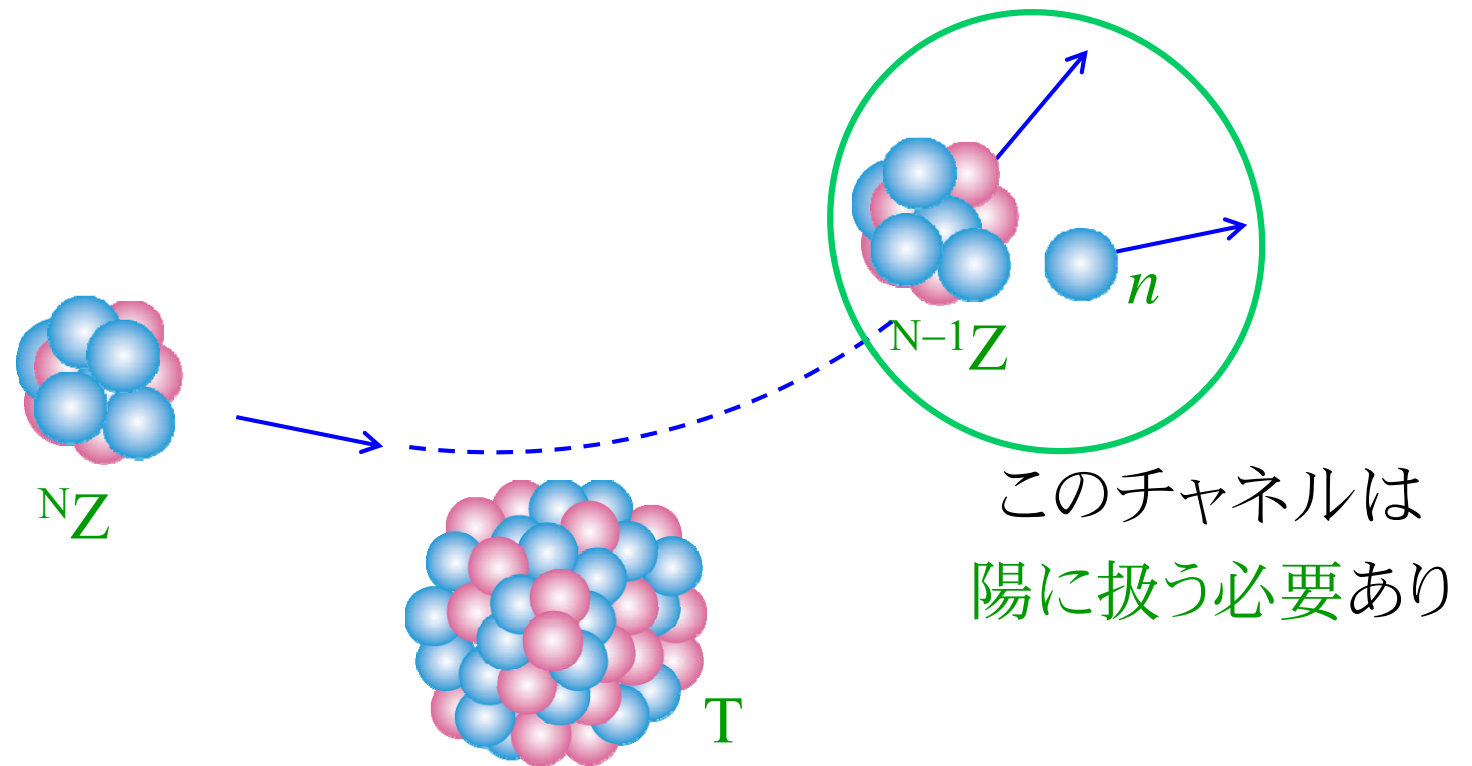


2. 連続状態離散化チャネル結合法

**Continuum-Discretized Coupled-
Channels method; CDCC**

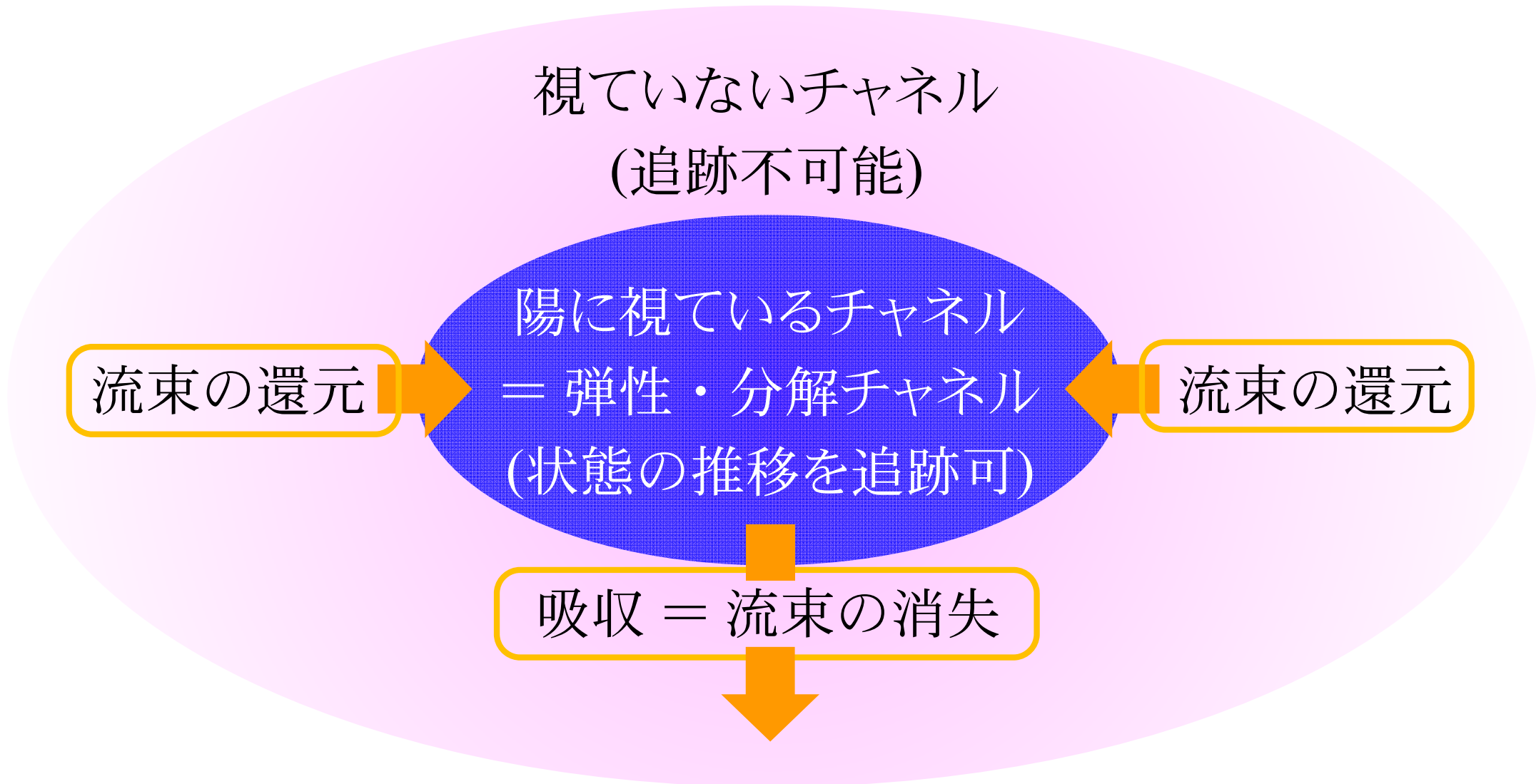
2a. 概観および理論的基盤

弱結合系が入射・分解する反応の記述



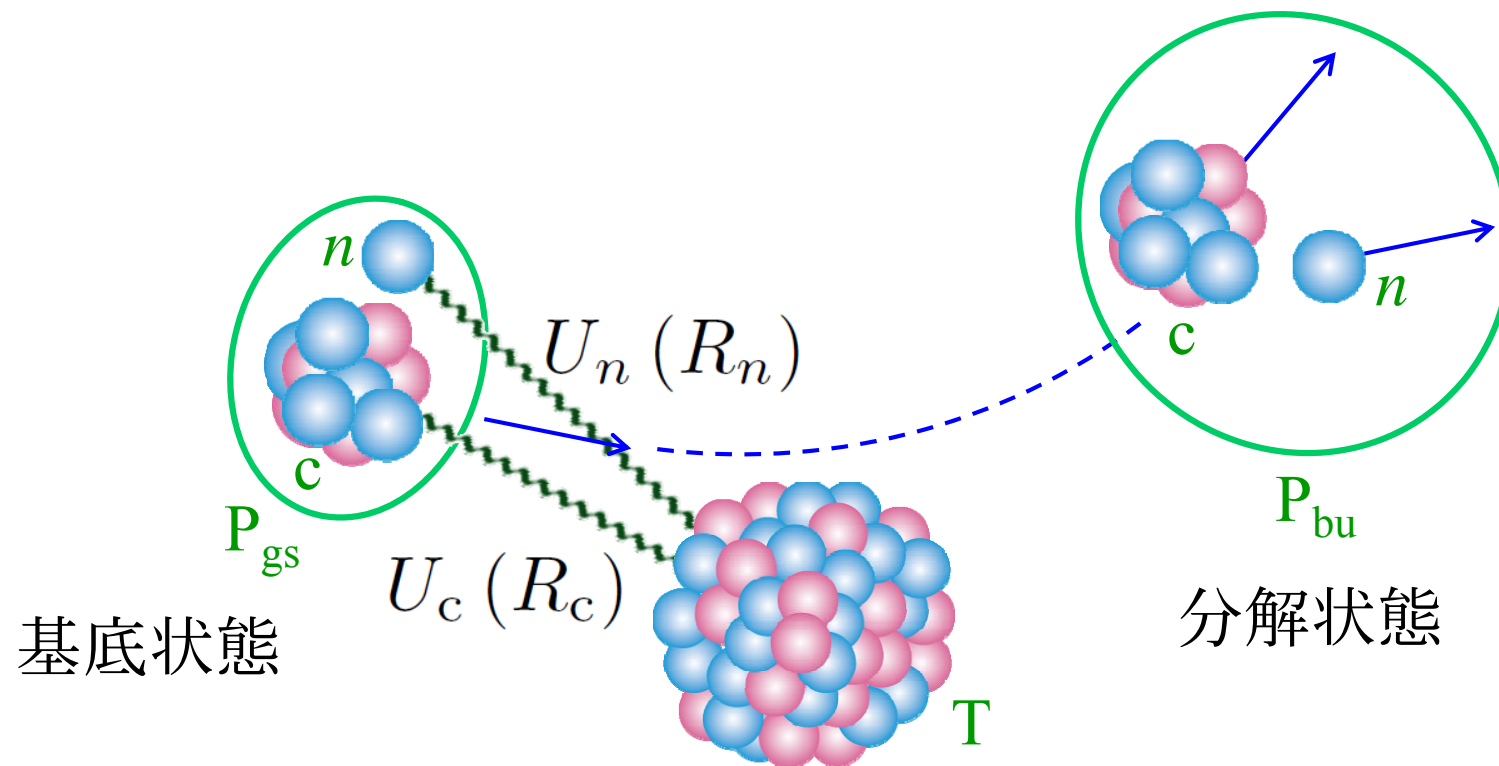
弾性チャネル以外の特定のチャネルにどのように流束が逃げるか(反応系が遷移するか)を記述しなければならない。

分解反応に対する模型空間の設定



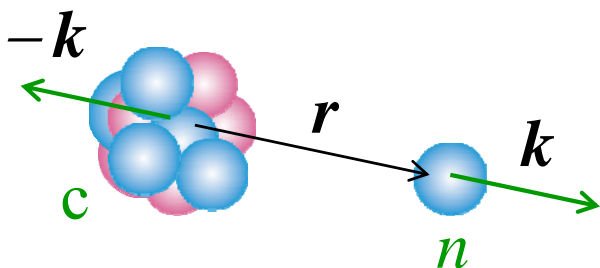
吸収の意味は「**視ているチャンネル**」の実体に依存する。

分解反応を記述するひとつの(適切な)モデル



- 分解チャネルはいくつ必要か?
- 分解チャネルをどのように用意するか?
- 一体ポテンシャルはどのようにして与えるか?

分解状態間の結合ポテンシャル(定性的理解)



k : 漸近領域における相対波数ベクトル

ε : 相対(分解)エネルギー $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2\mu_r} k^2$

- $c-n$ の相対波動関数を自由平面波(のs波成分)とする
- U_n を接触型のポテンシャルで近似
- c は n と比べて無限に重いと仮定



P-Tの相対座標

$$F_{k'k}(R) \sim \int \frac{\sin(k'r)}{r} \frac{1}{R^2} \delta(R-r) \frac{\sin(kr)}{r} r^2 dr$$

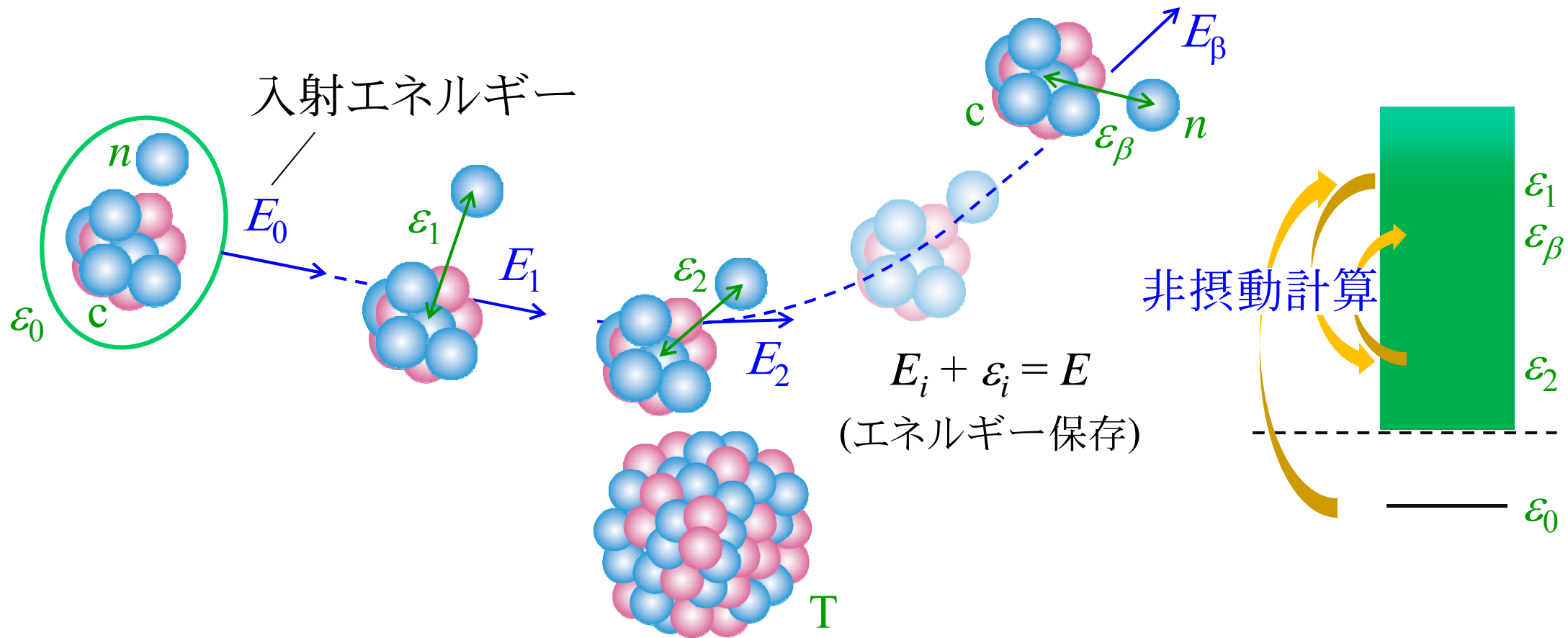
異なる分解状態同士を
結合させる相互作用

$$= \frac{1}{R^2} \sin(k'R) \sin(kR)$$

超ロングレンジ

分解状態間の結合は強い
(continuum-continuum coupling)

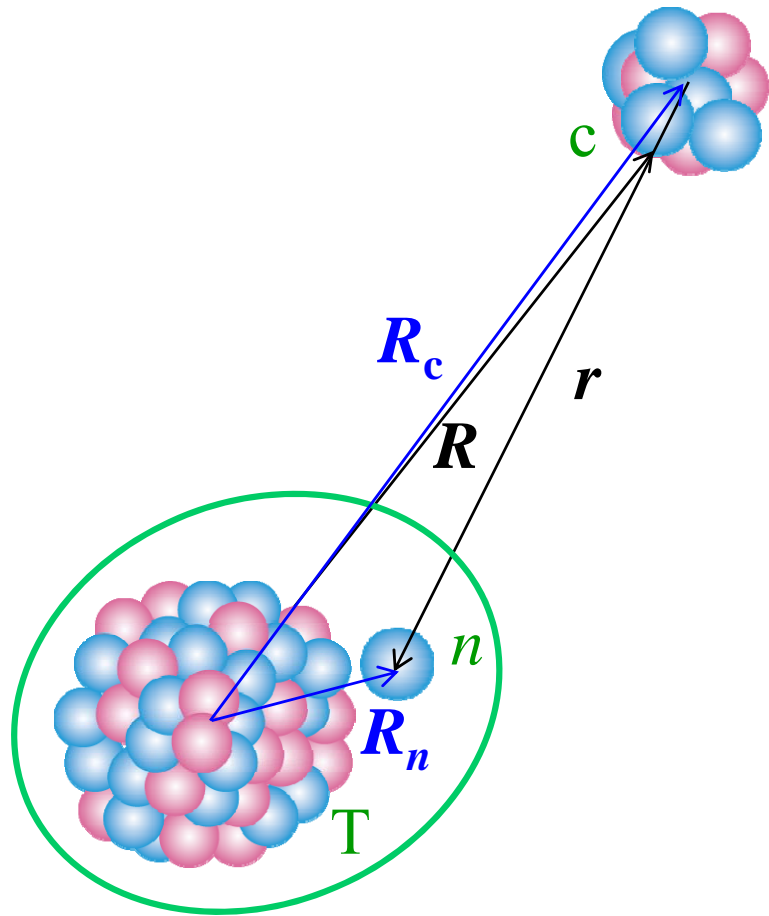
分解反応(多段階過程)のイメージ



問題

- R に関する漸近領域の設定ができない。
- 連続無限個の状態を扱わなければならない。

相互作用が切れない配位の例(n-channel)



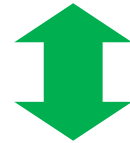
漸近解

$$\phi(R_n) \frac{\exp[iK_c R_c]}{R_c}$$

※このチャンネルの存在が、Lippmann-Schwinger Eq.の非一意性をもたらす(disconnected diagramに起因)。

The ℓ -truncation

$U_n(R_n)$ は $R_n \sim |\mathbf{R} + \mathbf{r}|$ について有限レンジ



R がいくら大きくても、 P の分解状態は r について無限の広がりを持つため、 U_n を 0 とみなせない。



ℓ -truncation (離散化チャネル結合法の最重要近似)

P (分解状態) の ℓ はある上限値 ℓ_{\max} までしか関与しないと想定
(軌道角運動量)

$$\text{射影演算子: } \mathcal{P}_{\ell_{\max}} = \int d\hat{\mathbf{r}}' \sum_{l \leq \ell_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')$$

ℓ -truncationの役割

中性子の束縛状態をガウス関数で表現。

$$\begin{aligned}\phi(R_n) &= N_0 \exp(-\mu R_n^2) = N_0 \exp[-\mu(R_c^2 + r^2 + 2\mathbf{R}_c \cdot \mathbf{r})] \\ \exp[-2\mu\mathbf{R}_c \cdot \mathbf{r}'] &= 4\pi \sum_{\lambda} i^{\lambda} j_{\lambda}(i2\mu R_c r) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{R}}_c) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}')\end{aligned}$$

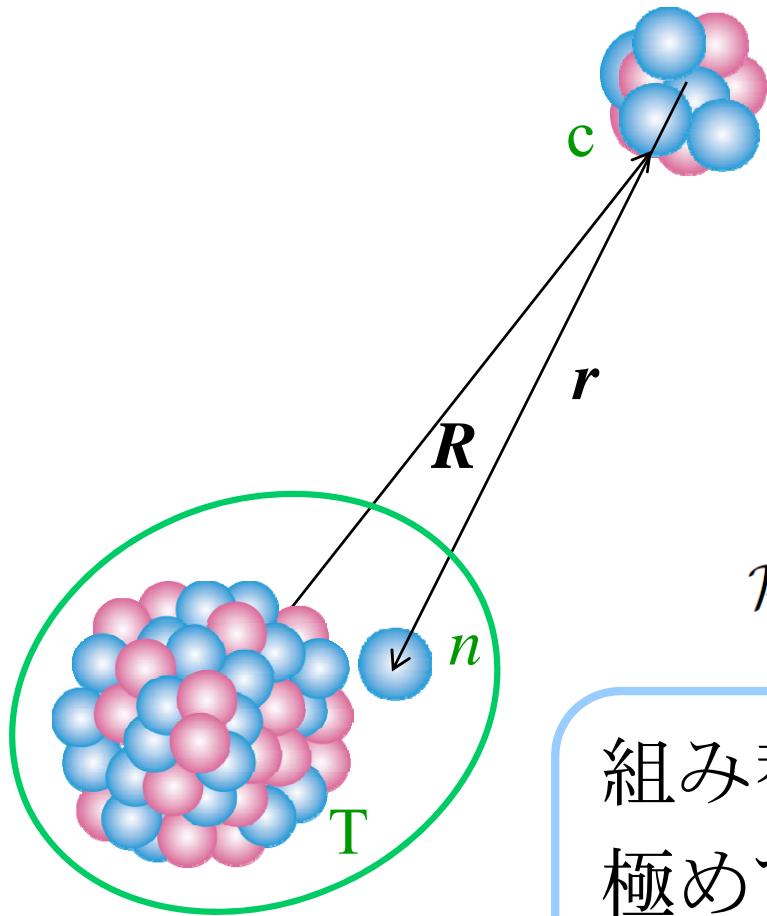
$l_{\max} = 0$ の射影演算子を作用

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0\phi(R_n) &= N_0 \exp[-\mu(R_c^2 + r^2)] \int d\hat{\mathbf{r}}' Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{00}^*(\hat{\mathbf{r}}') \exp[-2\mu\mathbf{R}_c \cdot \mathbf{r}'] \\ &= N_0 \exp[-\mu(R_c^2 + r^2)] j_0(i2\mu R_c r) \\ &\rightarrow N_0 \frac{\exp[-\mu(R_c - r)^2]}{4\mu R_c r} \propto \frac{1}{R_c^2}, \quad \text{for } R_c \gg R_n\end{aligned}$$

※組み替えチャネルの漸近状態は生成されない。

(このことがCDCC解に及ぼす影響はここでは未検討)

l -truncationの直観的理解



$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$l_{\max} \rightarrow \infty$ なら、 r の角度に関するデルタ関数



$\mathcal{P}_{l_{\max}}$ は、 $1/l_{\max}$ 程度の幅で r の角度をぼかす。

組み替えチャンネルの漸近解は、 r と R_c を極めて良く揃えなければ表現できないため、 $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ によって著しく抑制される。

cf. c から見た n の立体角は $1/R_c^2$ に比例。角度平均の範囲がこれと同程度なら変化なし。 $l_{\max} = 0$ は全角度平均なので $1/R_c^2$ が出る。

相互作用に対する ℓ -truncation の影響

$$U_n(R_n) \rightarrow U_0 \exp(-\mu R_n^2) \sim U_0 \exp[-\mu(R^2 + r^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})]$$
$$= U_0 \sum_{\lambda} U_n^{(\lambda)}(R, r) P_{\lambda}(\cos \theta_{Rr}) \quad [\text{多重極展開}]$$

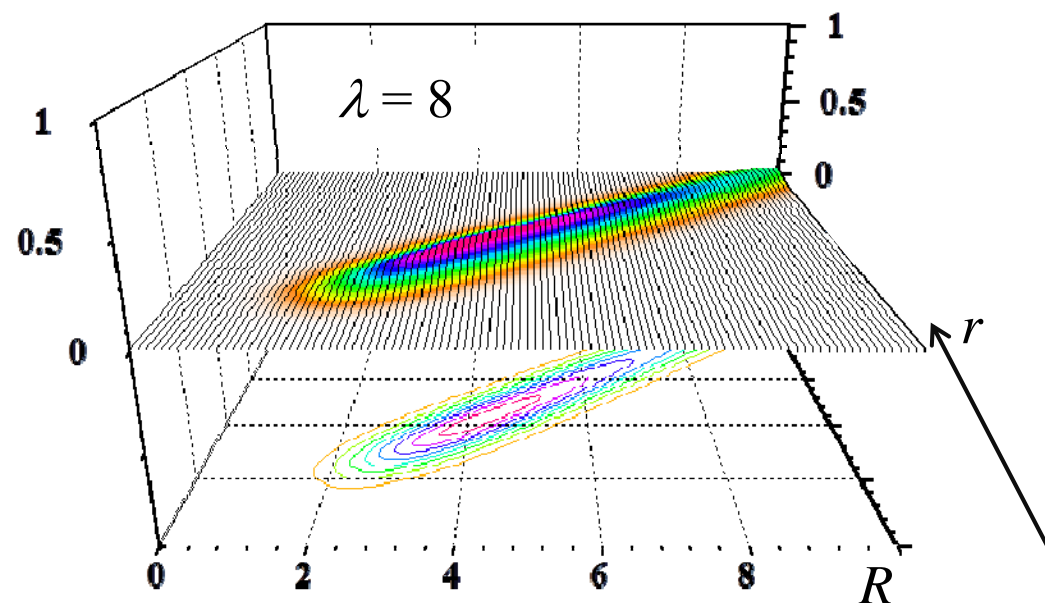
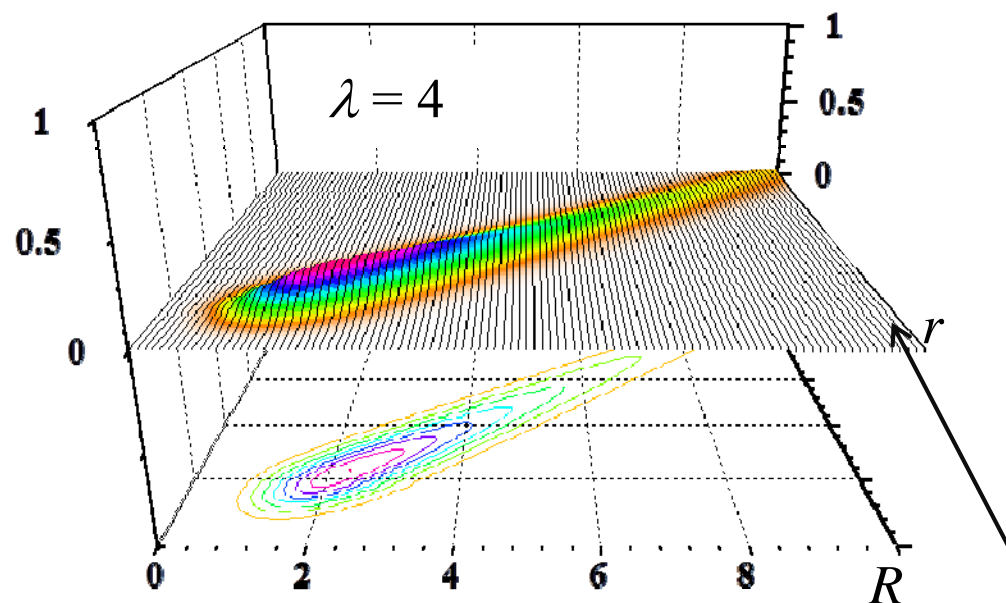
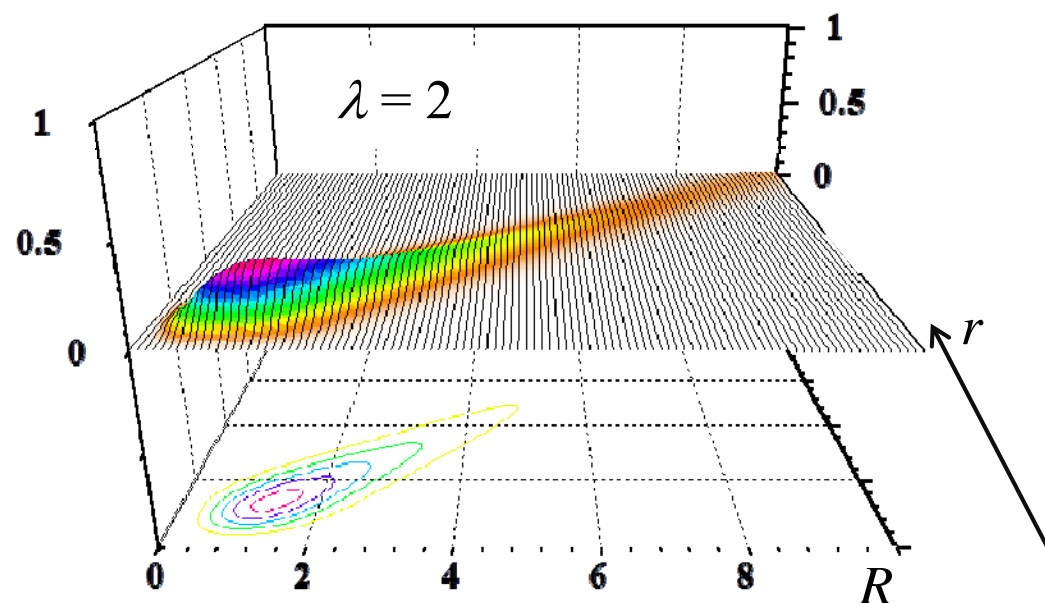
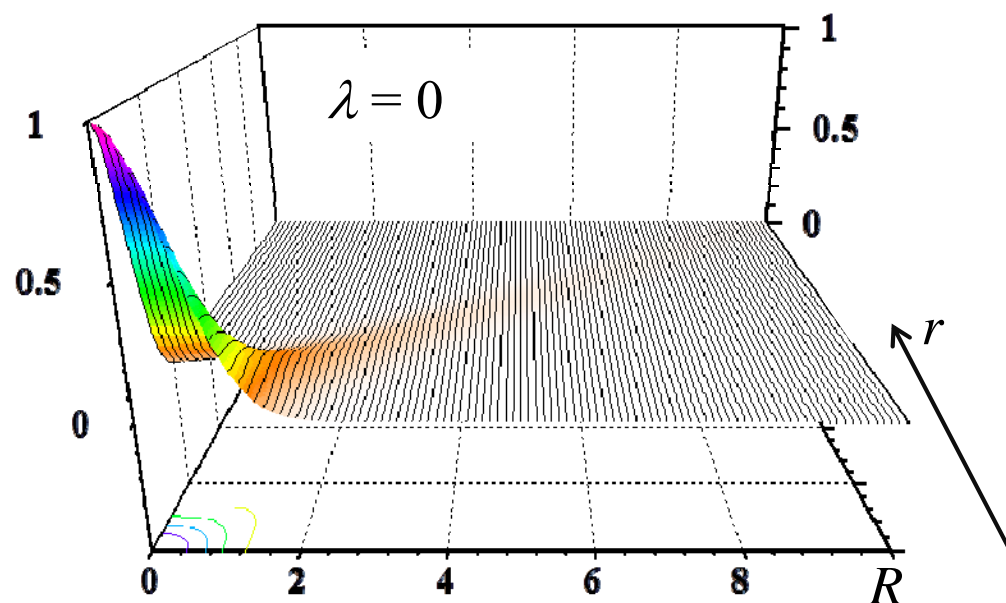
$$U_n^{(\lambda)}(R, r) = (2\lambda + 1) \exp[-\mu(R^2 + r^2)] i^{\lambda} j_{\lambda}(i2\mu Rr)$$



$$U_n^{(\lambda)}(R, r) \rightarrow 0, \quad \text{for } R \text{ and/or } r \rightarrow 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

$$U_n^{(\lambda)}(R, r) \rightarrow (2\lambda + 1) i^{\lambda} \exp[-\mu(R^2 + r^2)] \frac{\exp(2\mu Rr)}{4\mu Rr}$$
$$= (2\lambda + 1) i^{\lambda} \frac{\exp[-\mu(R - r)^2]}{4\mu Rr}, \quad \text{for } 2\mu Rr \gg \lambda$$

ガウス型相互作用の多重極子($\mu = 1$)



相互作用に対する ℓ -truncation の影響

$$U_n(R_n) \rightarrow U_0 \exp(-\mu R_n^2) \sim U_0 \exp[-\mu(R^2 + r^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})]$$
$$= U_0 \sum_{\lambda} U_n^{(\lambda)}(R, r) P_{\lambda}(\cos \theta_{Rr}) \quad [\text{多重極展開}]$$

$$U_n^{(\lambda)}(R, r) = (2\lambda + 1) \exp[-\mu(R^2 + r^2)] i^{\lambda} j_{\lambda}(i2\mu Rr)$$

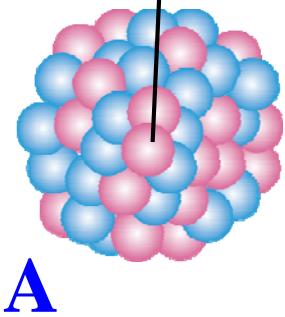
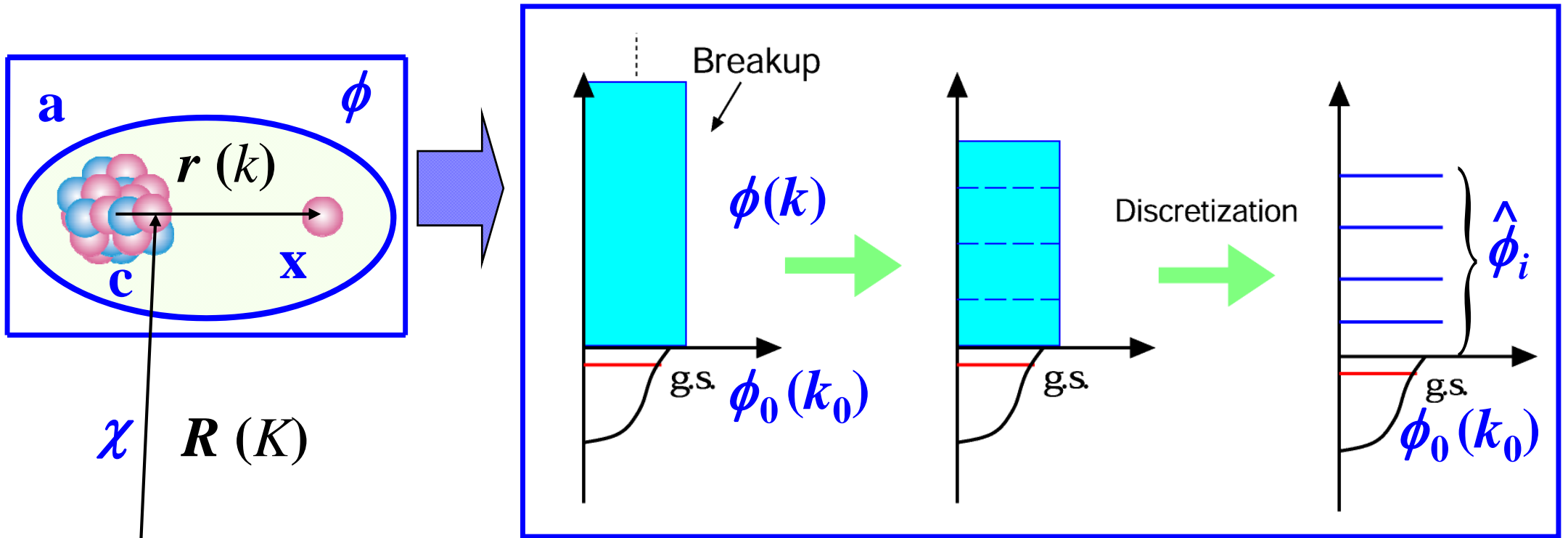


$$U_n^{(\lambda)}(R, r) \rightarrow 0, \quad \text{for } R \text{ and/or } r \rightarrow 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

$$U_n^{(\lambda)}(R, r) \rightarrow (2\lambda + 1) i^{\lambda} \exp[-\mu(R^2 + r^2)] \frac{\exp(2\mu Rr)}{4\mu Rr}$$
$$= (2\lambda + 1) i^{\lambda} \frac{\exp[-\mu(R - r)^2]}{4\mu Rr}, \quad \text{for } 2\mu Rr \gg \lambda$$

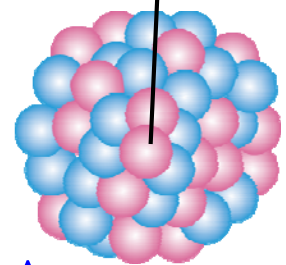
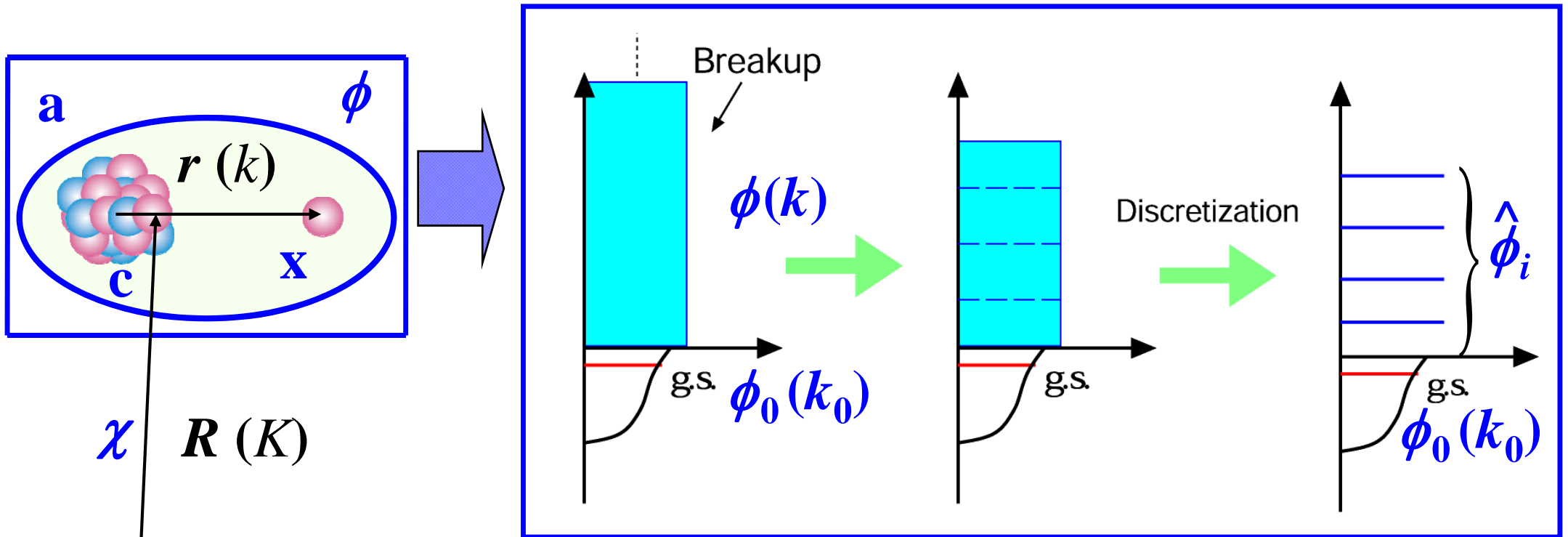
ポテンシャルが R^{-2} で減衰する領域が存在 \rightarrow 漸近領域

k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)



$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \int_0^\infty \phi(k, \vec{r}) \chi(K, \vec{R}) dk$$

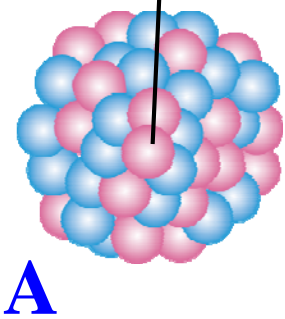
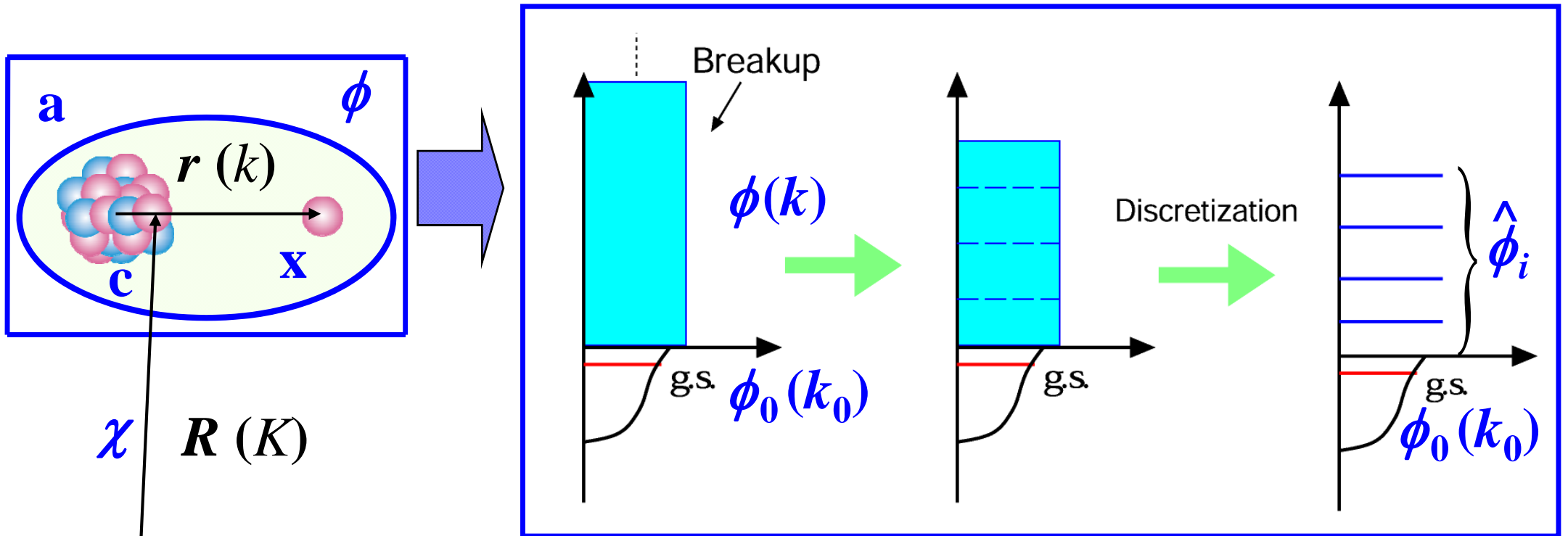
k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)



A

$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \int_0^\infty \phi(k, \vec{r}) \chi(K, \vec{R}) dk$$

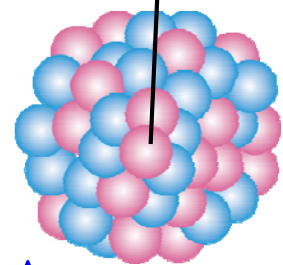
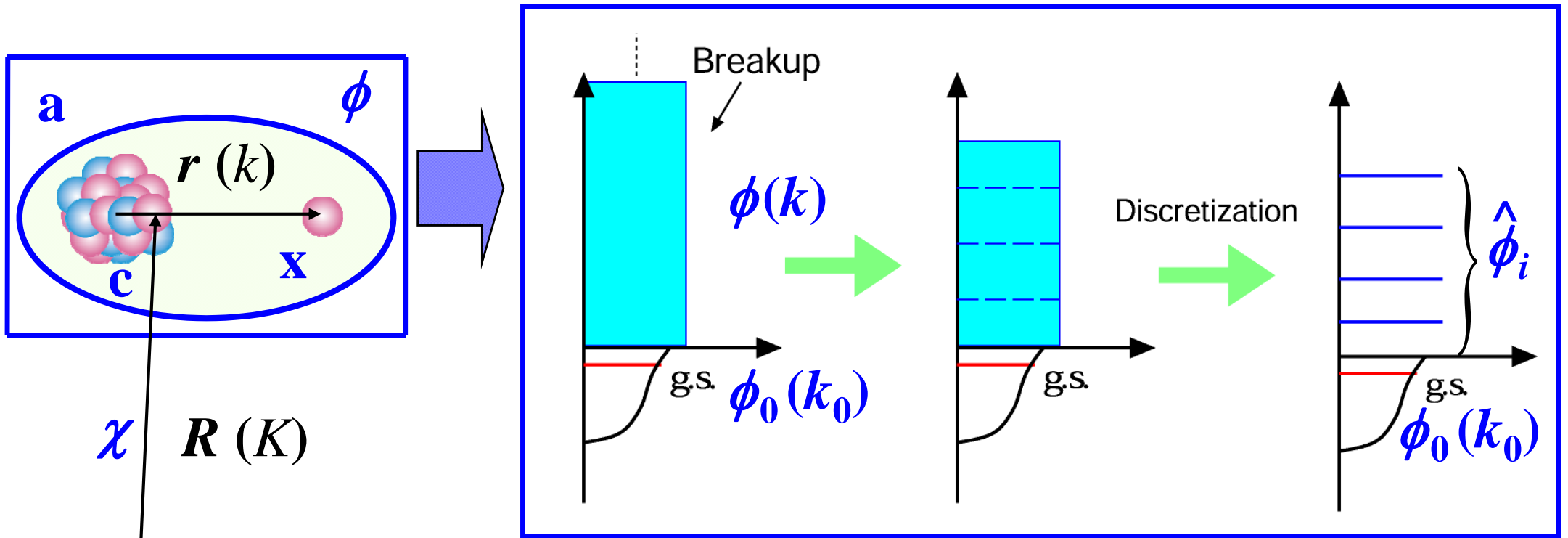
k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)



$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \int_0^\infty \phi(k, \vec{r}) \chi(K, \vec{R}) dk$$

k -truncation

k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)

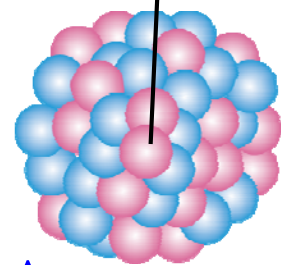
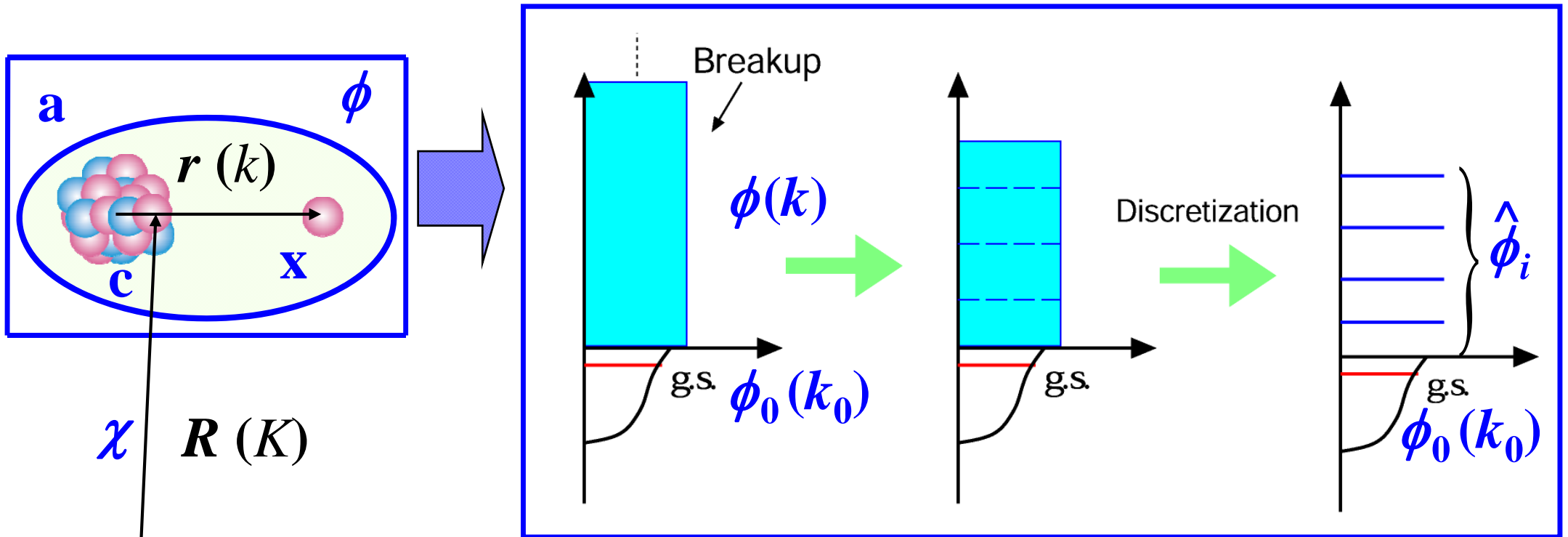


A

$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \int_0^{k_{\max}} \phi(k, \vec{r}) \chi(K, \vec{R}) dk$$

k -truncation

k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)

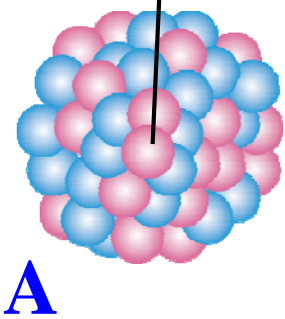
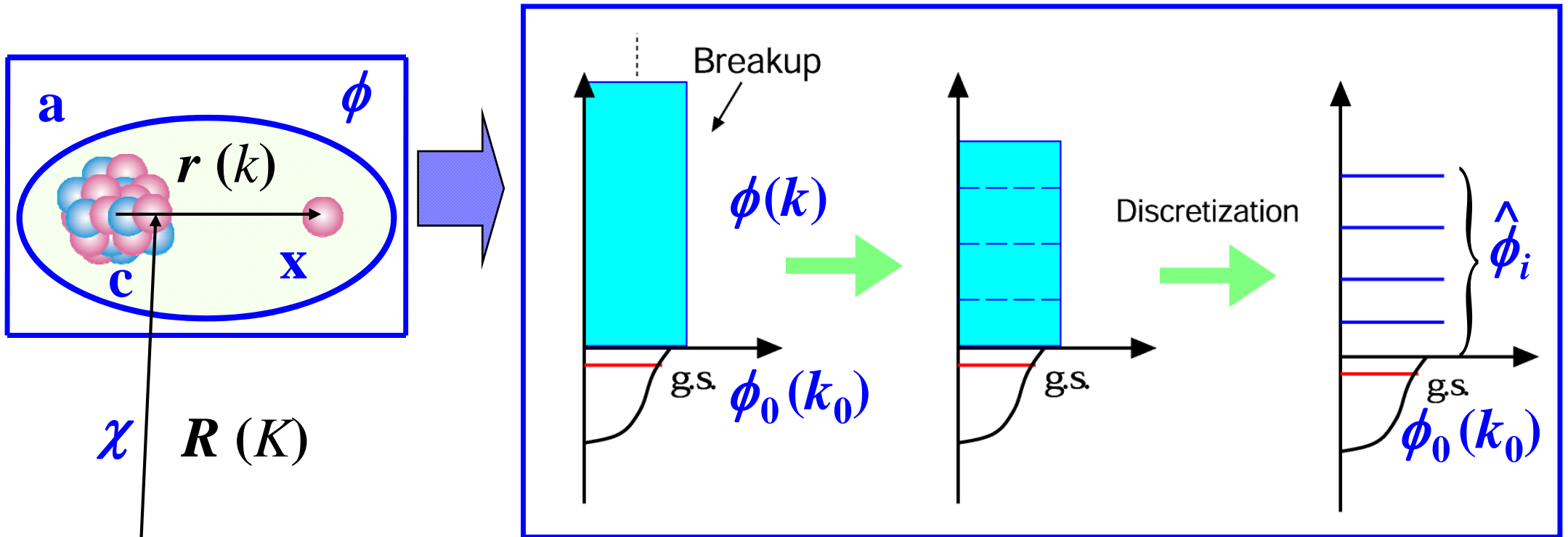


A

$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \phi(k, \vec{r}) \chi(K, \vec{R}) dk}_{k\text{-truncation}}$$

k -truncation

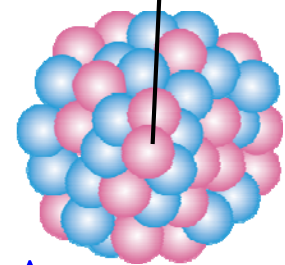
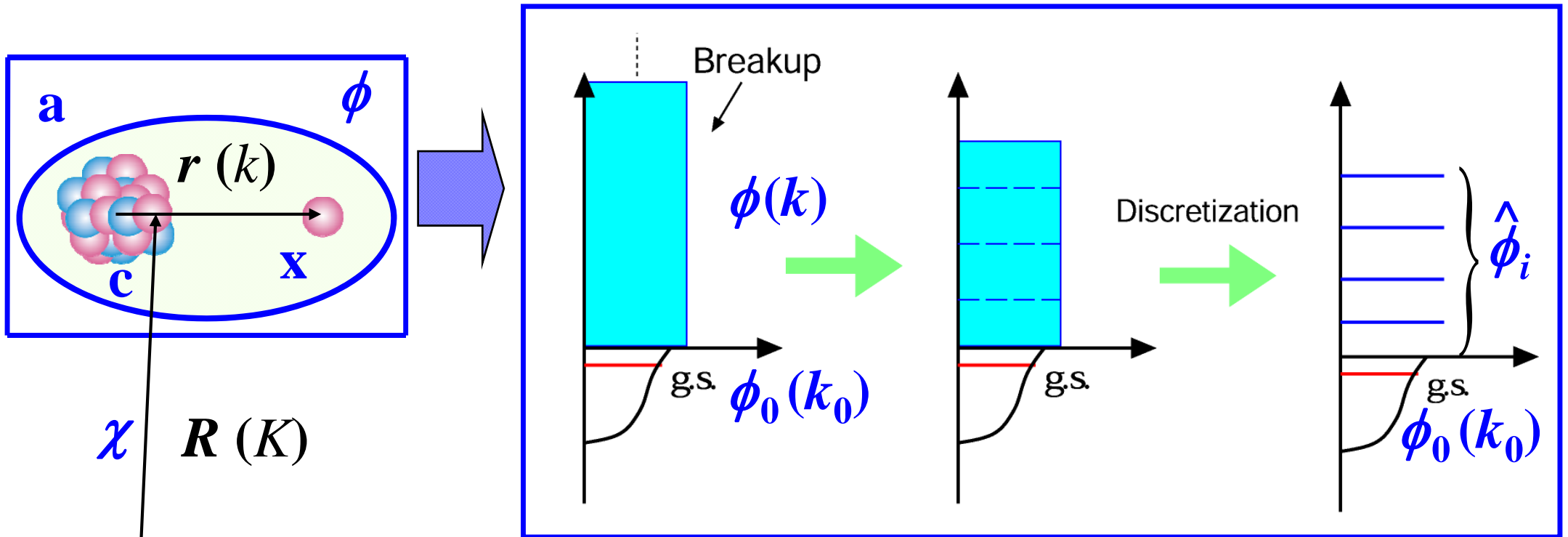
k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)



$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \hat{\chi}(\hat{K}_i, \vec{R}) \int_{k_{i-1}}^{k_i} \phi(k, \vec{r}) dk}_{k\text{-truncation and discretization}}$$

k -truncation and discretization

k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)



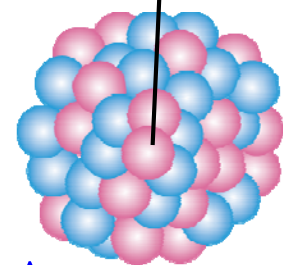
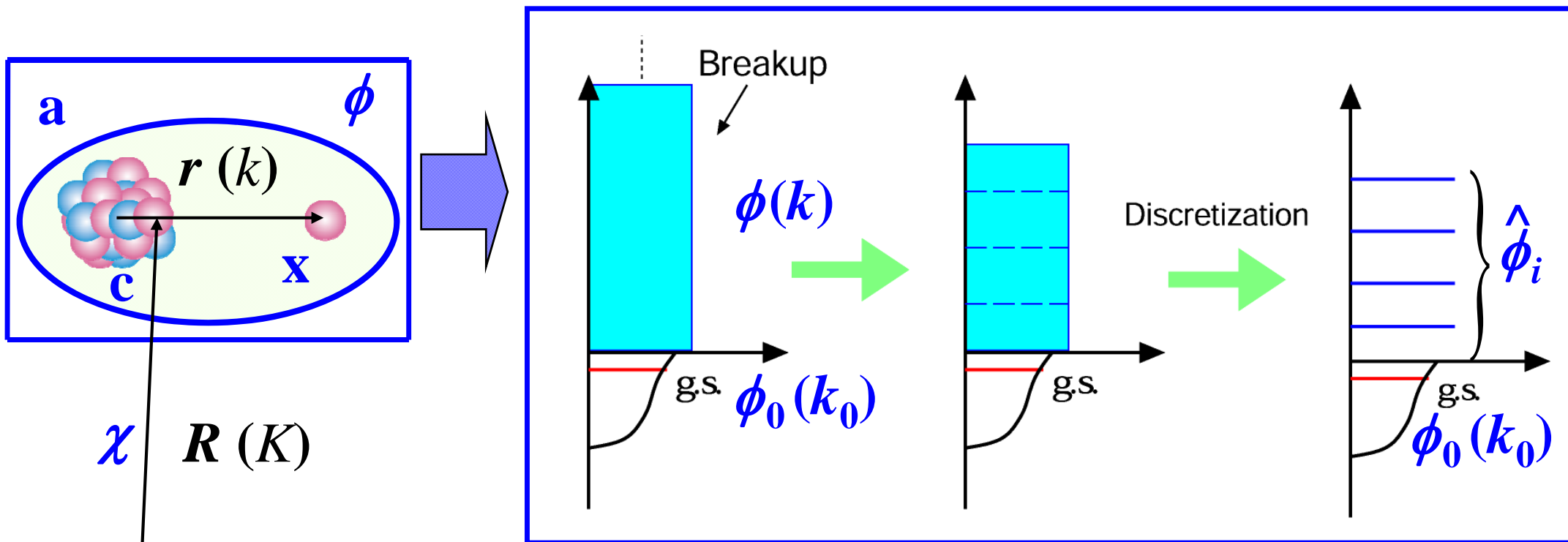
A

$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \hat{\chi}(\hat{K}_i, \vec{R}) \int_{k_{i-1}}^{k_i} \phi(k, \vec{r}) dk}_{k\text{-truncation and discretization}}$$

$$\psi^{\text{CDCC}}(\vec{r}, \vec{R}) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \hat{\phi}_i(\vec{r}) \hat{\chi}_i(\hat{K}_i, \vec{R})$$

k -truncation and discretization

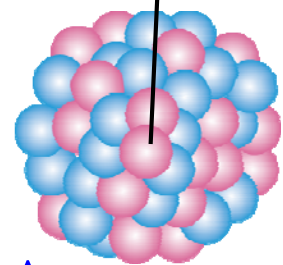
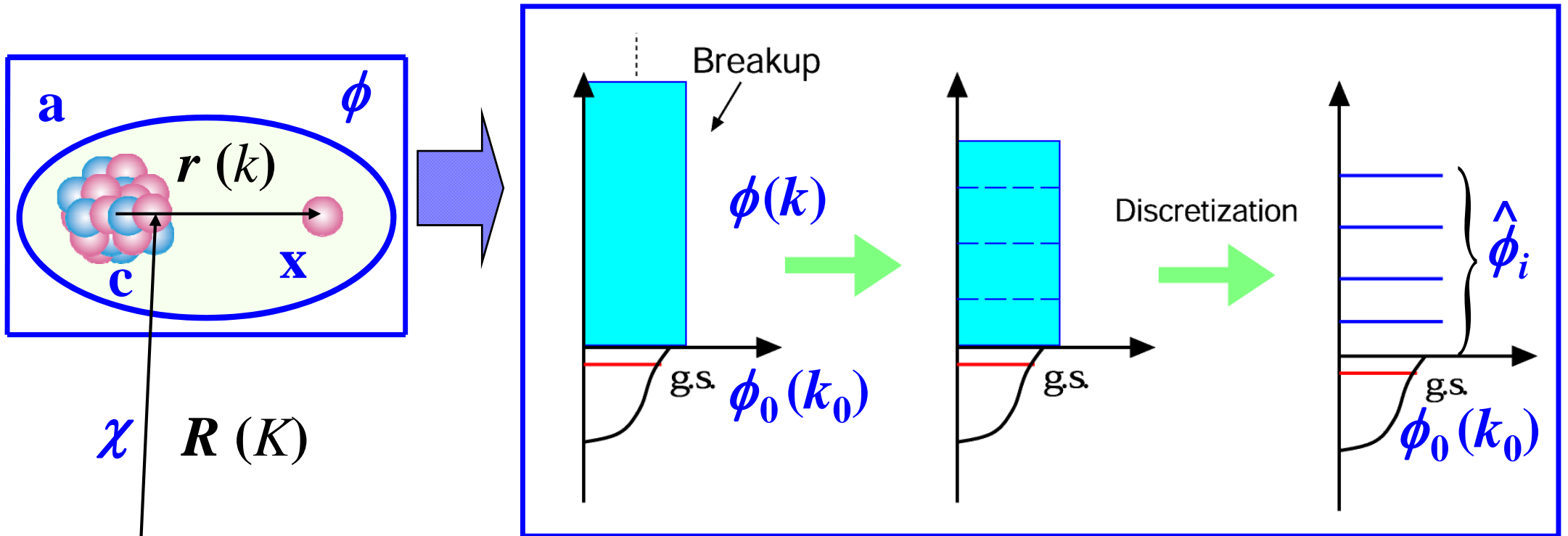
k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)



$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \sum_{i=1}^{i_{\max}} \hat{\chi}(\hat{K}_i, \vec{R}) \int_{k_{i-1}}^{k_i} \phi(k, \vec{r}) dk$$

$$\psi^{\text{CDCC}}(\vec{r}, \vec{R}) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \hat{\phi}_i(\vec{r}) \hat{\chi}_i(\hat{K}_i, \vec{R})$$

k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)



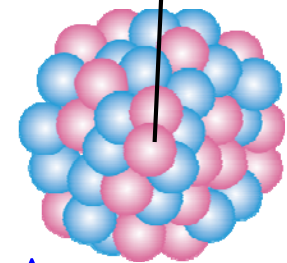
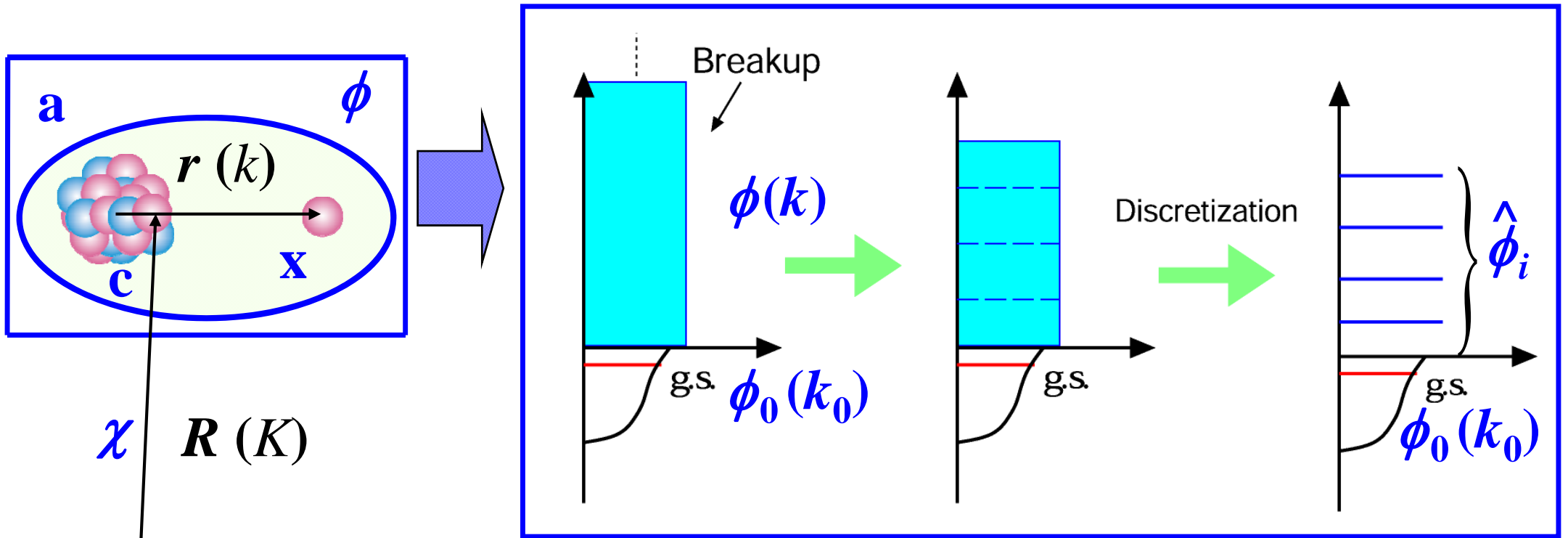
A

$$\left[T_R + U_{xA}(\vec{r}, \vec{R}) + U_{cA}(\vec{r}, \vec{R}) + h_a(\vec{r}) - E \right] \psi^{CDCC}(\vec{r}, \vec{R}) = 0,$$

$$\psi^{CDCC}(\vec{r}, \vec{R}) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \hat{\phi}_i(\vec{r}) \hat{\chi}_i(\hat{K}_i, \vec{R}).$$

$$\hat{\chi}_i \rightarrow U_i^{(-)} \delta_{i0} - \sqrt{K_0 / K_i} S_{i0} U_i^{(+)} \quad (\text{通常の境界条件})$$

k -truncation と連続状態の離散化の例 (after ℓ -truncation)



χ $R(K)$

$$\left[T_R + U_{xA}(\vec{r}, \vec{R}) + U_{cA}(\vec{r}, \vec{R}) + h_a(\vec{r}) - E \right] \psi^{CDCC}(\vec{r}, \vec{R}) = 0,$$

$$\psi^{CDCC}(\vec{r}, \vec{R}) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \hat{\phi}_i(\vec{r}) \hat{\chi}_i(\hat{K}_i, \vec{R}).$$

S 行列要素:
 i チャンネルへ遷移する度合い

$$\hat{\chi}_i \rightarrow U_i^{(-)} \delta_{i0} - \sqrt{K_0 / K_i} S_{i0} U_i^{(+)} \quad (\text{通常境界条件})$$

CDCCの理論的基礎付け(苦闘の歴史)

- 分解状態を取り扱う際に問題となる、漸近領域の設定の問題 (LS Eq. の非一意性の問題) は、 ℓ -truncation により解決できた。
→ 最も本質的な近似。
- 次の問題は、反応計算の結果が $\ell_{\max}, k_{\max}, i_{\max}$ について収束するかどうか。 → 数値的に収束を確認。

M. Yahiro, Nakano, Iseri, Kamimura, Prog. Theor. Phys. 67, 1464 (1982).

R.A.D. Piyadasa, Yahiro, Kamimura, Kawai, Prog. Theor. Phys. 81, 910 (1989).

R.A.D. Piyadasa, Kawai, Kamimura, Yahiro, Phys. Rev. C 60, 044611 (1999).

- 最後の問題は、収束した結果が正しいか否か。
→ 歪曲波 Faddeev 理論との対応 (ℓ -truncation で補正項 ~ 0)

N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989).

N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).

- 2007年、Faddeev と CDCC の数値計算の比較が発表。

A. Deltuva, Moro, Cravo, Nunes, Fonseca, Phys. Rev. C 76, 064602 (2007).

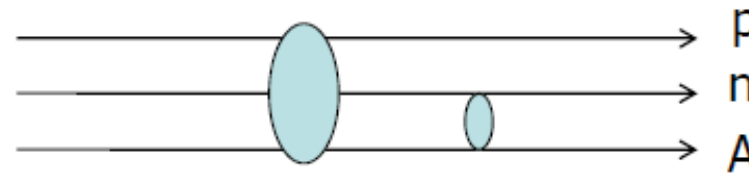
Theoretical Foundation of CDCC

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C53, 314 (1996).*

$$(E - K - V(r) - U_p - U_n)\psi = 0$$

Faddeev decomposition

$$\psi = \psi_d + \psi_p + \psi_n$$



Faddeev equations

$$\left[E - K - V_{np} \right] \psi_d = V_{np} (\psi_p + \psi_n),$$

$$\left[E - K - U_p \right] \psi_p = U_p \psi_d + U_p \psi_n,$$

$$\left[E - K - U_n \right] \psi_n = U_n \psi_d + U_n \psi_p.$$

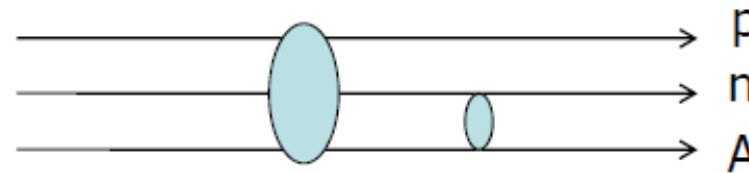
Theoretical Foundation of CDCC

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C53, 314 (1996).*

$$(E - K - V(r) - U_p - U_n)\psi = 0$$

Faddeev decomposition

$$\psi = \psi_d + \psi_p + \psi_n$$



Distorted Faddeev equations not pair int. but 3-body int.

$$\left[E - K - V_{np} - P(U_p + U_n)P \right] \psi_d = V_{np} (\psi_p + \psi_n),$$

$$\left[E - K - U_p \right] \psi_p = (U_p - PU_pP) \psi_d + U_p \psi_n,$$

$$\left[E - K - U_n \right] \psi_n = (U_n - PU_nP) \psi_d + U_n \psi_p.$$

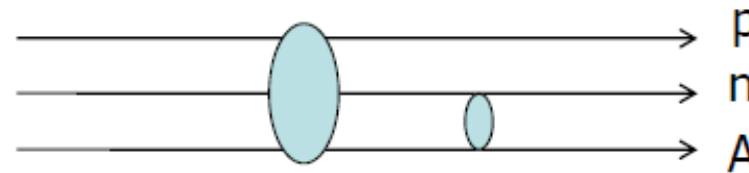
Theoretical Foundation of CDCC

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C53, 314 (1996).*

$$(E - K - V(r) - U_p - U_n)\psi = 0$$

Faddeev decomposition

$$\psi = \psi_d + \psi_p + \psi_n$$



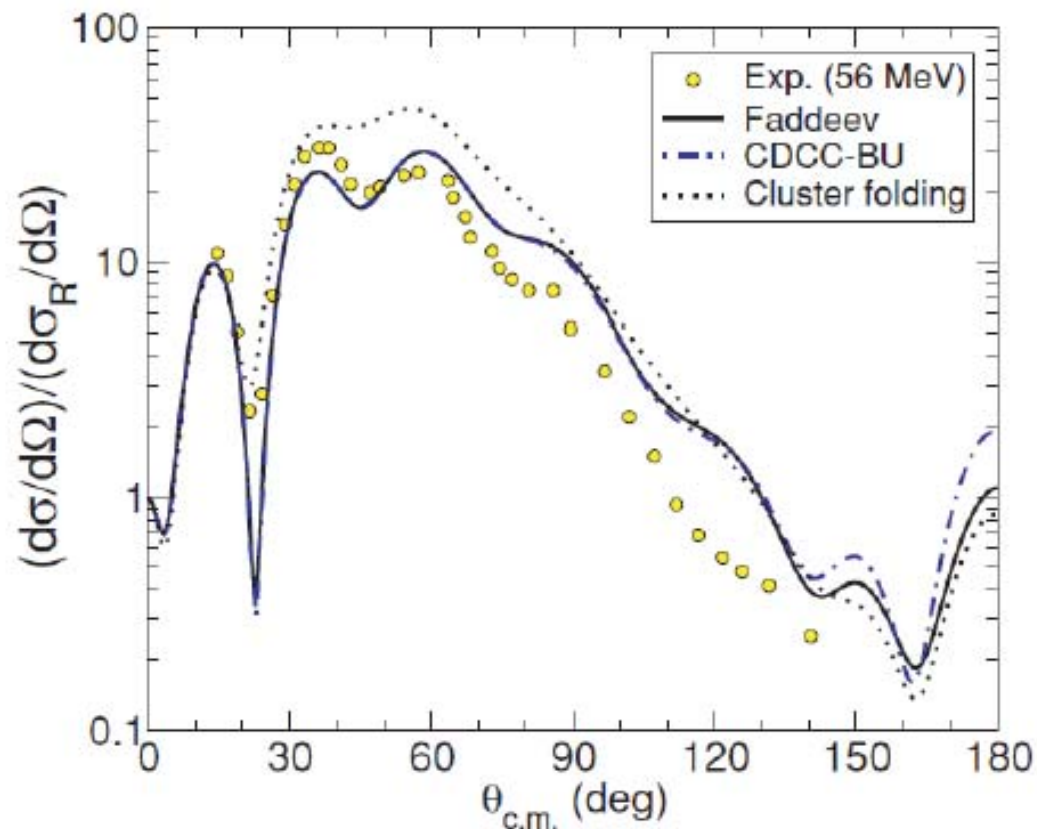
Distorted Faddeev equations not pair int. but 3-body int.

$$\left[E - K - V_{np} - P(U_p + U_n)P \right] \psi_d = V_{np} (\psi_p + \psi_n),$$

$$\left[E - K - U_p \right] \psi_p = (U_p - PU_p P) \psi_d + U_p \psi_n, \quad \rightarrow 0 \text{ (in very good approximation)}$$

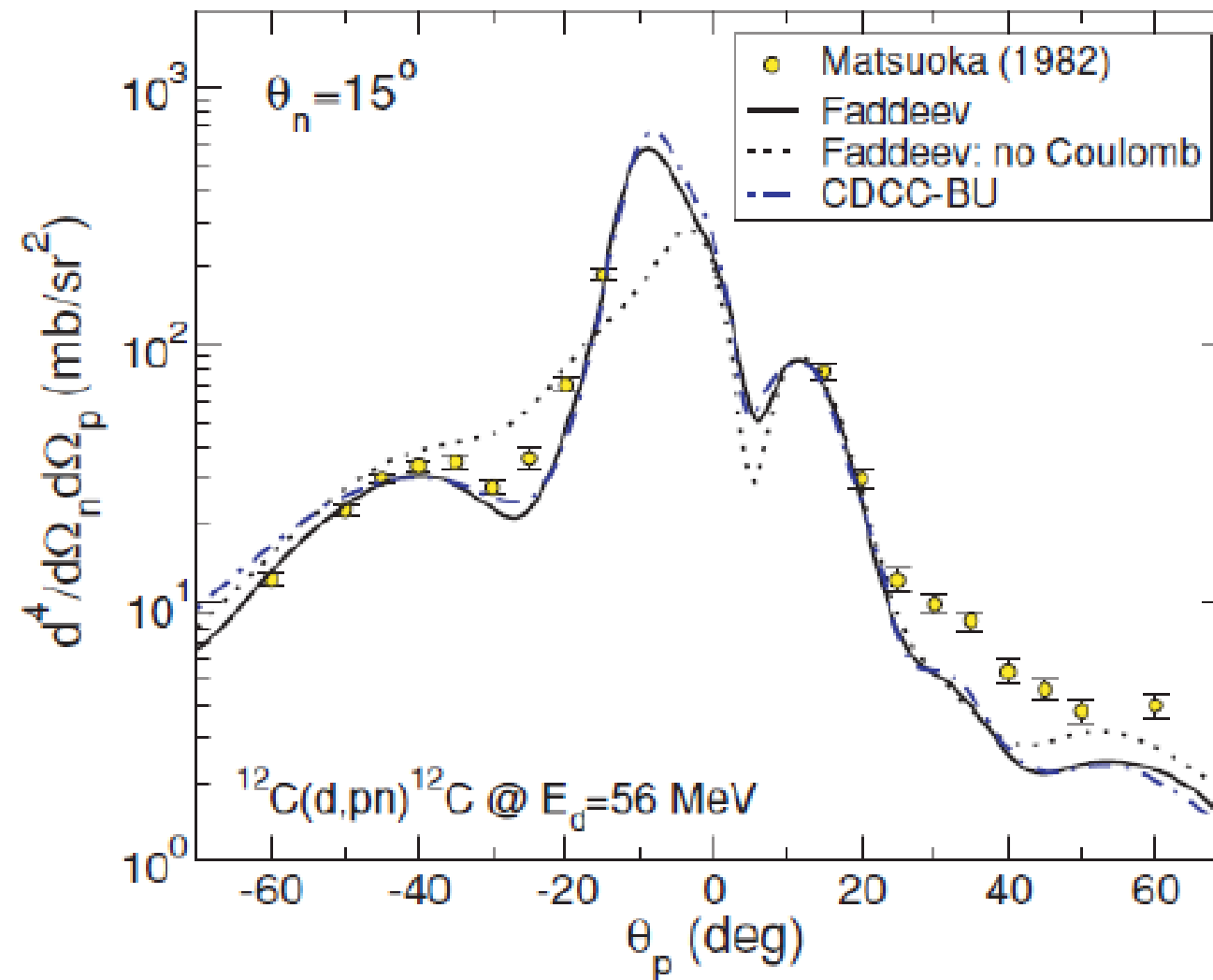
$$\left[E - K - U_n \right] \psi_n = (U_n - PU_n P) \psi_d + U_n \psi_p.$$

Comparison between CDCC and Faddeev solutions



$d+^{12}\text{C}$ at 56 MeV
Elastic scattering

$^{12}\text{C}(d,pn)$ at 56 MeV



Testing the continuum-discretized coupled channels method for deuteron-induced reactions

N. J. Upadhyay,¹ A. Deltuva,² and F. M. Nunes^{1,3}

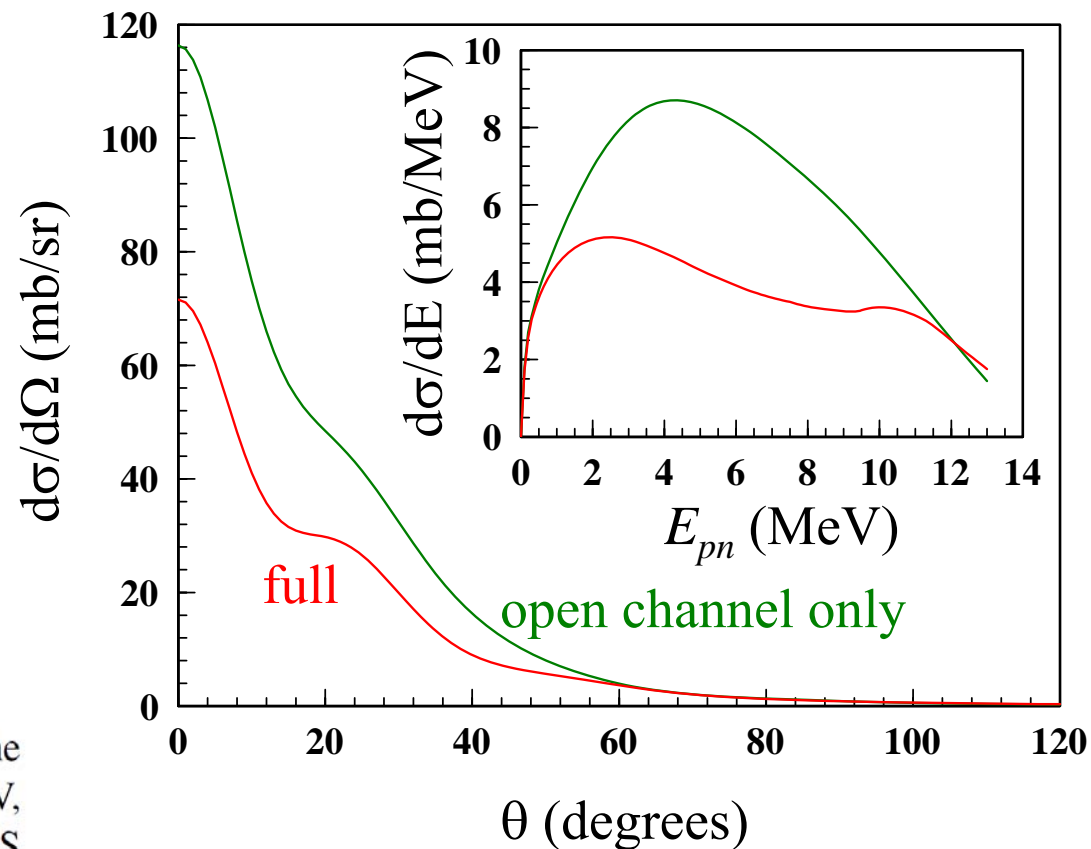
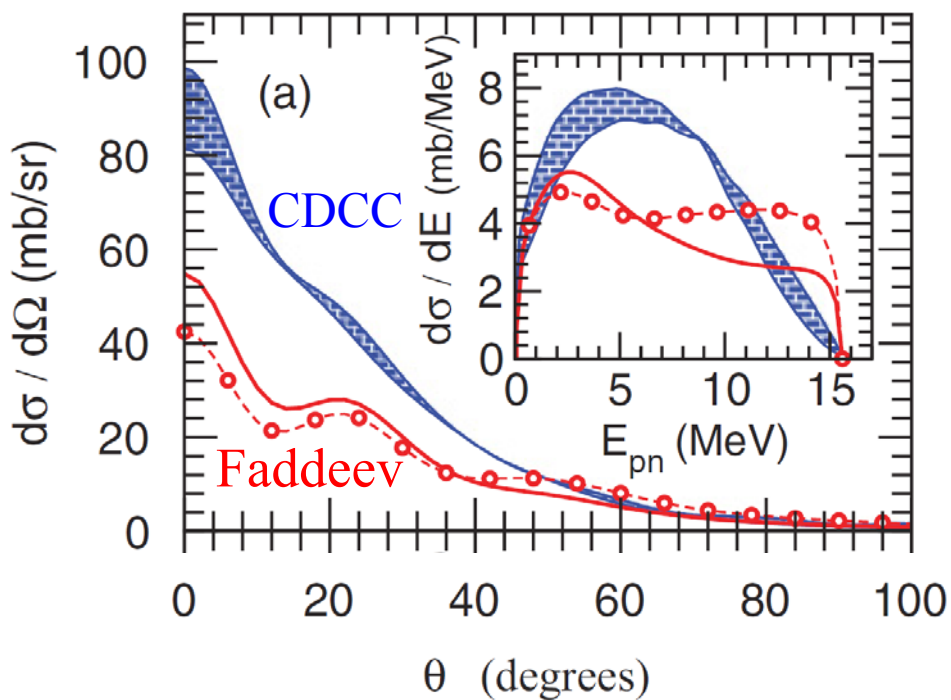


FIG. 8. (Color online) Breakup distributions for the $^{10}\text{Be}(d, pn)^{10}\text{Be}$ reaction at (a) $E_d = 21$ MeV, (b) $E_d = 40.9$ MeV, and (c) $E_d = 71$ MeV. Results for CDCC (hatched band), FAGS (solid), and FAGS1 (circles).

CDCC cannot describe breakup reactions at around 20 MeV!?

(Probably) Yes!

CDCCの基本思想(模型空間近似)

散乱観測量が必要な精度で得られる“正確な”波動関数を求める:

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha} &\sim \left\langle \phi_{\mathbf{k}_\beta}^{\text{free}} e^{i\mathbf{K}_\beta \cdot \mathbf{R}} \left| U_n + U_c + V_{nc} \right| \Psi_\alpha \right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{\mathbf{k}_\beta} e^{i\mathbf{K}_\beta \cdot \mathbf{R}} \left| U_n + U_c \right| \Psi_\alpha \right\rangle \\ &\sim \left\langle \phi_{\mathbf{k}_\beta} e^{i\mathbf{K}_\beta \cdot \mathbf{R}} \left| U_n + U_c \right| \Psi_\alpha^{\text{CDCC}} \right\rangle \end{aligned}$$

これは、CDCCの模型空間が散乱観測量の記述に必要な有限の空間で完全系をなすとみなすということ(近似的完全系):

$$\mathcal{P} \equiv \sum_{i=0}^{i_{\max}} \left| \hat{\phi}_i \right\rangle \left\langle \hat{\phi}_i \right| \sim 1$$

近似的完全系は反応の種類や必要な計算精度に依存する。

CDCCの“汎用”コード

CDCC のコード(重陽子入射版)は

<http://www.nt.phys.kyushu-u.ac.jp/CDCC/index.html>

で公開中。

- 計算の骨格は汎用的。少し書き換えれば一般の2クラスター系の反応に適用可能。
- 公開されているマニュアルは、実はCDCCの基礎勉強の良いテキスト(通常省略されることが多い角運動量の足が正確に扱われている)。
- 青木保夫氏(理研)が開発した `ctak`, `hctak` や Ian Thompson氏(Lawrence Livermore)が開発した `Fresco` がwebから入手可能。

CDCCの概観および理論的基盤のまとめ

CDCC は

- 分解反応を非摂動的に記述する反応模型である。
- exact な反応理論である(歪曲波) Faddeev 理論の第0近似であり、高次の補正は極めて小さい。
- 適切に限定された模型空間の中で構築された反応論である。
- 弱束縛系の分解を取り扱う、実効的かつ高精度の反応模型として高い成功を収めている。

Review papers

- M. Kamimura, Yahiro, Iseri, Sakuragi, Kameyama, Kawai, Prog. Theor. Phys. Suppl. 89 (1986), 1.*
N. Austern, Iseri, Kamimura, Kawai, Rawitscher, Yahiro, Phys. Rep. 154 (1987), 125.
M. Yahiro, O, Matsumoto, Minomo, Prog. Theor. Exp. Phys. 2012, 01A206 (2012).

CDCCの理論的基盤に関する補足

- 3体のSchrödinger方程式を解いているので、その解は、**組み替えチャンネルの成分も含むもの**でなければ正解とは言えない。
- **1つのLS Eq. (w/ P-channelのb.c.)**で正解を得ることは不可能。
 - ✓ 組み替えチャンネル(w/ 束縛状態)を生成できない。
 - ✓ 別チャンネルに入射波がある散乱波も解となってしまう。
- 問題の根幹は**disconnected diagram**の存在にあり、正しい計算には**3つのLS Eq.**が必要。
 - ※P-channelの遷移相互作用は U_c と U_n . n-channelと U_n の組み合わせは、cに関するdisconnected diagramを生む。
- これらの問題を「**P-channelのb.c.を設定できる漸近領域が存在しない**」と表現する。
- **組み替えチャンネルが出て来ないtruncation**をすれば、上記の問題は全てクリアされる。それが *l*-truncation。
 - ※分解チャンネルでc-nが無限に広がっていると組み替えと同様の問題が起きるが、これも*l*-truncationで抑制される。
- Truncateした空間で得た解が**P-channelおよび分解状態を記述する上で**正解とみなせるかどうかは**非自明**。その証明を与えるのが**distorted Faddeev**との対応。