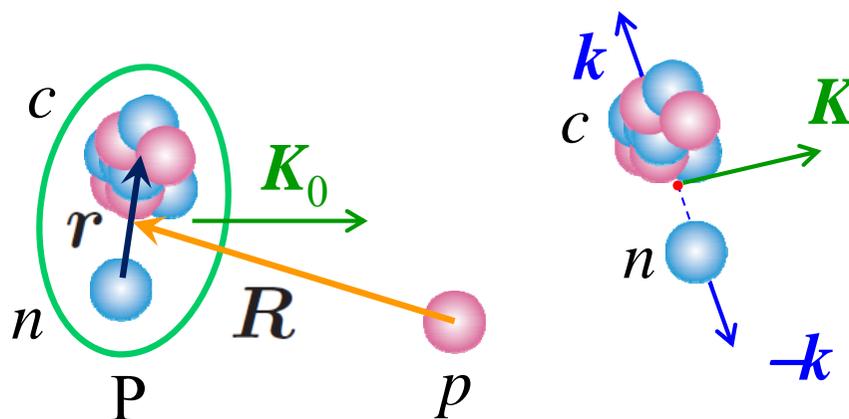
cf. triple-alpha study

KO and K. Yoshida, PRC 94, 051603(R) (2016).



CDCC to DWIA

陽子による入射核
分解反応



$$T_{\text{CDCC}} = \left\langle \varphi_{nc,\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \left| v_{pn} + U_{pc} \right| \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) \chi_i^{(+)}(\mathbf{R}) \right\rangle$$



1. Weak coupling to the BU channels

$$\approx \left\langle \varphi_{nc,\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \left| v_{pn} + U_{pc} \right| \varphi_0(\mathbf{r}) \chi_{\text{DW}}^{(+)}(\mathbf{R}) \right\rangle$$

p -P の散乱波



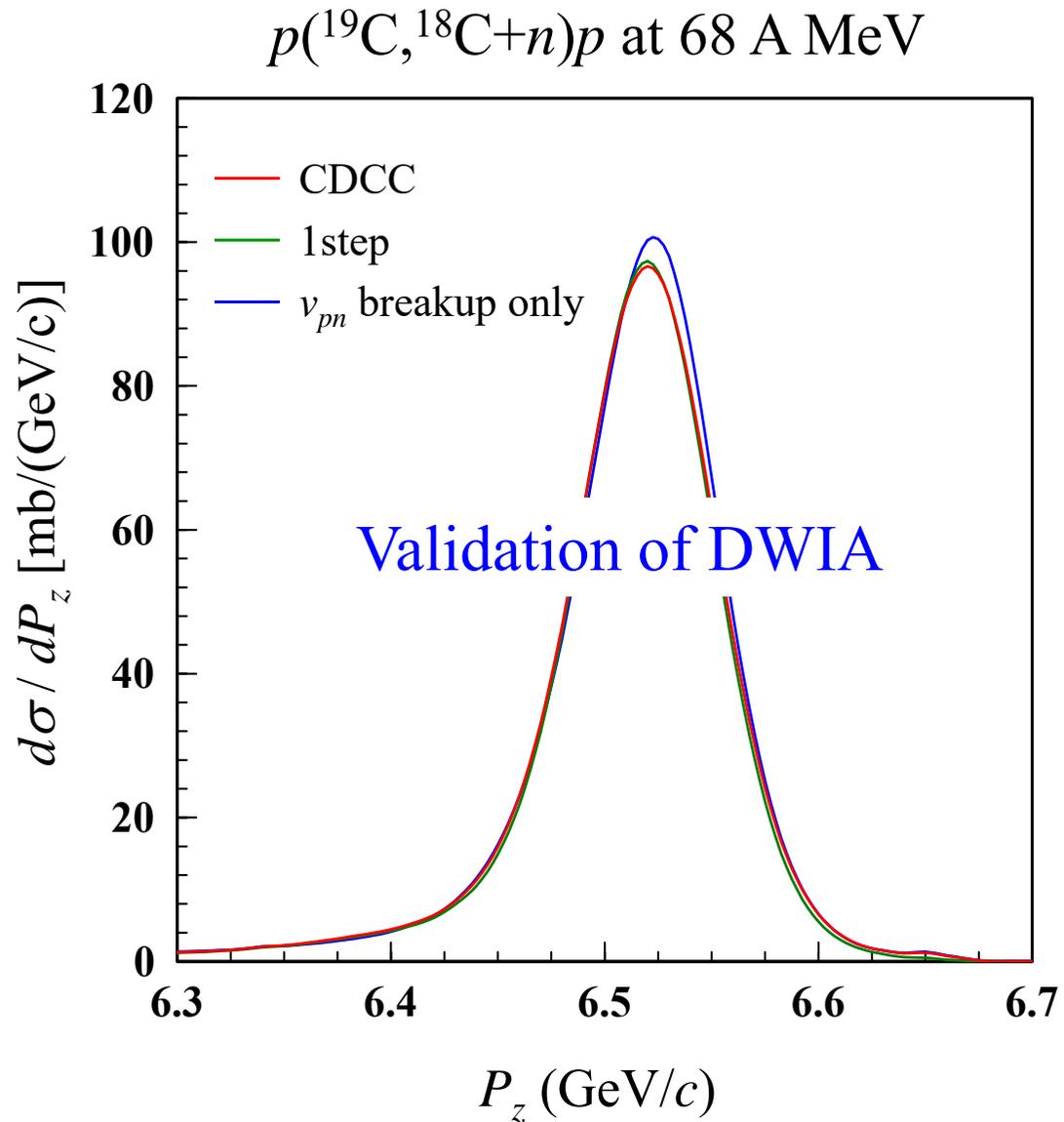
2. Only v_{pn} breaks up P.

$$\approx \left\langle \chi_{nc,\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) \chi_{pc,\mathbf{K}}^{(-)}(\mathbf{R}) \left| v_{pn} \right| \varphi_0(\mathbf{r}) \chi_{\text{DW}}^{(+)}(\mathbf{R}) \right\rangle = T_{\text{DWIA}}$$

陽子による中性子
ノックアウト反応

n -c DW (w/ E -dep. complex pot. and/or large l)

Test of the two assumptions



まとめ

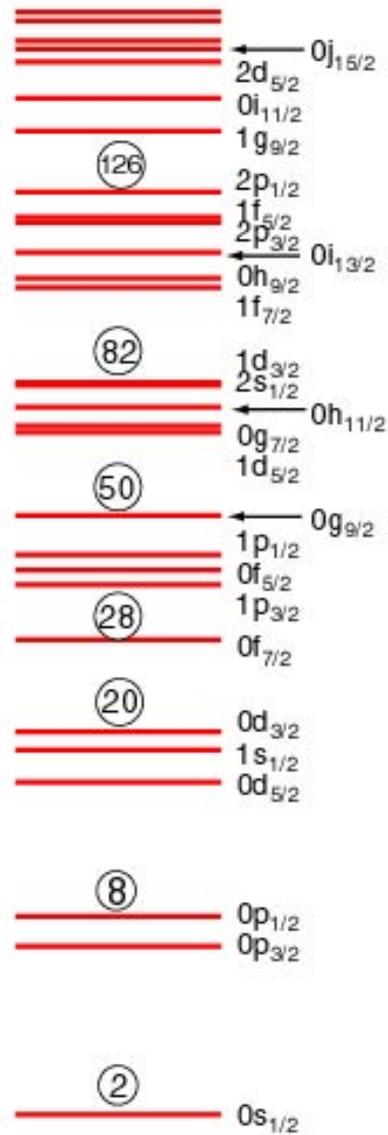
- CDCCは模型空間中の“厳密”3体反応理論である。
 - ✓ 一般には単一のLS方程式を用いることは許されず、Faddeev方程式を解いてはじめて3体系の正しい散乱波が求まる(計算は大変)。
 - ✓ l -truncation を施した模型空間の中では、単一のLS方程式を用いることが許され得る。
 - ✓ 有限の l_{\max} で解が収束する場合には、CDCCはFaddeev理論と等価であるとみなしてよい。
- 分解状態との結合が弱いとき、CDCCはDWIAに簡略化可能。
 - ✓ エネルギー移行が大きいときには、むしろDWIAの方が優れている。

私見

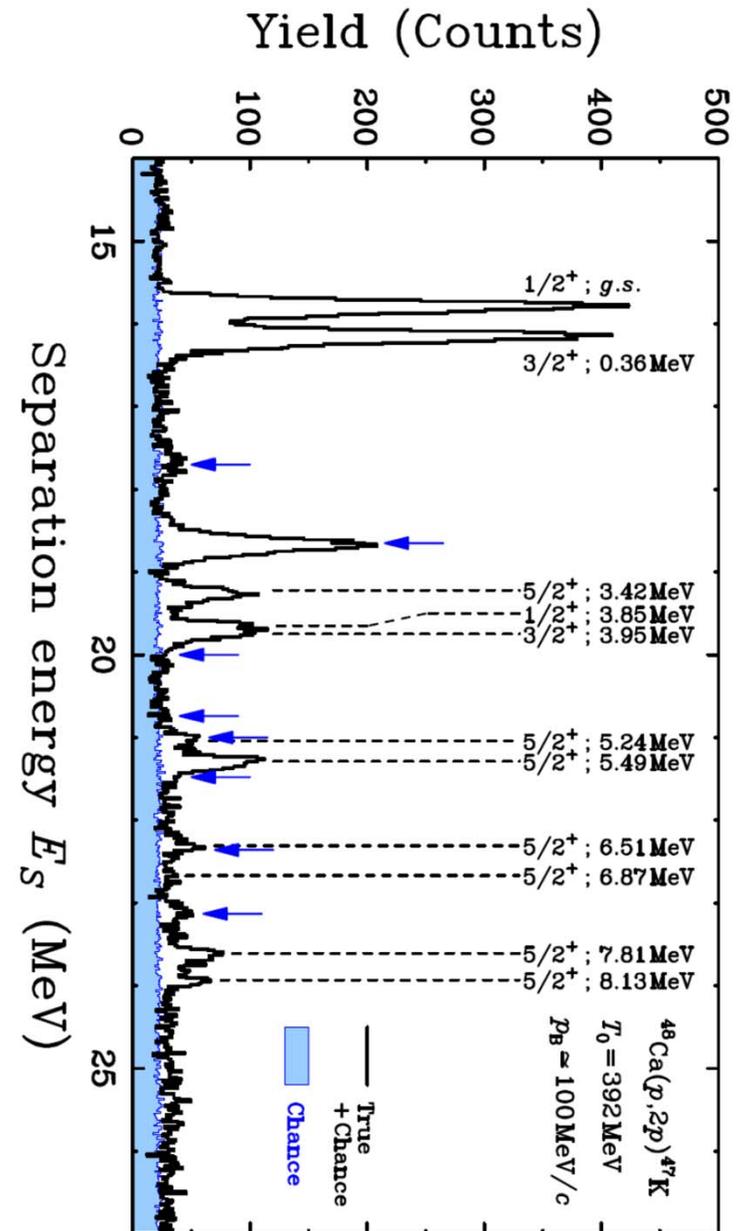
近似こそ物理の神髄。厳密理論は往々にして直観的理解を許さない。
また、現象を厳密に解ける問題に簡略化することも。それって厳密??

III. 「秩序の崩れをもたらす秩序の理解」 に向けた取り組み

How far does the indep.-part. picture hold?



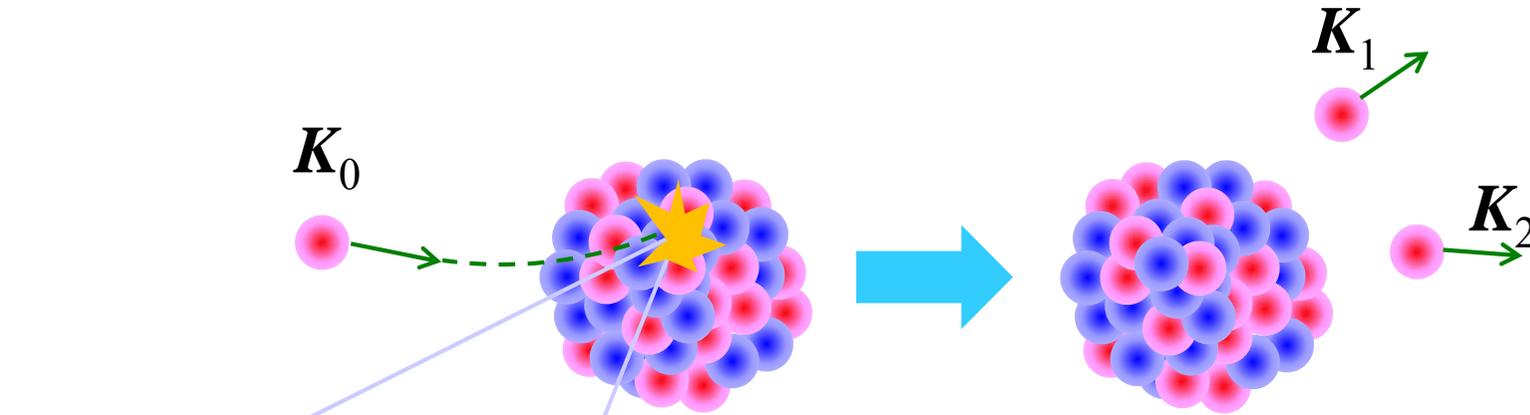
(a naive Shell Model)



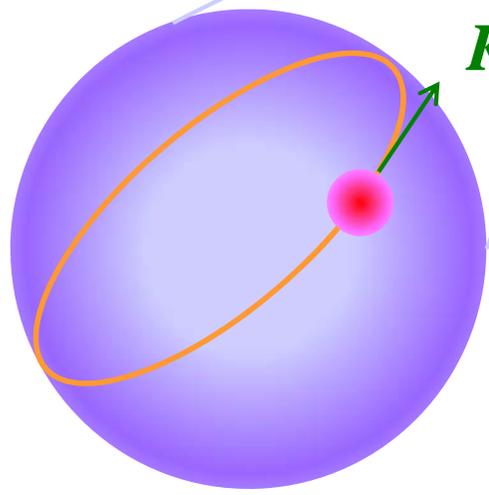
T. Wakasa, KO, and T. Noro, PPNP 96, 32 (2017).

$^{40}\text{Ca}(p,2p)^{39}\text{K}$ at 392 MeV (RCNP data)

The (p,2p) reaction



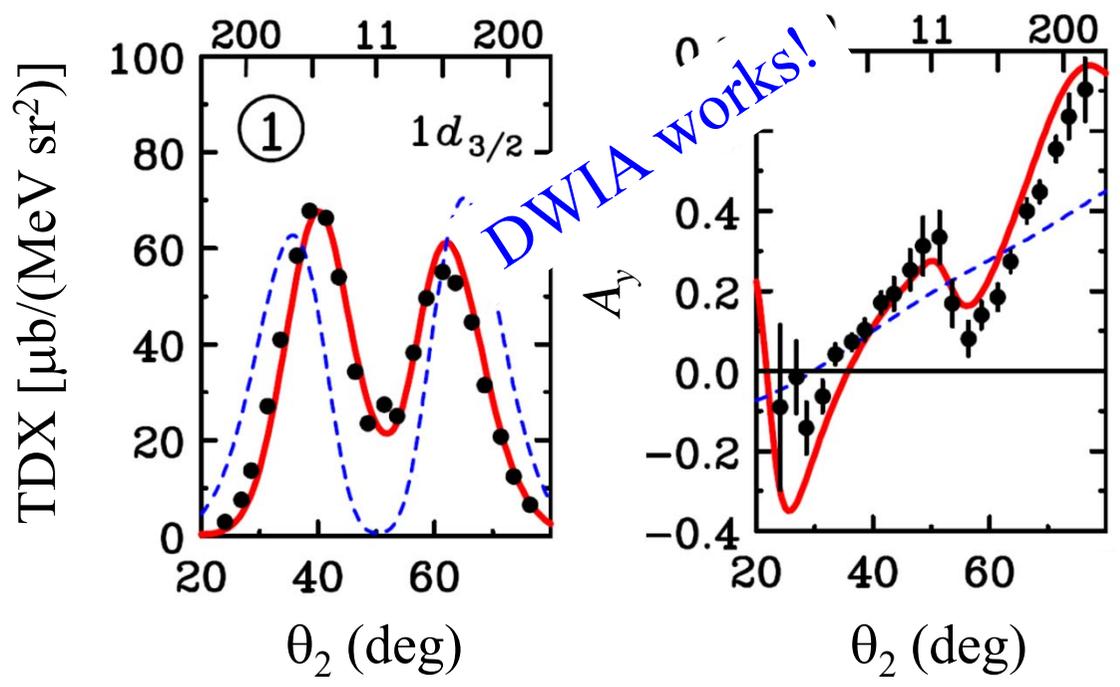
$$\mathbf{K}_N = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_0$$



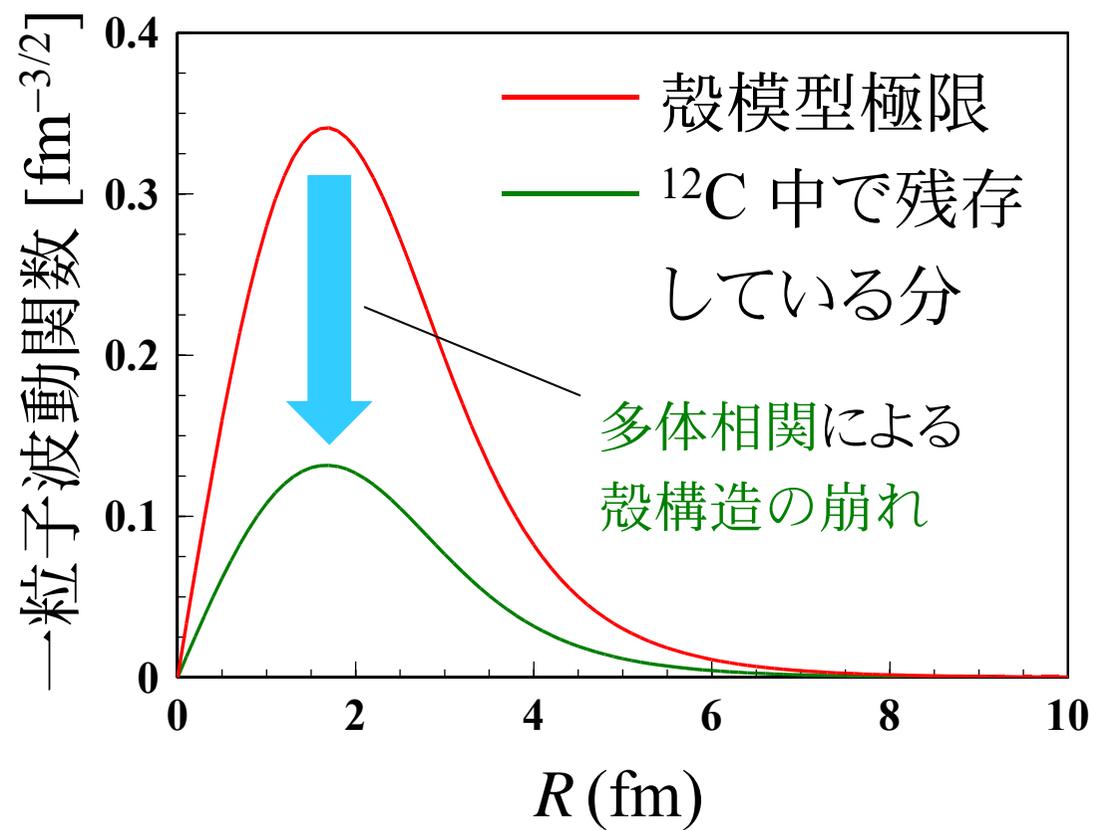
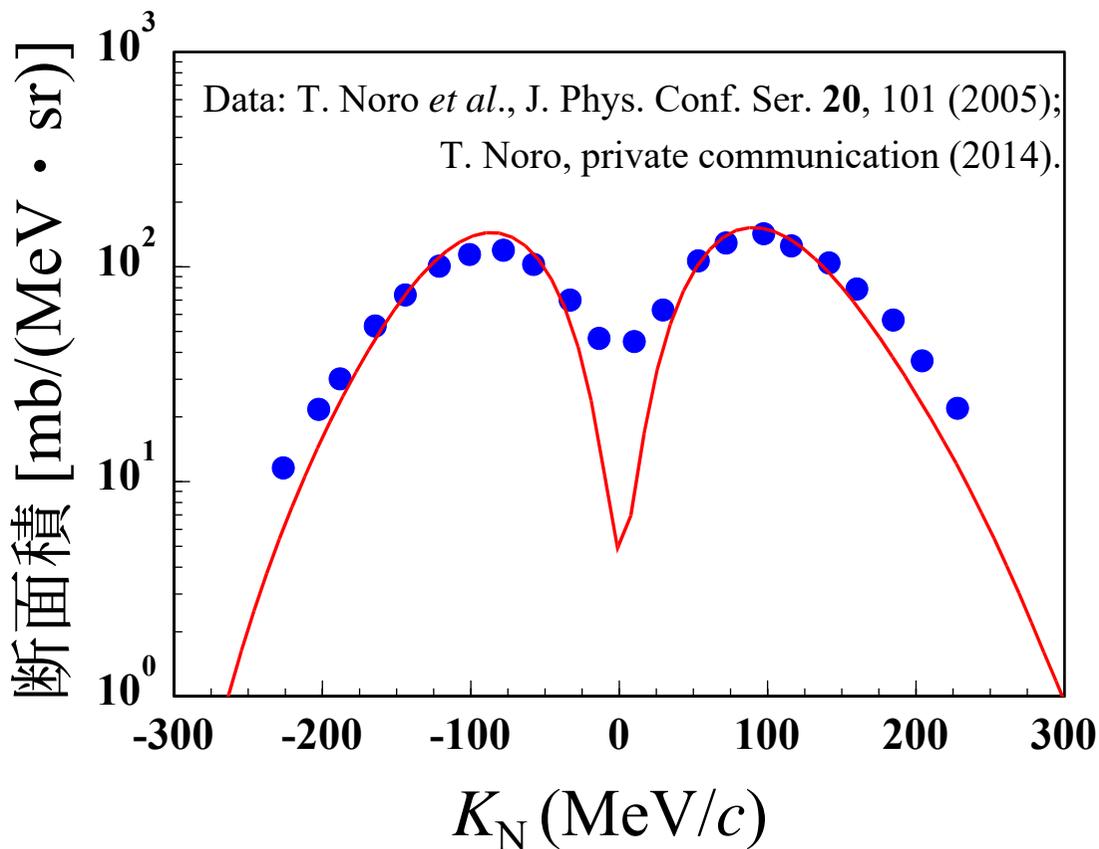
A “snapshot” of proton in a s.p. orbit in momentum space
(Thanks to DWIA!)

T. Wakasa, KO, and T. Noro, PPNP 96, 32 (2017).

$^{40}\text{Ca}(p,2p)^{39}\text{K}$ at 392 MeV (RCNP data)



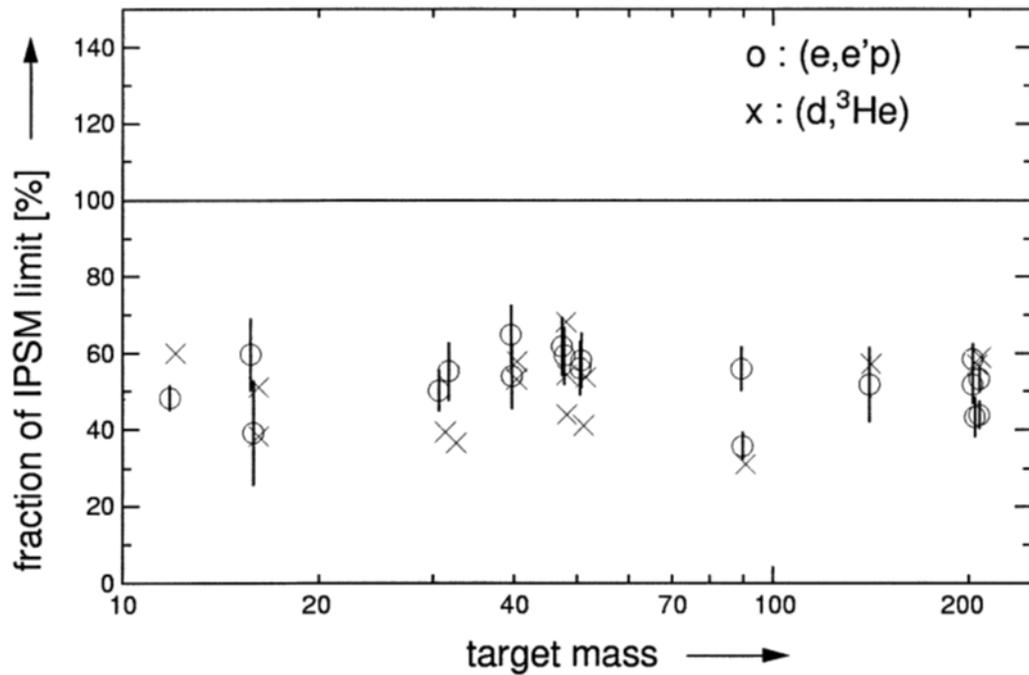
一粒子構造の抽出



- 原子核と陽子の相互作用の影響を(理論的に)除去し、逆フーリエ変換を行えば、一粒子波動関数の分布が得られる。
- また、断面積の絶対値から、一粒子構造の残存度がわかる。
= S因子

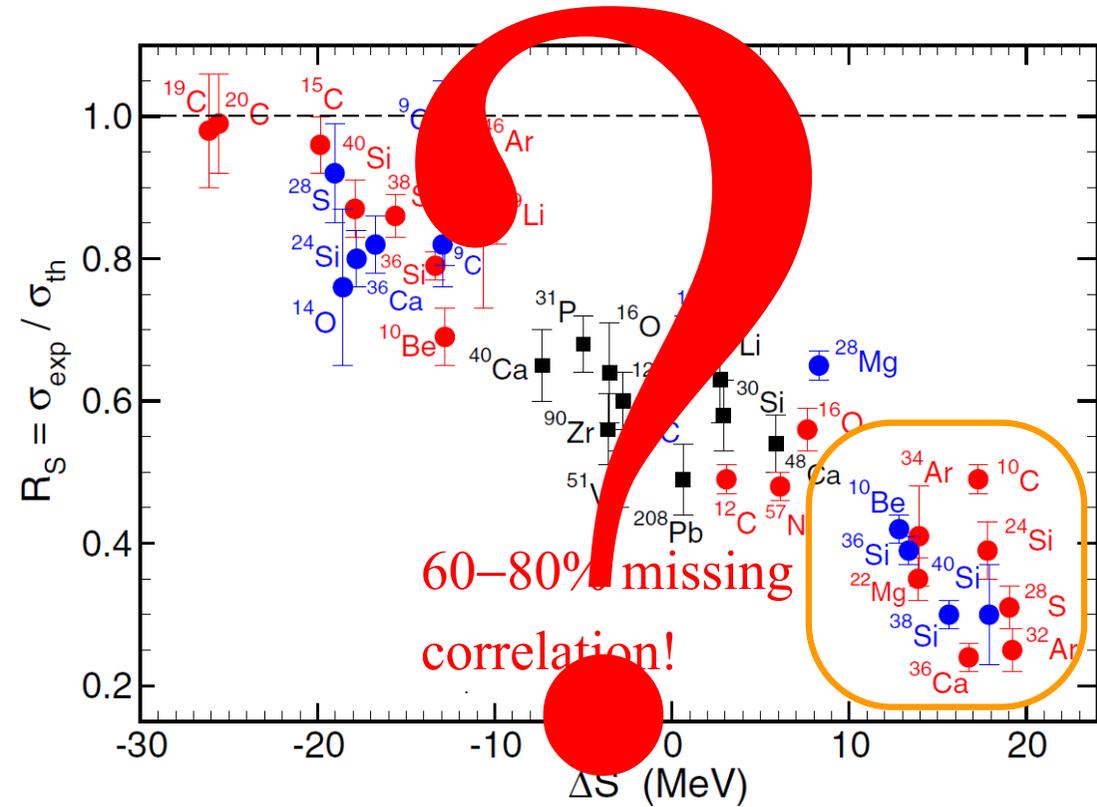
Missing correlations in shell model

Stable nuclei



G. J. Kramer, H. P. Blok, L. Lapikas, NPA **679**, 267 (2001).

Unstable nuclei



J. Tostevin and A. Gade, PRC **90**, 057602 (2014).

Order behind the breakdown of “order”

秩序の崩れをもたらす秩序の理解

1. *Systematics of the S factors* via (p,pN) reactions

- RCNP data for stable nuclei (Aoi)
/ RIBF data for unstable nuclei (Uesaka)
- Shell model (Utsuno and Shimizu) + mean field (Yoshida)
+ cluster (Kanada-En'yo)
- Off-shell NN transition matrix in nuclear medium w/ Ch-EFT (Kohno)



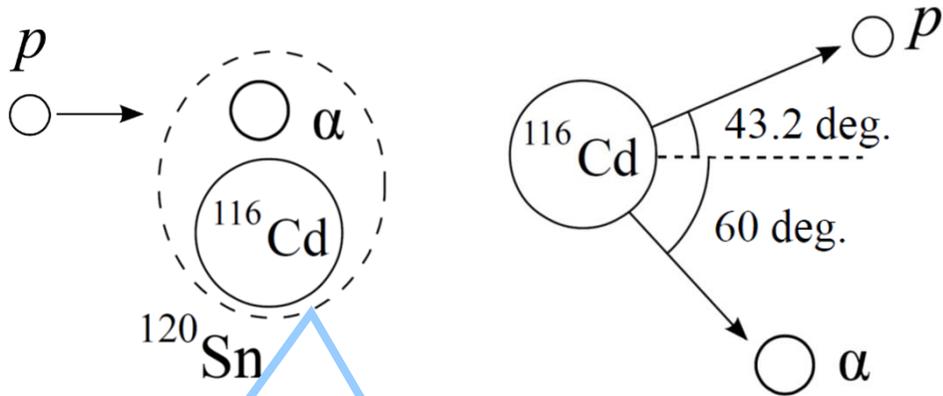
2. *Many-body correlations* underlying the melt of the (naïve) shell structure

- (p,pNN') for NN correlation (multi-nucleon knockout)
- (p,pn) for $2n$ halo nuclei followed by neutron decay to probe di-neutron correlation
- (p,pd) for pn (deuteron-like) correlation
- (p,pN) for deeply-bound nucleon for studying 3N-force effect
- $(p,p\alpha)$ for α correlation

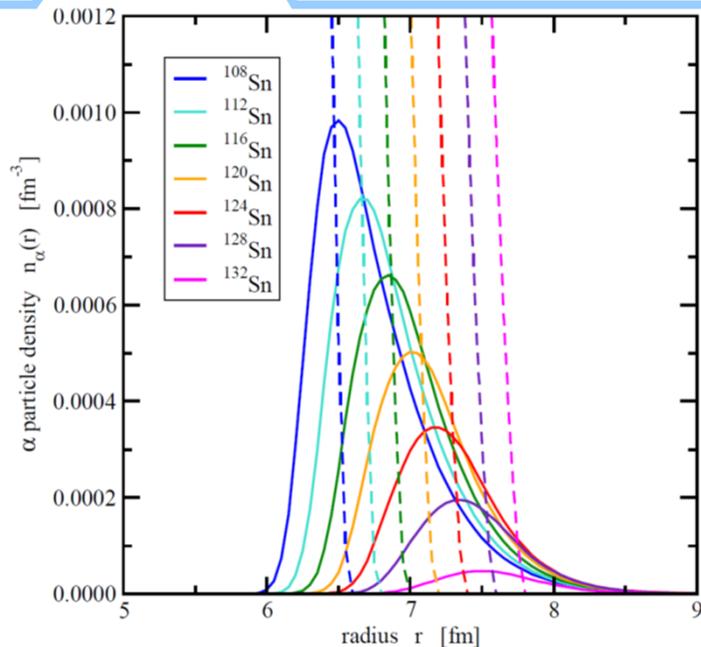
α -clustering in ^{120}Sn studied via $(p,p\alpha)$

K. Yoshida, K. Minomo, and KO, PRC 94, 044604 (2016).

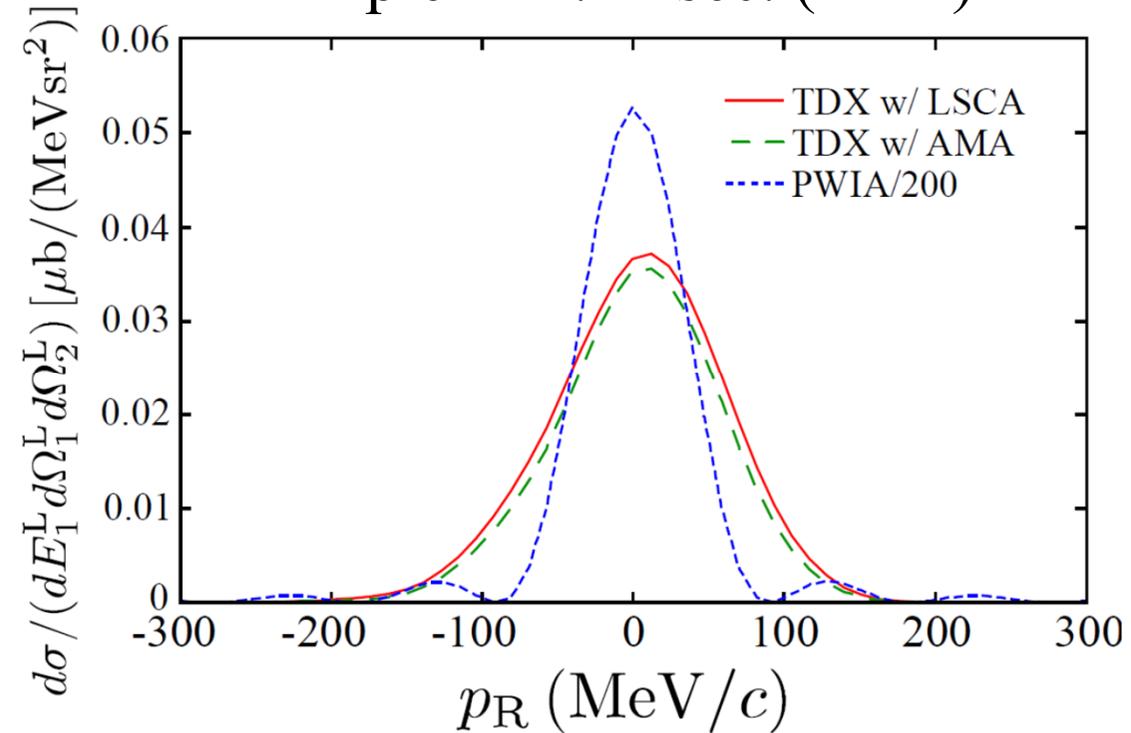
392 MeV



S. Typel, Phys. Rev. C **89**, 064321 (2014)



Triple Diff. X-sec. (TDX)



- **A 4s Pot. Model W. Fn.** is adopted.
- Distortion is extremely important (widen the width of the TDX).
- Factorization approxⁿ is verified.

(p,p α) as a probe of surface α

K. Yoshida, K. Minomo, and KO, PRC 94, 044604 (2016).

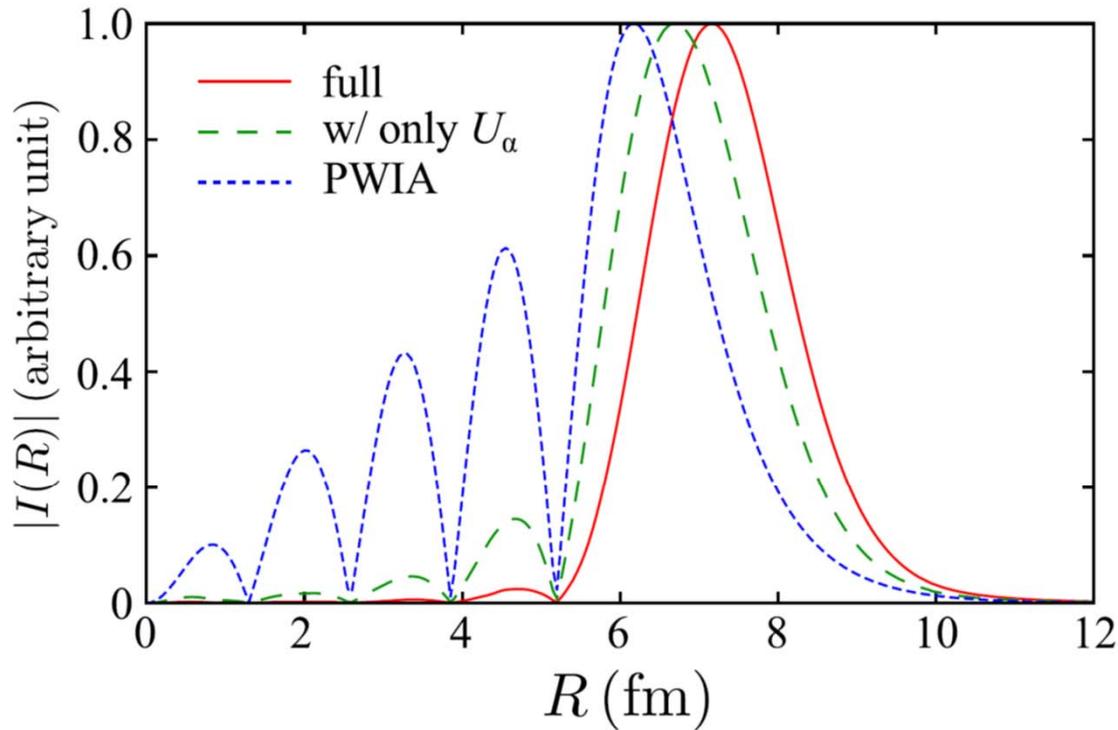
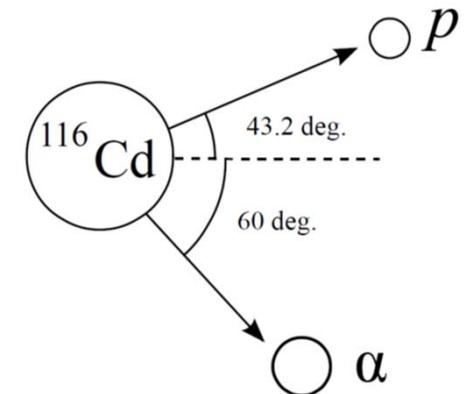
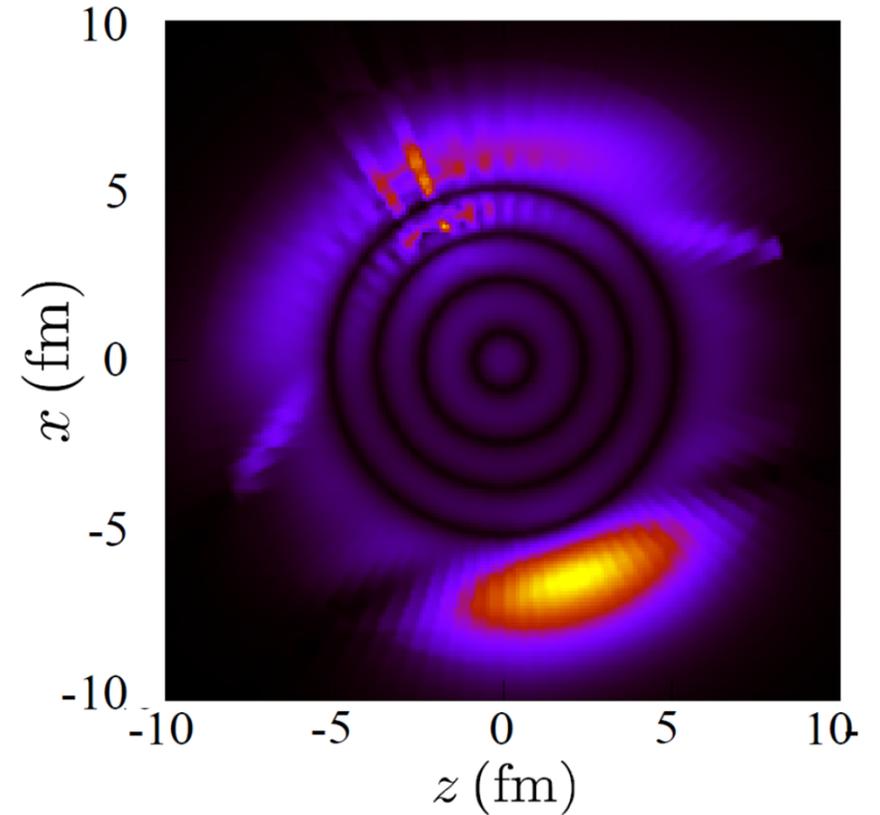
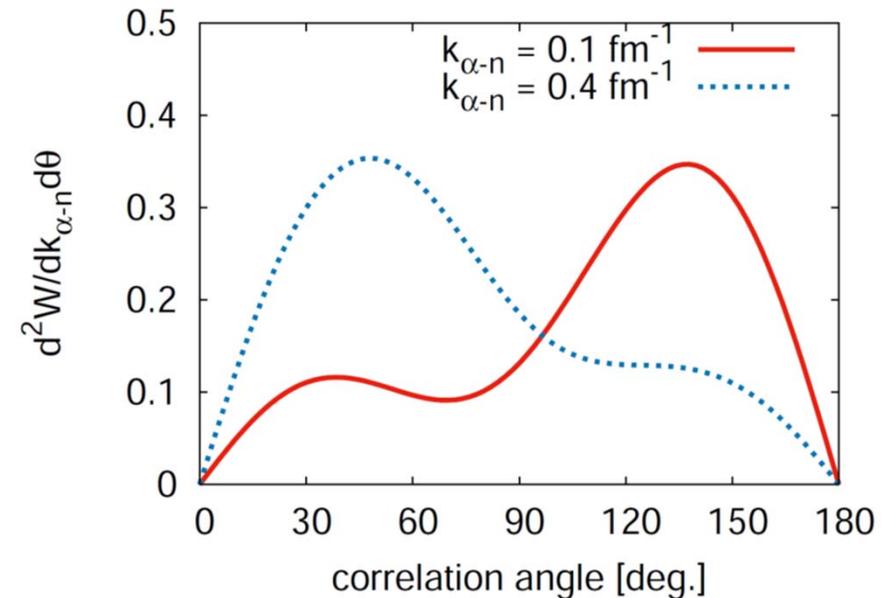
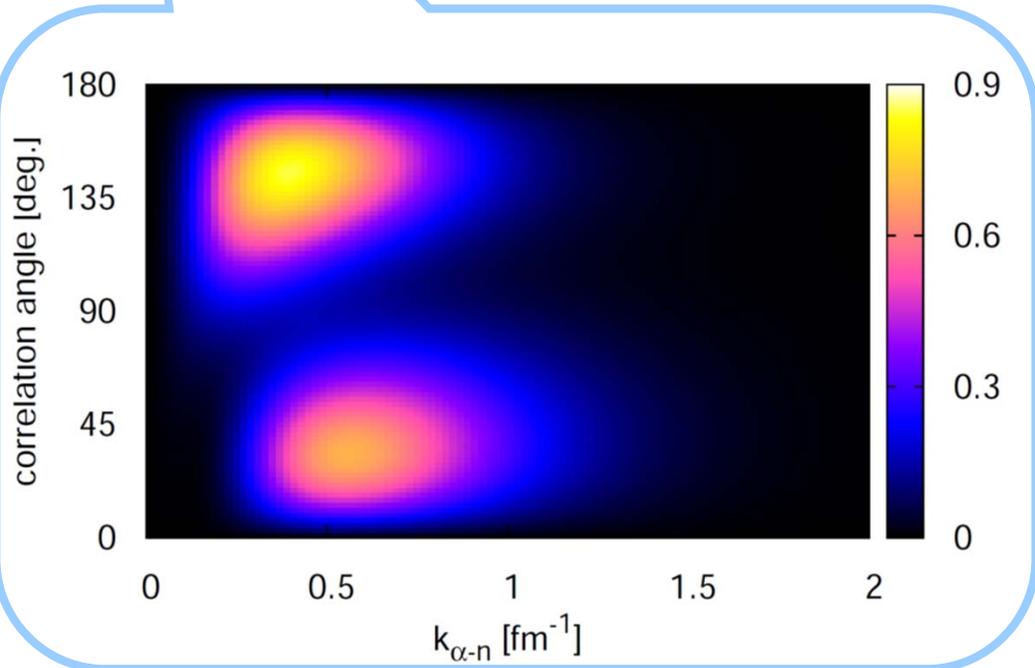
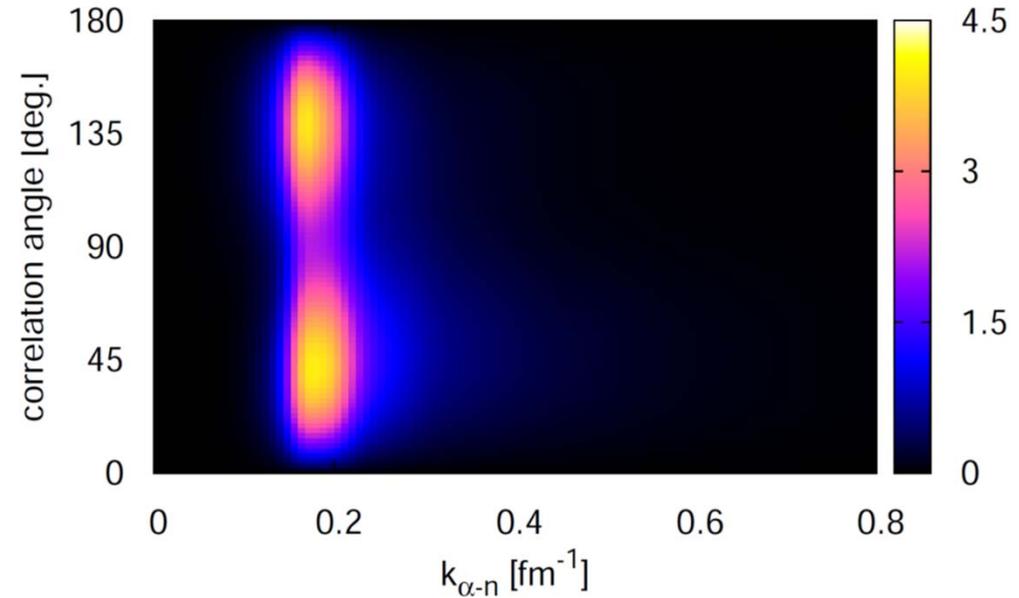
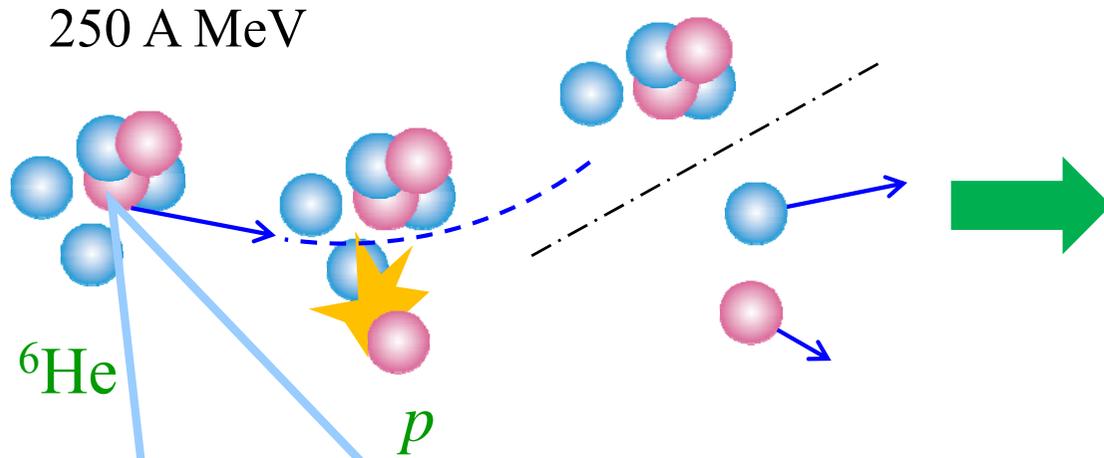


FIG. 6. $|I(R)|$ at $p_R = 0$ (solid line), the same but calculated with only the α - ^{116}Cd distorting potential U_α (dashed line), and the result with PWIA (dotted line). The results are normalized to unity at the peak position.



Proving 2n correlation in ${}^6\text{He}$ via (p,pn) process

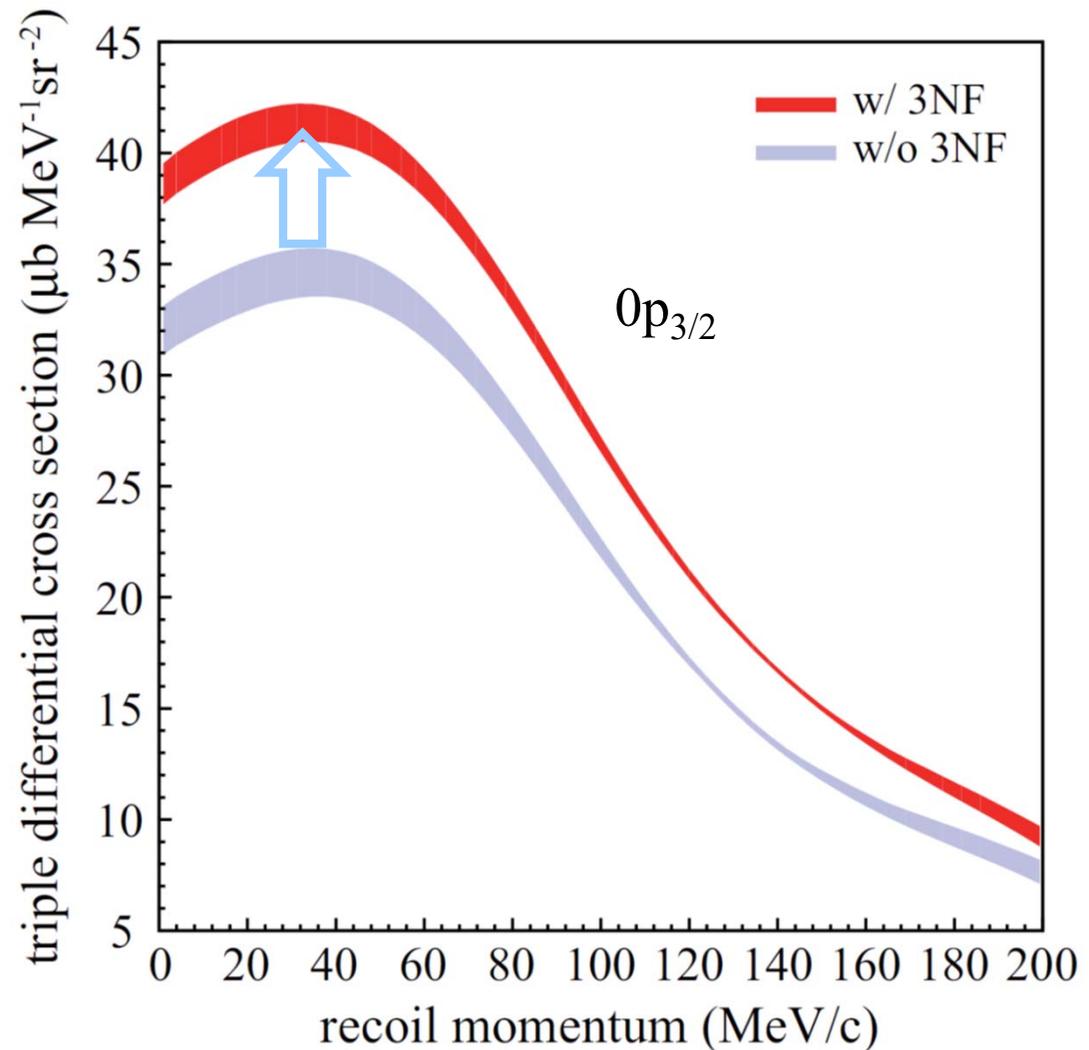
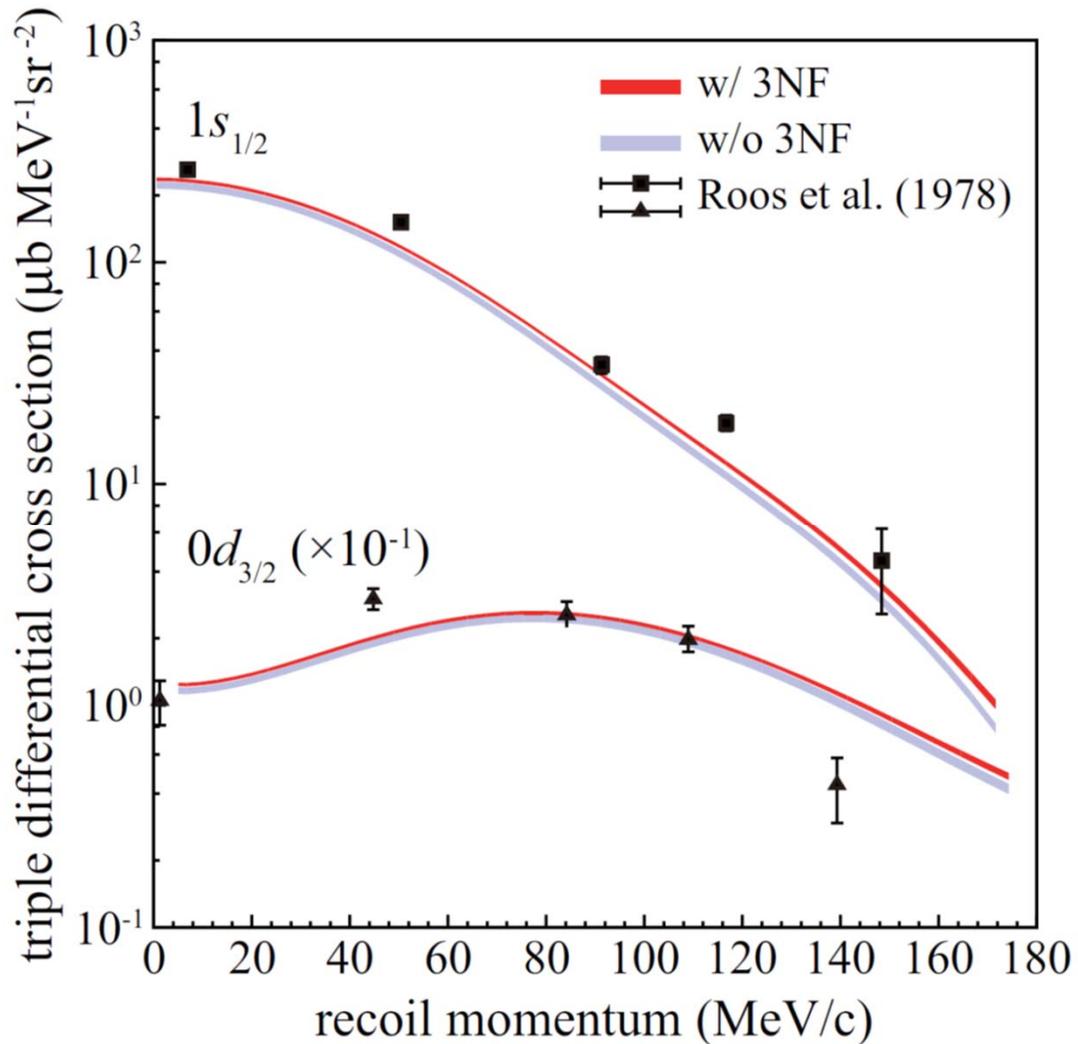
Y. Kikuchi, KO, Y. Kubota, M. Sasano, and T. Uesaka, PTEP 2016, 103D03 (2016).



(p,2p) as a probe of Ch-3NF effect

K. Minomo, M. Kohno, K. Yoshida, and KO, PRC 96, 024609 (2017).

$^{40}\text{Ca}(p,2p)\text{@}148.2\text{MeV}$



Order behind the breakdown of “order”

秩序の崩れをもたらす秩序の理解

1. *Systematics of the S factors* via (p,pN) reactions

- RCNP data for stable nuclei (Aoi)
/ RIBF data for unstable nuclei (Uesaka)
- Shell model (Utsuno and Shimizu) + mean field (Yoshida)
+ cluster (Kanada-En'yo)
- Off-shell NN transition matrix in nuclear medium w/ Ch-EFT (Kohno)



Going smoothly

2. *Many-body correlations underlying the melt of the (naïve) shell structure*

- (p,pNN') for NN correlation (multi-nucleon knockout)
- (p,pn) for $2n$ halo nuclei followed by neutron decay to probe di-neutron correlation
- (p,pd) for pn (deuteron-like) correlation
- (p,pN) for deeply-bound nucleon for studying 3N-force effect
- $(p,p\alpha)$ for α correlation

この講義で伝えなかったこと

- 定常散乱波を用いた散乱理論が気持ち悪いのは自然なこと。ただし、波束の理論を用いれば定常散乱波の理論は正当化可能。 $+i\eta$ の物理的な意味も明確。
- 3体の散乱理論は、解を正しく与える方程式を見出すこと自体が困難。これに対する解答が Faddeev 理論。
- 模型空間の中での“厳密”3体反応理論という考え方。有限の l で記述できる反応については、1つのLS方程式を解けばよい。それが CDCC の理論的基盤(連続状態の離散化はまた別の話)。
- DWIAは、ノックアウト反応の直観的な解釈を許す強力な3体反応模型(CDCCによる基礎付けも可能)。現実の原子核に発現する殻構造とその背後にある多核子相関の研究が進行中。
- 研究対象の拡大と物理の理解をもたらす近似(模型)は偉大。(ただし近似の基盤と適用限界は把握しておく必要あり。)