



# 原子核反応論入門



集中講義@名古屋大学

おがた かずゆき

緒方 一介

大阪大学 RCNP / 大阪市大&NITEP

1. 核反応研究の概観
2. 断面積とは何か?
3. Lippmann-Schwinger方程式
4. アイコナール近似
5. チャネル結合法
6. 散乱問題の純量子力学的解法
7. 波束の理論
8. 多重散乱理論
9. 連続状態離散化チャネル結合法

# 略歴

- 1996-1997年度(M)

九州大学大学院にて、河合光路名誉教授の指導の下、核反応の研究に着手。

- 1998年度～2001年12月(D → PD)

2001年3月、学位取得。4月、大阪大学核物理研究センターにCOE特別講師として着任。

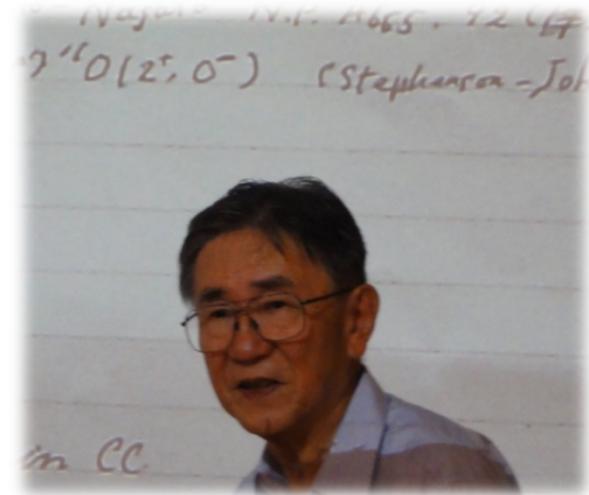
- 2002年1月～2010年度(助手 → 助教)

九州大学大学院理学研究院において反応研究を進める。

- 2011年度～ (准教授)

2011年4月、大阪大学核物理研究センターに着任。

2018年4月より、大阪市立大学大学院理学研究科 任期付き准教授 (クロスアポイントメント 2022年度末まで)。



# 1. 核反応研究の概観

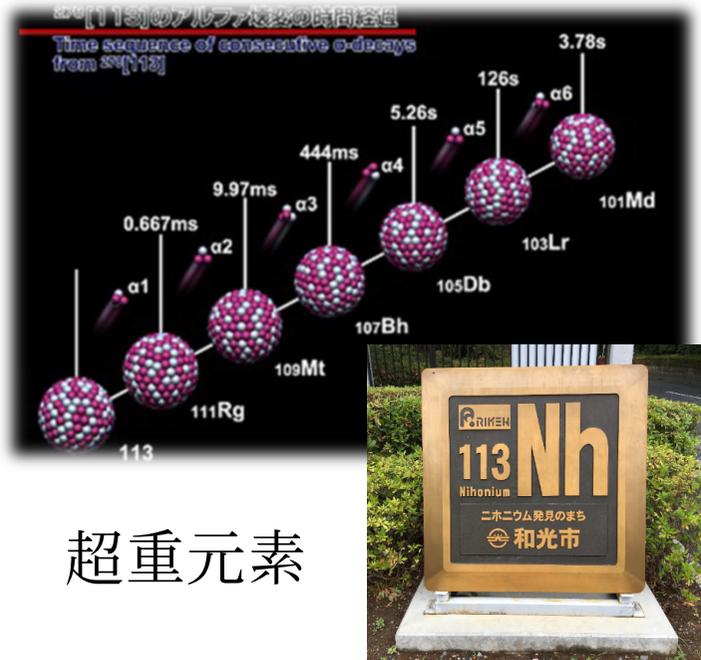
原子核反応または略して核反応は一つの原子核と他の粒子との相互作用によって起こる現象の総称である。その様相は非常に多彩である。その機構を明らかにすることが核反応論の目的である。また、それによって反応に関与する原子核、衝突粒子の状態についての情報を得ることも重要な課題である。

河合 光路『核反応』（丸善）

# 原子核反応とは？

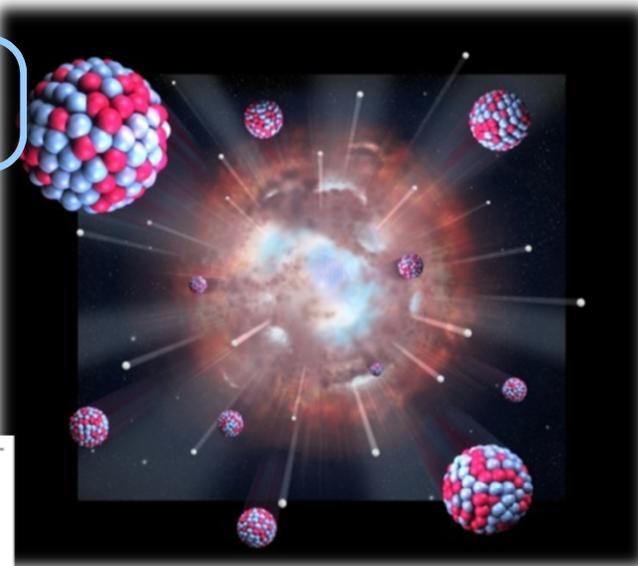
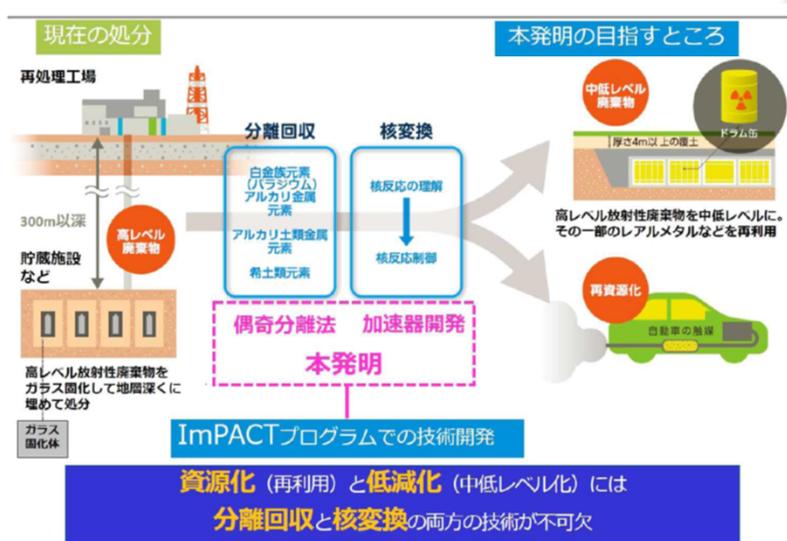
宇宙元素合成

原子核の変化を伴う現象全て



超重元素

## 核変換

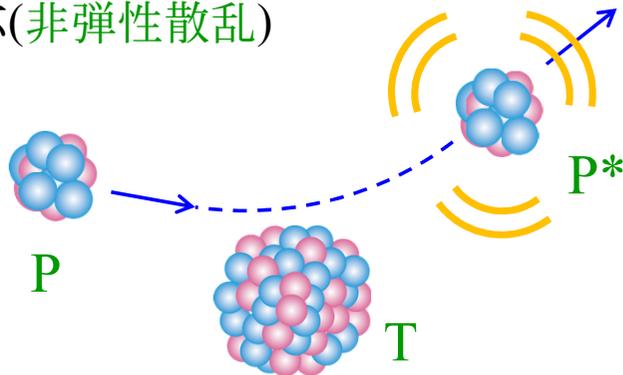


Supernova illustration: Akihiro Ikeshita  
Particle CG: Naotsugu Mikami (NAOJ)

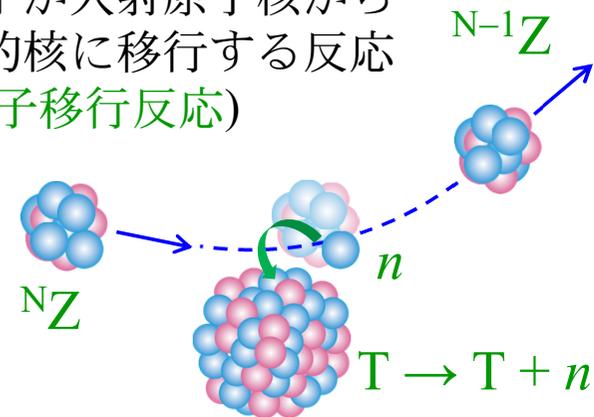
「ImPACT 藤田プログラム 21世紀発明賞の受賞について」より

# 多彩な核反応

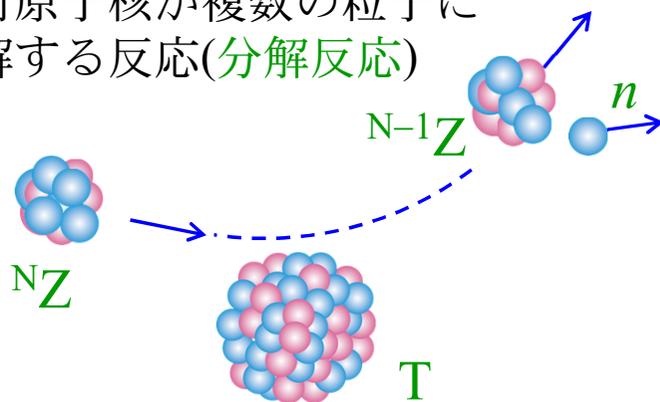
- 入射原子核が励起する反応(非弾性散乱)



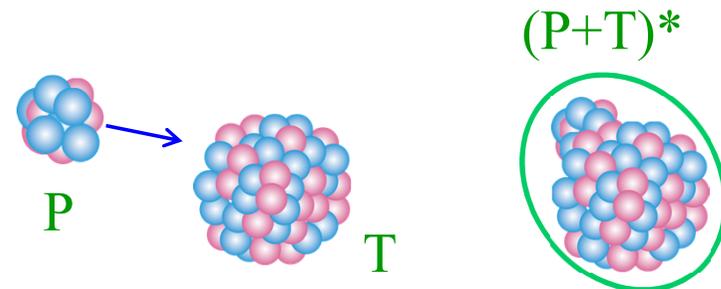
- 核子が入射原子核から標的核に移行する反応(核子移行反応)



- 入射原子核が複数の粒子に分解する反応(分解反応)



- 入射原子核が標的核に吸収される反応(融合反応)



# 原子核反応の描述

ある反応が起きる確率は、次の遷移行列が得られれば、その絶対値自乗(の定数倍)によって与えられる(3.を参照)。

$$T_{\beta\alpha} = \langle \Phi_{\beta}^{\text{free}} | V_{\beta} | \Psi_{\alpha} \rangle$$

$\Phi_{\beta}^{\text{free}}$  : 終状態の構成粒子の波動関数と、それらの間の自由波の積

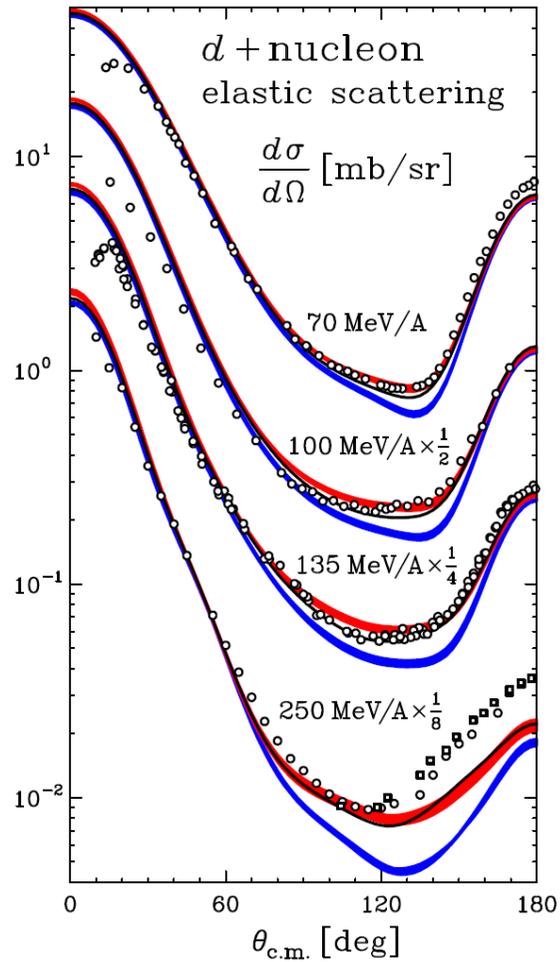
$V_{\beta}$  : 終状態の構成粒子間の相互作用

$\Psi_{\alpha}$  : 始状態( $\neq$ 入射状態)の正確な波動関数

系の基本構成要素(核子)の間の相互作用はよくわかっているのに、何が難しいのか?

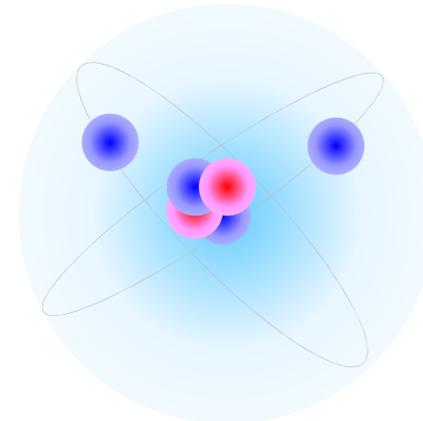
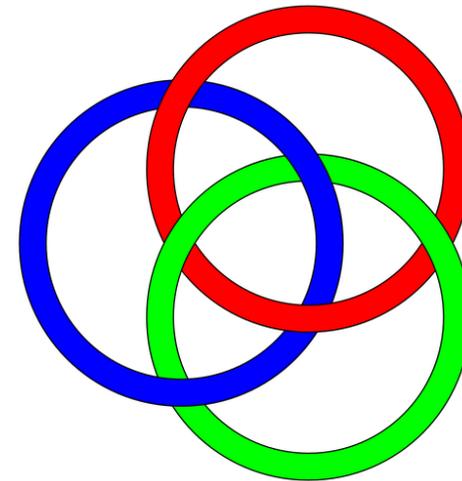
A. 多体系(多自由度)だから。+ 相互作用がえぐいから。

# 3粒子系の豊かさ



*K. Sekiguchi et al., Phys. Rev. C 65, 034003 (2002).*

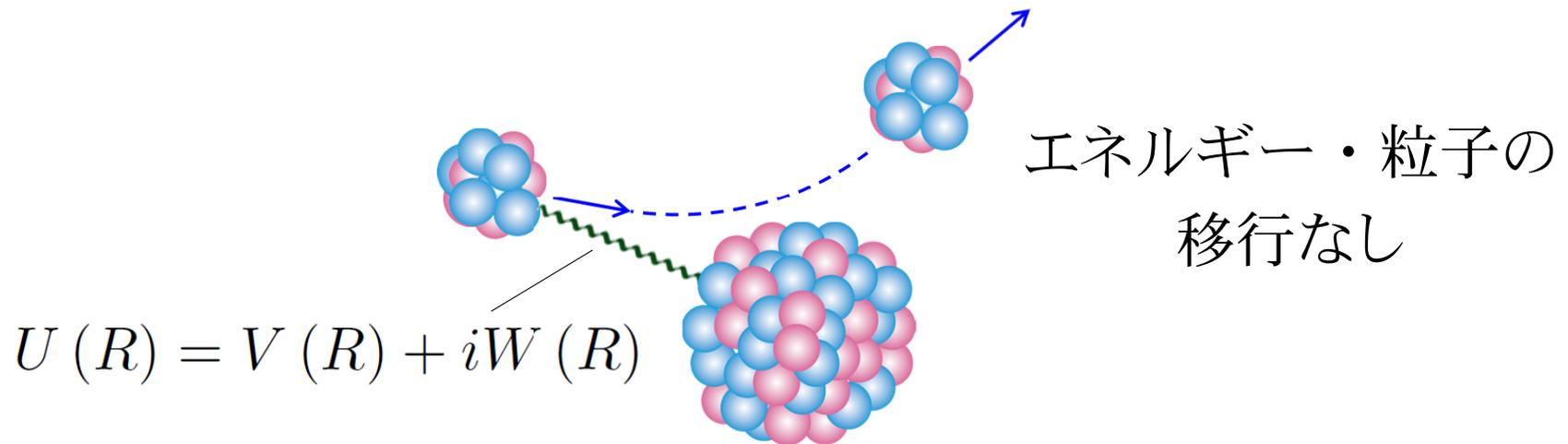
基礎相互作用がわかってても...



ボロミアン核( ${}^6\text{He}$ )

# 原子核反応の多自由度性の象徴

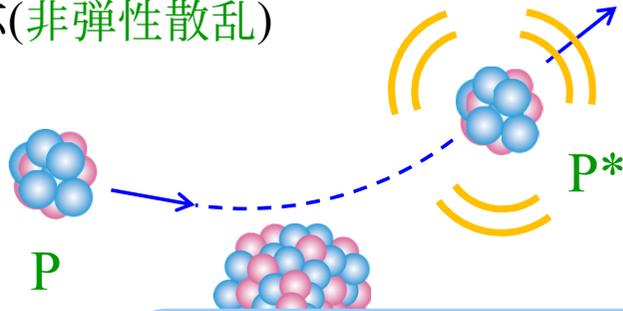
光学ポテンシャル = 弾性散乱を記述する複素一体ポテンシャル



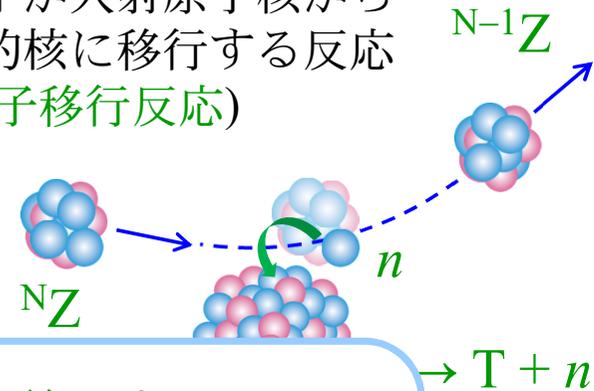
- 弾性散乱のような簡単な反応の記述に、どうしてそのような得体の知れないものが必要なのか?
- $W(R)$  は入射流束の吸収をもたらす。この吸収とは何か?

# 多彩な核反応

- 入射原子核が励起する反応(非弾性散乱)

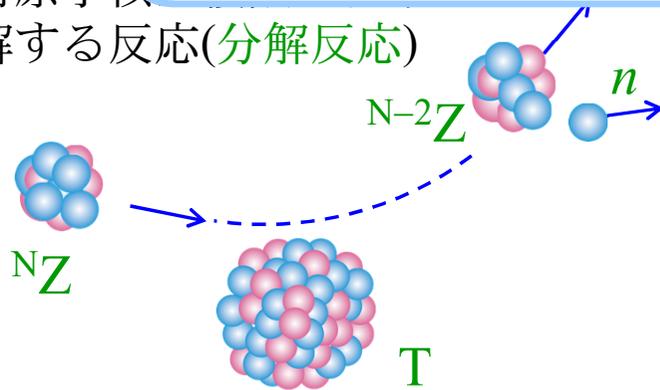


- 核子が入射原子核から標的核に移行する反応(核子移行反応)

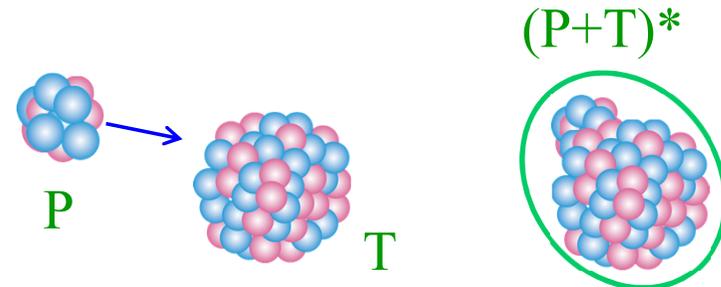


多種多様な反応が弾性散乱の背後にあり、その全てが“吸収”として扱われる(吸収 ≠ 融合)

- 入射原子核が標的核を分解する反応(分解反応)



- 入射原子核と標的核が融合する反応(融合反応)



吸収される

# 模型空間の設定(核反応論の“神髄”)

弾性チャンネル以外の(視ない)チャンネル: **Q**  
(追跡不可能)

流束の還元

弾性(視る)チャンネル: **P**  
(チャンネル: 反応系の指標)

流束の還元

吸収 = 流束の消失

cf. 全反応断面積

注意: 弾性(視る)チャンネル以外に逃げる流束の総量は記述可能。

# Feshbachの射影演算子の方法

$$(H - E)\Psi = 0, \quad \Psi = \hat{P}\Psi + \hat{Q}\Psi.$$

$$\hat{P} + \hat{Q} = 1, \quad \hat{P}^2 = \hat{P}, \quad \hat{Q}^2 = \hat{Q}, \quad \hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0.$$

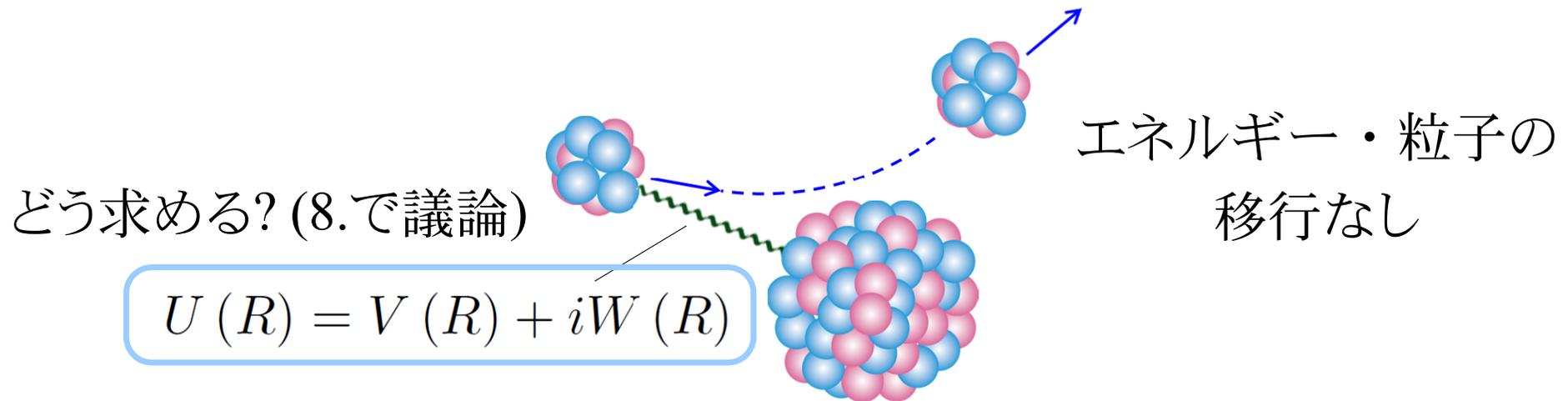
$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{P}H\hat{P} - E)\hat{P}\Psi + \hat{P}H\hat{Q}\Psi = 0, \\ (\hat{Q}H\hat{Q} - E)\hat{Q}\Psi + \hat{Q}H\hat{P}\Psi = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{※}i\eta\text{の意味は3.を参照} \\ \hat{Q}\Psi = \frac{1}{E - \hat{Q}H\hat{Q} + i\eta}\hat{Q}H\hat{P}\Psi. \end{array}$$

$$\left( \hat{P}H\hat{P} + \hat{P}H\hat{Q} \frac{1}{E - \hat{Q}H\hat{Q} + i\eta} \hat{Q}H\hat{P} - E \right) \hat{P}\Psi = 0.$$

エネルギー依存, 複素, 非局所相互作用(5.で分析)

# 原子核反応の多自由度性の象徴

光学ポテンシャル = 弾性散乱を記述する複素一体ポテンシャル



- 弾性散乱のような~~簡単な~~反応の記述に、どうしてそのような得体の知れないものが必要なのか?
- $W(R)$  は入射流束の吸収をもたらす。この吸収とは何か?

# 核反応研究の概観のまとめ

- 核反応研究の目的は、核子多体系の動的な振る舞いの理解であり、その対象は、原子核の変化を伴う現象全てである。
- 核反応は極めて多彩な現象であり、入射・標的核(反応系)の組み合わせ、入射エネルギーによって様々な反応が起きる。
- 少数個のチャンネルのみを視る(陽に扱う)際、膨大な数の視ていないチャンネルが背後に存在するため、現象の記述に非エルミートの相互作用が現れる(例: 光学ポテンシャル)。
- 核反応研究の1つの神髄は、模型空間の設定にある。
- 近年では核反応の第一原理計算も発達しており、非常に重要(ただしその価値観はこの講義の思想とは異なる)。

## 2. 断面積とは何か？

# 物の大きさを測る

Q: 500円玉の大きさはどれくらい?



A: 定規で測れば良い。→ 直径26.5mm

(面倒くさがりの人は...)

A': Webで調べれば良い。

# 物の大きさを測る

Q: 500円玉の大きさはどれくらい?



A: 定規で測れば良い。

(面倒くさがりの人は...)

A': Webで調べれば良い。

?



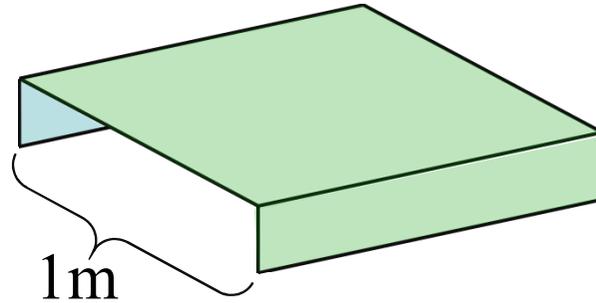
A: Webで調べれば良い。

(慎重な人は...)

A': 定規で測れば良い。

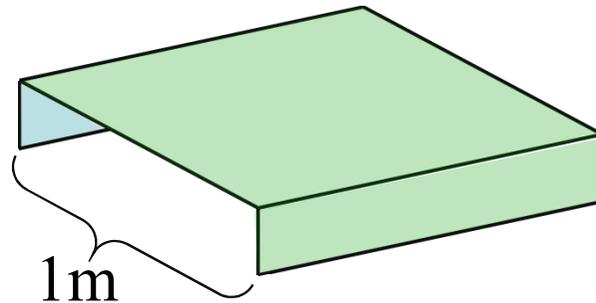
# “見えない”物の大きさを測る

Q: 下のような箱(側面は中空)に、重くて硬い物体が1個入っている。  
その物体の大きさを測るにはどうしたら良いか?

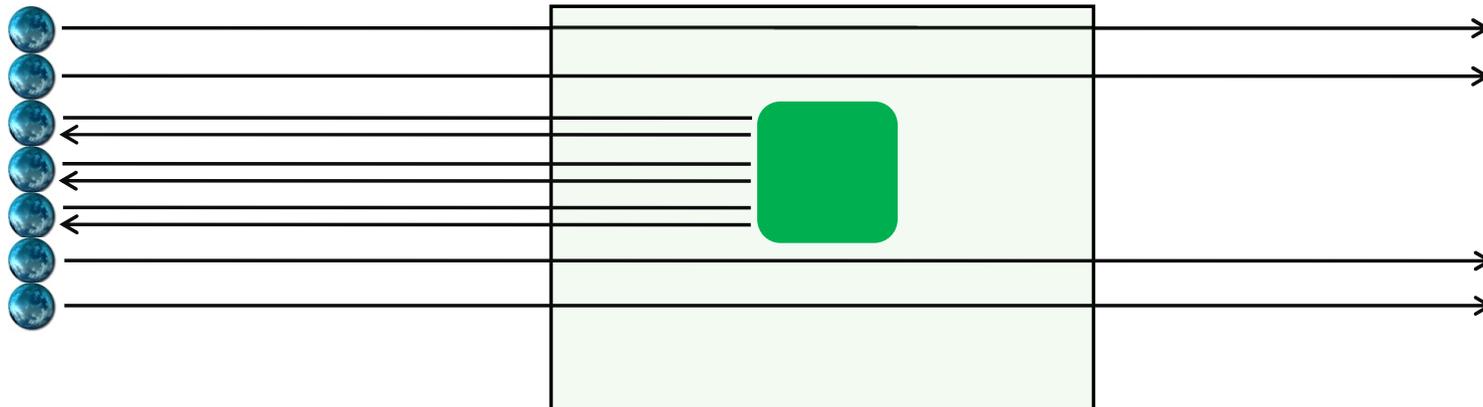


# “見えない”物の大きさを測る

Q: 下のような箱(側面は中空)に、重くて硬い物体が1個入っている。  
その物体の大きさを測るにはどうしたら良いか?

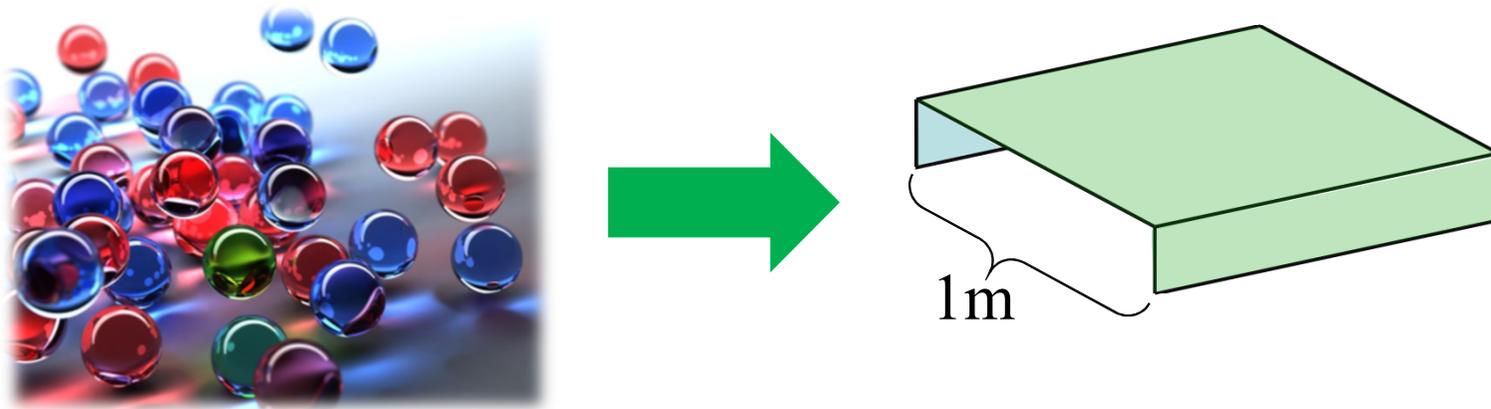


A: ビー玉を撃ち込んで反射するかどうかを見れば良い。



## 面倒くさがりの人は...

A': ビー玉を大量に(そして適当に)撃ち込んで、枠に入った数と、反射した数の比を取れば良い。



$$\frac{\text{反射した数 } N_{\text{ref}}}{\text{枠に入った数 } N_{\text{in}}} = \frac{\text{物体の幅}(dm)}{\text{枠の幅}(1m)}$$

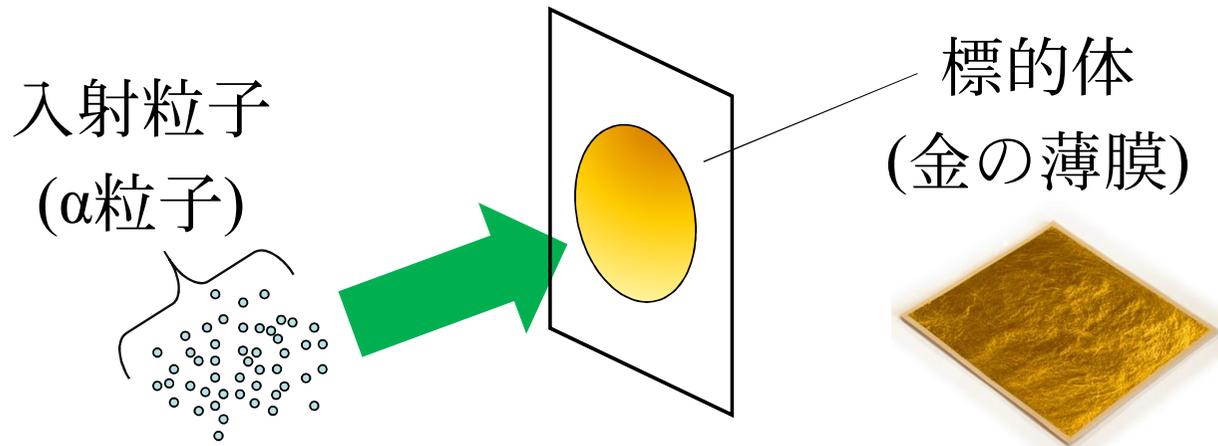
この方法は、**本当に目に見えない粒子の測定**にも使える!

# 測定式の注意点

$$\frac{\text{反射した数 } N_{\text{ref}}}{\text{枠に入った数 } N_{\text{in}}} = \frac{\text{物体の幅}(dm)}{\text{枠の幅}(1m)}$$

1. 反射した数(物体に当たった数)  $N_{\text{ref}}$  そのものには意味がない。  
→  $N_{\text{in}}$  と  $N_{\text{ref}}$  の比が物理的意味を持つ。
2. 統計的な式なので、 $N_{\text{in}}$  は十分大きくなければならない。  
→ 誤差(の最良推定値)は  $N_{\text{ref}}$  の平方根に反比例。
3. 幅1mの領域に、ただ1つの物体があるという情報を用いている。  
→ ミクロの世界に適用する際に注意が必要。

# ミクロの粒子を見る

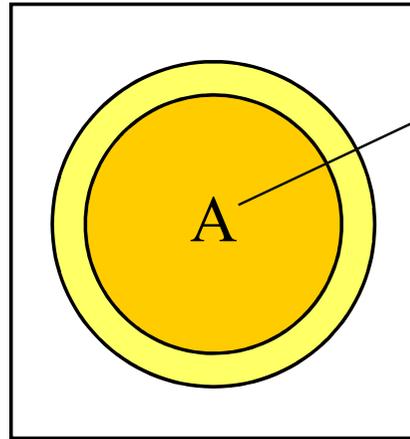


前提: • 薄膜は大量の原子から出来ている。

- 個々の入射粒子はコントロール不可だが、入射粒子全体が薄膜をヒットする領域の大きさは(巨視的に)指定可能。
- 反応粒子は、個々に観測可能。

原子の中に、入射粒子を跳ね返す塊が存在するか?  
もし存在するとしたら、その大きさはどれくらいか?

# 塊の大きさの測定法



入射粒子が  
ヒットし得る  
領域(面積 $S$ )

Aに入射した粒子の数:  $N_{in}$

実験結果

跳ね返ってきた粒子の数:  $N_{ref}$

問:  $N_{ref} / N_{in}$  は何を表すか?

- 反応が起きた確率(反応確率・イベント率)

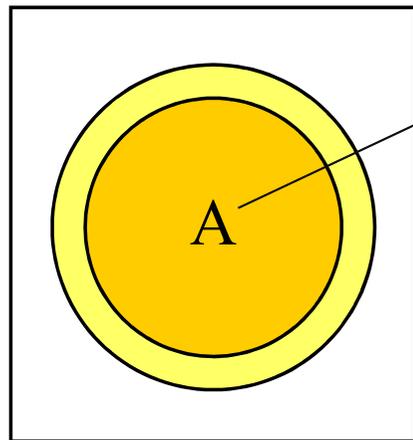
断面積

- $\frac{\text{塊を正面から見た面積 } \sigma \times A \text{ に含まれる原子(塊)の数 } N_{atom}}{A \text{ の面積 } S}$

※なぜ「反応確率」で話を済ませられないのか?

# Aに含まれる原子(塊)の数 $N_{\text{atom}}$ とは?

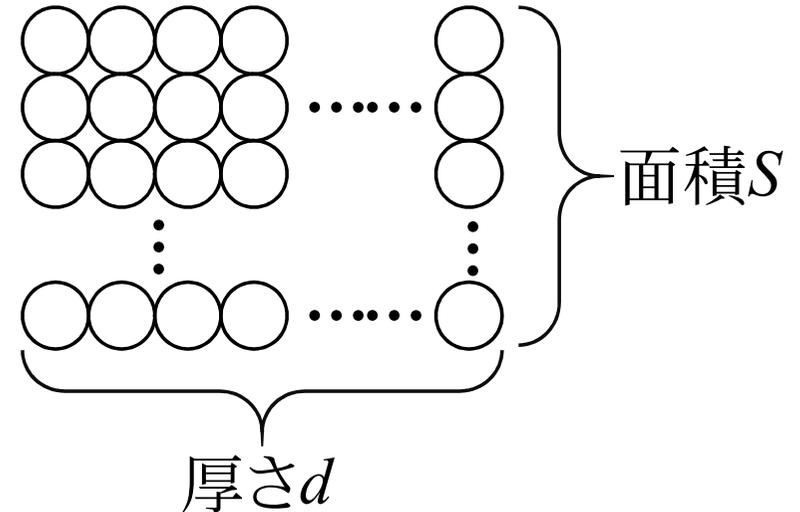
薄膜といえども**厚み**はある。



入射粒子が  
ヒットし得る  
領域(面積 $S$ )



薄膜を横から見ると...



$N_{\text{atom}}$ : 入射粒子が**衝突する可能性**がある原子の数

= 面積 $S$ , 厚さ $d$ の体積に含まれる原子の数

$$N_{\text{atom}} = \frac{\text{標的体の密度 } \rho \times S \times d \times \text{アボガドロ定数 } N_{\text{av}}}{\text{標的物質(金)の原子量 } A_{\text{Au}}}$$

# 断面積 $\sigma$ の計算式

$$\frac{N_{\text{ref}}}{N_{\text{in}}} = \frac{\text{塊を正面から見た面積 } \sigma \times A \text{ に含まれる原子(塊)の数 } N_{\text{atom}}}{A \text{ の面積 } S}$$

$$N_{\text{atom}} = \frac{\text{標的体の密度 } \rho \times S \times d \times \text{アボガドロ定数 } N_{\text{av}}}{\text{標的物質(金)の原子量 } A_{\text{Au}}}$$



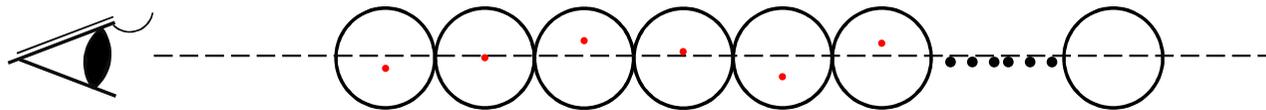
$$\sigma = \frac{N_{\text{ref}}}{N_{\text{in}}} \times \frac{A_{\text{Au}}}{\rho \times d \times N_{\text{av}}}$$

$\sigma$  は物理的実体の大きさなので、実験の精度の範囲内で、測定環境に依存しない。一方反応率は、 $d$  と共に変化する!

## $\sigma$ の計算式の適用限界

$$\sigma = \frac{N_{\text{ref}}}{N_{\text{in}}} \times \frac{A_{\text{Au}}}{\rho \times d \times N_{\text{av}}}$$

疑問:  $N_{\text{ref}} / N_{\text{in}}$  は1を越えることはない。一方、標的体の厚さ  $d$  を大きくすると右辺の後半部分は際限なく小さくなる。従って、 $\sigma$  は  $d$  が大きい極限で0になってしまうのでは？



解答: 上の式は、横から標的体を見たとき、**全ての塊が重ならない**と仮定して導いている。 $d$  が大きい極限では、明らかにこの仮定は成り立たない。従って、**標的体はあまり厚くしてはいけない**。なお、 $N_{\text{ref}} / N_{\text{in}} \ll 1$  ならば上の式は十分有効。

## $\sigma$ の測定から $\sigma$ の計算へ

実験的定義: 
$$\sigma = \frac{N_{\text{ref}}}{N_{\text{in}}} \times \frac{A_{\text{Au}}}{\rho \times d \times N_{\text{av}}} = \frac{N_{\text{ref}}}{N_{\text{in}}} \times \frac{S}{N_{\text{atom}}}$$

簡単化の方針:

- 標的粒子1つあたりのイベント数を考える。
- 単位面積あたりの入射粒子数を指定する。

$$\sigma = \frac{N_{\text{ref}} / N_{\text{atom}}}{N_{\text{in}} / S} = \frac{n_{\text{ref}}}{n_0}$$

標的粒子が1つのとき反応が起きた数を $n_0$ で割れば良い。

注意点:

- 実際は、単位時間あたりの数を問題とする(ビームを入射)。
- もし確率が規格化されていれば、 $n_{\text{ref}}$ は反応率と等しい。

# 断面積とは何か?のまとめ

- 断面積とは、反応の頻度を定量化する物理量である。  
※反応確率は、実験条件(標的体の厚さ)によって変化する。
- 断面積は、標的粒子のうち、ある反応を引き起こす能力を持った部分(断面)の“大きさ”とみなすことができる。
- 反応のイベント数を、単位面積に入射した粒子の数で割ると、断面積が得られる。  
※正確には、単位時間あたりのイベント数を、単位時間・単位面積あたりに入射した粒子の数(入射流束)で割る。
- 粒子がある微小立体角に放出する反応の断面積を微分断面積(正確には角度に対する微分断面積: 角分布)と呼ぶ。

### 3. Lippmann-Schwinger方程式



- 巨視的な空間に広がった波動関数を用いた時間依存散乱理論を概観する。
- 時間に依存しない散乱波に、その波が本来有していた時間依存性の名残  $+i\eta$  を与える。
- 散乱の基礎方程式である Lippmann-Schwinger (LS)方程式を導出する。

$$|\chi^{(+)}\rangle = |\alpha\rangle + \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\eta} V |\chi^{(+)}\rangle$$

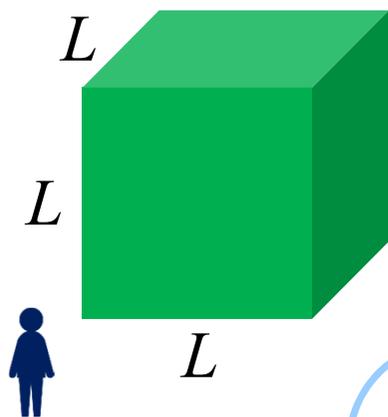


# 時間依存シュレディンガー方程式(ポテンシャル散乱)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{R}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + V(\mathbf{R}) \right] \Psi(\mathbf{R}, t) \quad \mu: \text{換算質量}$$

巨視的空間(☉: 1辺の長さ  $L$  の立方体)で規格化された平面波で展開:

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}} \quad \left( E_n = \frac{\hbar^2 K_n^2}{2m} \right)$$



$$\downarrow \frac{1}{L^3} \int_{\text{☉}} e^{-i\mathbf{K}_{n'} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{R} = \delta_{n'n}$$

$$i\hbar \frac{dC_{n'}(t)}{dt} = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\text{☉}} C_n(t) e^{i\omega_{n'n} t}$$

$$\langle n' | V | n \rangle_{\text{☉}} \equiv \int_{\text{☉}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\mathbf{K}_{n'} \cdot \mathbf{R}} V(\mathbf{R}) \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{R}$$

$$\omega_{n'n} \equiv \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar}$$

# 時間依存シュレディンガー方程式の摂動解

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}}$$

$$i\hbar \frac{dC_{n'}(t)}{dt} = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\text{sp}} C_n(t) e^{i\omega_{n'n} t}$$

無摂動解:  $C_n^{(0)}(t) = \delta_{n\alpha}$  ( $\alpha$  は入射チャンネルのラベル)

$$1\text{次の摂動解: } C_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n | V | \alpha \rangle_{\text{sp}} e^{i\omega_{n\alpha} t'} dt'$$

入射時刻

$$2\text{次の摂動解: } i\hbar \frac{d}{dt} C_{n'}^{(2)}(t) = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\text{sp}} C_n^{(1)}(t) e^{i\omega_{n'n} t}$$

(の方程式)

## 2次の摂動解

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_{n'}^{(2)}(t) = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{M}} C_n^{(1)}(t) e^{i\omega_{n'n}t}$$

$$C_{n'}^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \sum_n \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{M}} e^{i\omega_{n'n}t'} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{M}} e^{i\omega_{n\alpha}t''}$$

$t''$  積分を以下のように処理:

$t \rightarrow -\infty$  で相互作用消失

$$\int_{-\infty}^{t'} e^{i\omega_{n\alpha}t''} dt'' \rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{t'} e^{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)t''} dt'' = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{e^{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)t'}}{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)}$$

微小な相互作用変化  
(極限は最後に取り)

$$= i\hbar \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{e^{i\omega_{n\alpha}t'}}{E_\alpha - E_n + i\eta}$$

$+i\eta$  は、現実の散乱が波束の時間発展で表されることを簡便に表現するもの(+は無限の過去で自由状態という意味)。

## 2次の摂動解(つづき)

$$C_{n'}^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \sum_n \int_{-\infty}^t \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'n}t'} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}} \left( i\hbar \frac{e^{i\omega_{n\alpha}t'}}{E_\alpha - E_n + i\eta} \right) dt'$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \sum_n \int_{-\infty}^t \frac{\langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}}}{E_\alpha - E_n + i\eta} e^{i\omega_{n'\alpha}t'} dt'$$

※この時間依存因子の処理は、フェルミの黄金律の導出を参照。

lim は省略(以下も同様)。1次の摂動解とまとめて

$$C_{n'}^{(1)}(t) + C_{n'}^{(2)} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n' | V | \chi^{(+)(1)} \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'\alpha}t'} dt'$$

$$|\chi^{(+)(1)}\rangle \equiv |\alpha\rangle + \sum_n \frac{|n\rangle \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}}}{E_\alpha - E_n + i\eta} = |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V |\alpha\rangle$$

1次の摂動入り散乱波

$$G_0^{(+)} \equiv \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\eta} = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{E_\alpha - E_n + i\eta}$$

グリーン関数のスペクトル展開

# Lippmann-Schwinger方程式

同様にして摂動の高次まで取り入れる。

$$\bar{C}_{n'}(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} C_{n'}^{(i)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n' | V | \chi^{(+)} \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'\alpha} t'} dt'$$

$$|\chi^{(+)}\rangle \equiv |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V G_0^{(+)} V |\alpha\rangle + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \left( G_0^{(+)} V \right)^i |\alpha\rangle$$

## Lippmann-Schwinger (LS)方程式

$$|\chi^{(+)}\rangle = |\alpha\rangle + \frac{1}{E_{\alpha} - H_0 + i\eta} V |\chi^{(+)}\rangle$$

LS方程式は、適切な境界条件を満たす散乱波の形式解を与える。  
+ $i\eta$  を含む式は、無限の過去で平面波状態であったこと、それが相互作用によって平面波+外向波となることの双方を保証する。

# Lippmann-Schwinger方程式と遷移行列のまとめ

- 波束の運動によって記述される現実の散乱現象を模倣する処理を行うことで、適切な境界条件を満たす定常散乱波の形式解が得られる。これがLippmann-Schwinger (LS)方程式である。
- LS方程式に現れる  $+i\eta$  は、散乱現象が、無限の過去において相互作用を受けていない自由な状態(平面波状態)から始まり、極めてゆっくりと相互作用がはたらいて、平面波+外向波という漸近条件をもつ状態に推移するものであることを保証している。これが、2体散乱における適切な境界条件の実体である。
- 3体反応に対しては、LS方程式は理論的正当性を失う(9.を参照)。

## 4. アイコナール近似



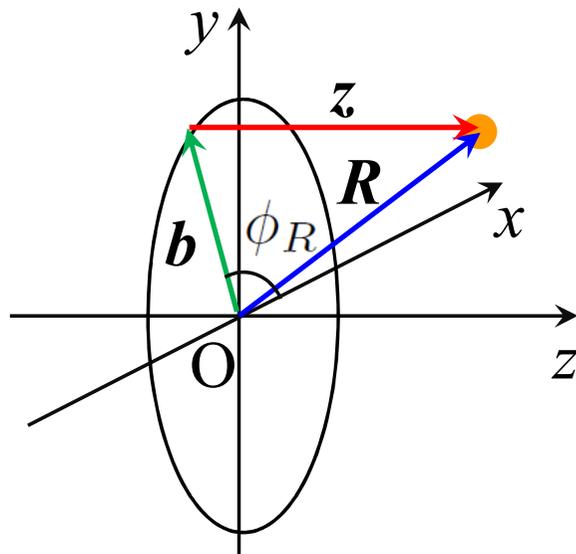
*Harrowing of Hell and Resurrection*

# 散乱問題を簡便に解く

以下のシュレディンガー方程式を解く。

$$[T_{\mathbf{R}} + U(\mathbf{R}) - E] \chi(\mathbf{R}) = 0$$

$T_{\mathbf{R}}$ : 運動エネルギー演算子,  $E$ : 散乱エネルギー,  $U$ : 一体ポテンシャル



左図のような座標系(円筒座標系)で反応を記述する。



$$\nabla_{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} \left( b \frac{\partial}{\partial b} \right) + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_R^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$d\mathbf{R} = b db d\phi_R dz.$$

# アイコナール近似

散乱波に、以下の関数形を仮定( $\phi_R$ について対称とする)。

$$\chi(\mathbf{R}) = \psi(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R})$$

シュレディンガー方程式に代入し、 $\nabla_{\mathbf{R}}^2 \psi(b, z) \approx 0$  と近似する。

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} 2 \left[ \frac{\partial}{\partial z} \psi(b, z) \right] iK \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iKz} + U(R) \psi(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iKz} = 0$$

散乱粒子の速さを  $v \equiv \frac{\hbar K}{\mu}$  とすると、

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi(b, z) = \frac{1}{i\hbar v} U(R) \psi(b, z)$$

これが、解くべき散乱のシュレディンガー方程式。

# アイコナール方程式の解

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi(b, z) = \frac{1}{i\hbar v} U(R) \psi(b, z)$$

変数分離形の微分方程式なので、容易に解くことができる。

$$\psi(b, z) = C \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z U(b, z') dz' \right]$$

反応の初期条件  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \psi(b, z) = 1$  (波動関数  $\rightarrow$  平面波)  $\rightarrow C = 1$ .

アイコナール波動関数

$$\chi(\mathbf{R}) = \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z U(b, z') dz' \right] \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iKz}$$

# アイコナール近似の成立条件

基本思想:

ポテンシャルによって散乱波は平面波からずれるが、そのずれは緩やかに起きる。

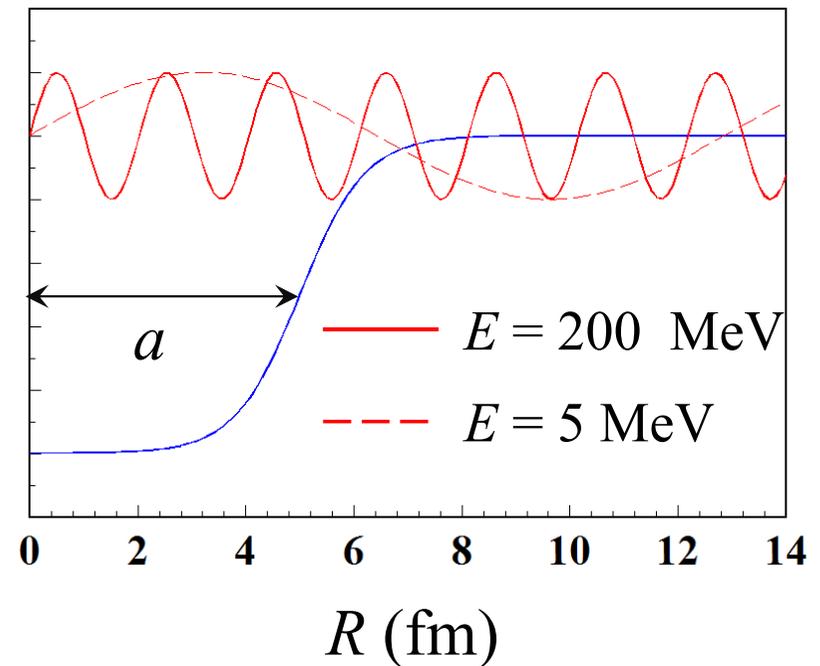
成立条件:

1. ポテンシャル(の絶対値)は、エネルギーよりも十分小さい。

$$|U|/E \ll 1$$

2. 散乱波の1波長内で、ポテンシャルの変化が小さい。

$$Ka \gg 1$$

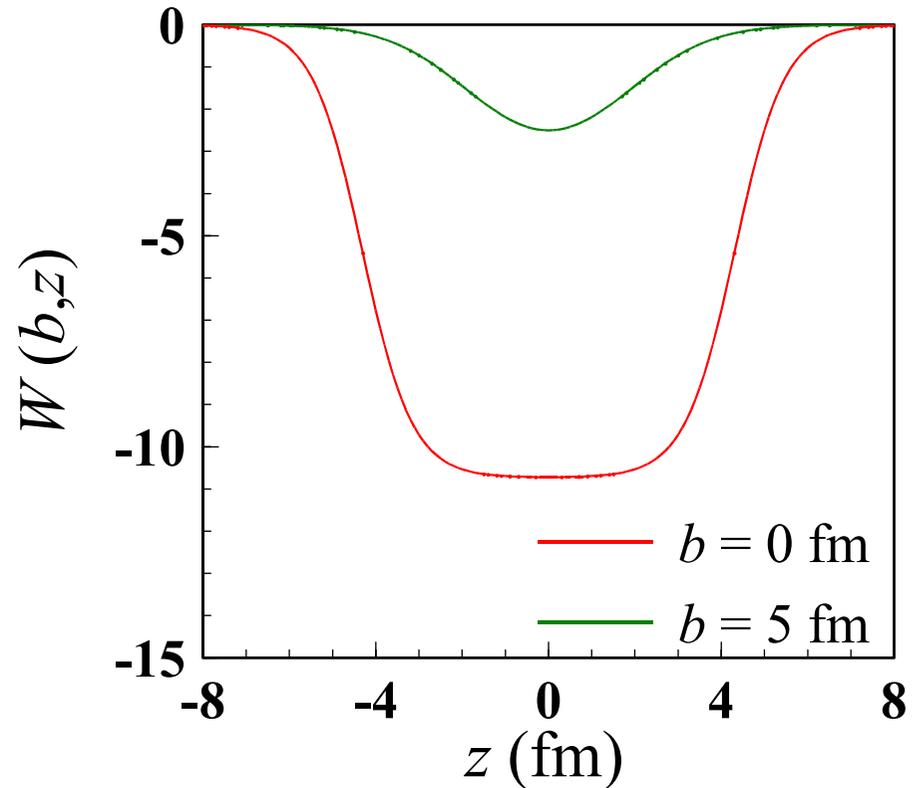
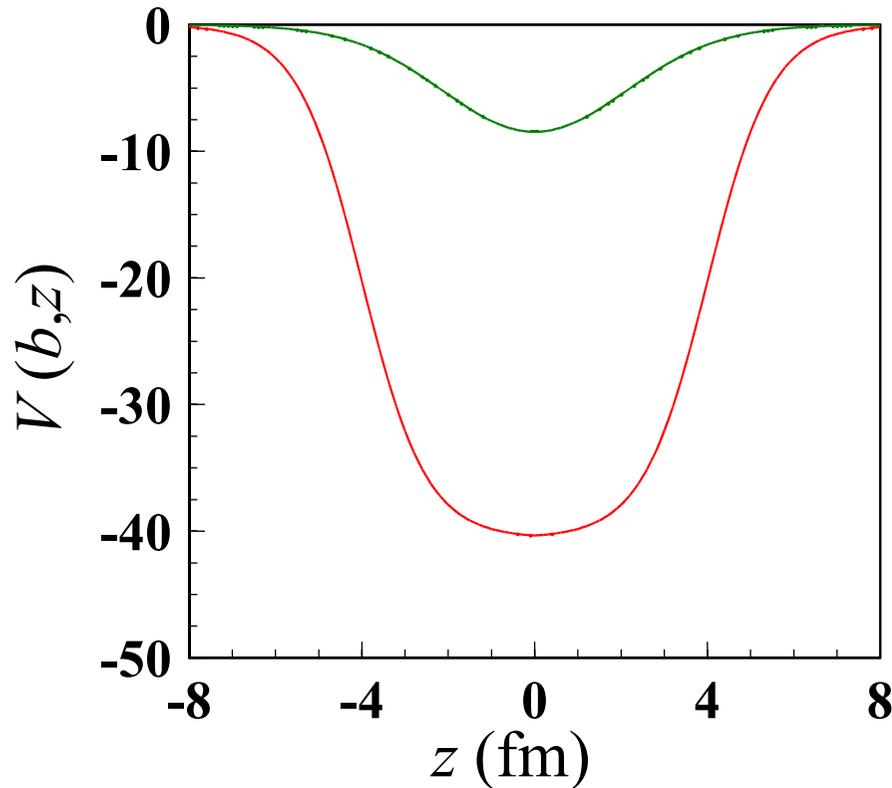


# 光学ポテンシャル(ウッズ-サクソン型)

$n+^{40}\text{Ca}$  at 65 MeV:  $U(R) = V(R) + iW(R)$

パラメータ:  $V_0 = 40.55$  MeV,  $R_0 = 1.17A^{1/3}$  fm,  $a_0 = 0.75$  fm,

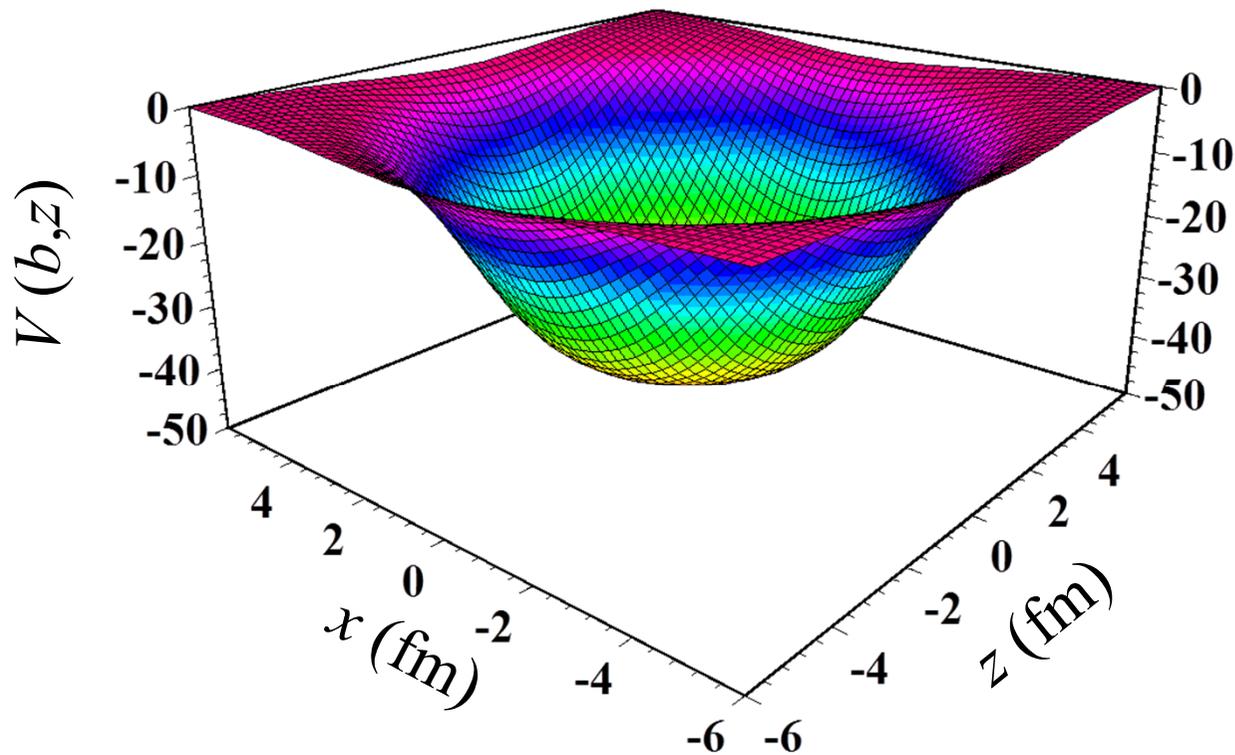
$W_0 = 10.73$  MeV,  $R_w = 1.26A^{1/3}$  fm,  $a_w = 0.58$  fm.



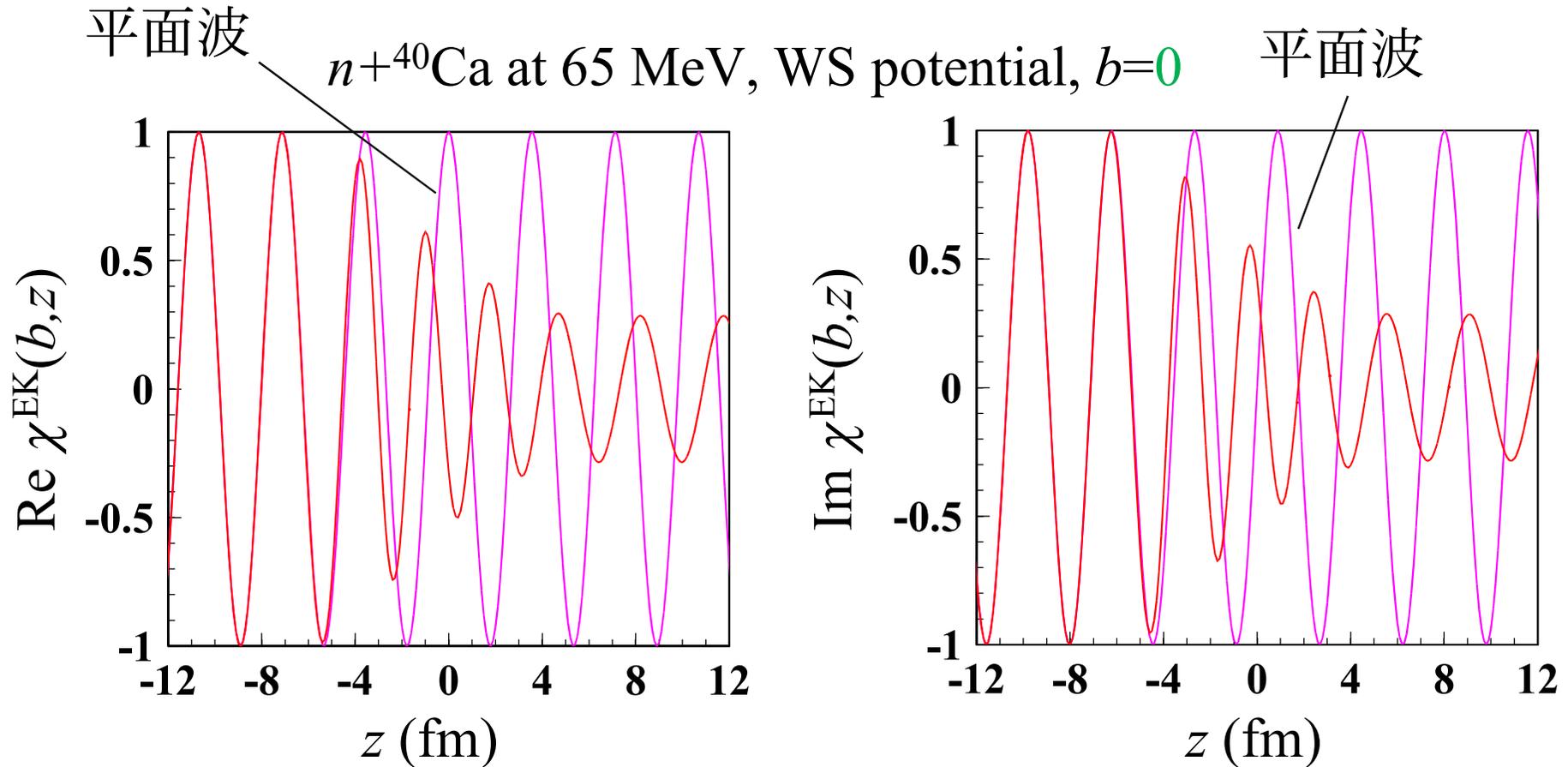
## Vの3次元プロット(y = 0 平面)

$n+^{40}\text{Ca}$  at 65 MeV:  $U(R) = V(R) + iW(R)$

パラメータ:  $V_0 = 40.55$  MeV,  $R_0 = 1.17A^{1/3}$  fm,  $a_0 = 0.75$  fm,  
 $W_0 = 10.73$  MeV,  $R_w = 1.26A^{1/3}$  fm,  $a_w = 0.58$  fm.



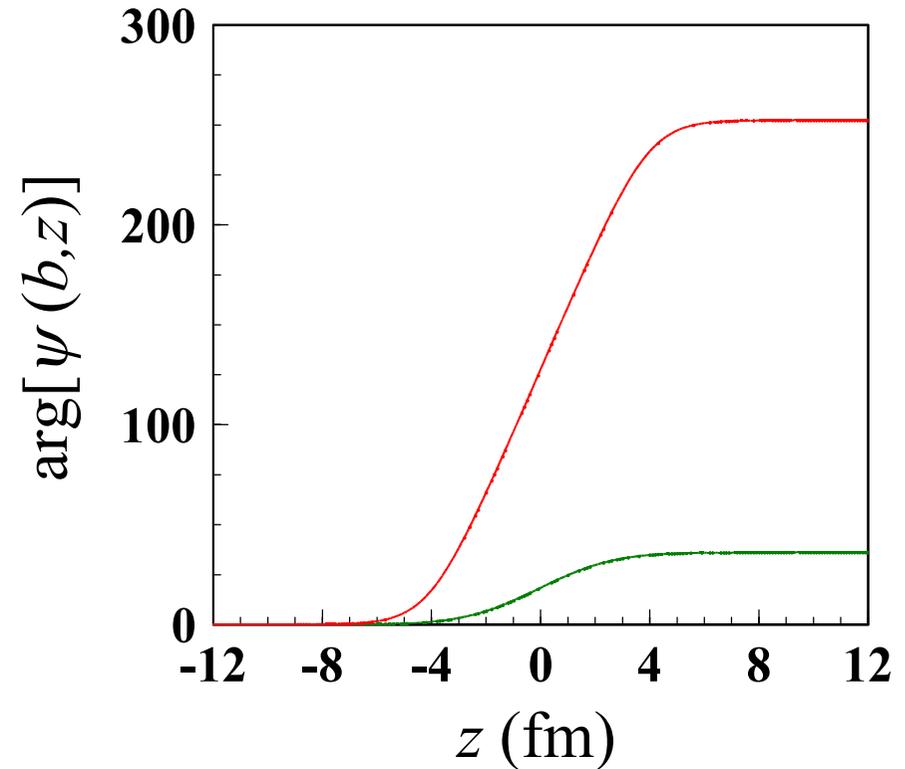
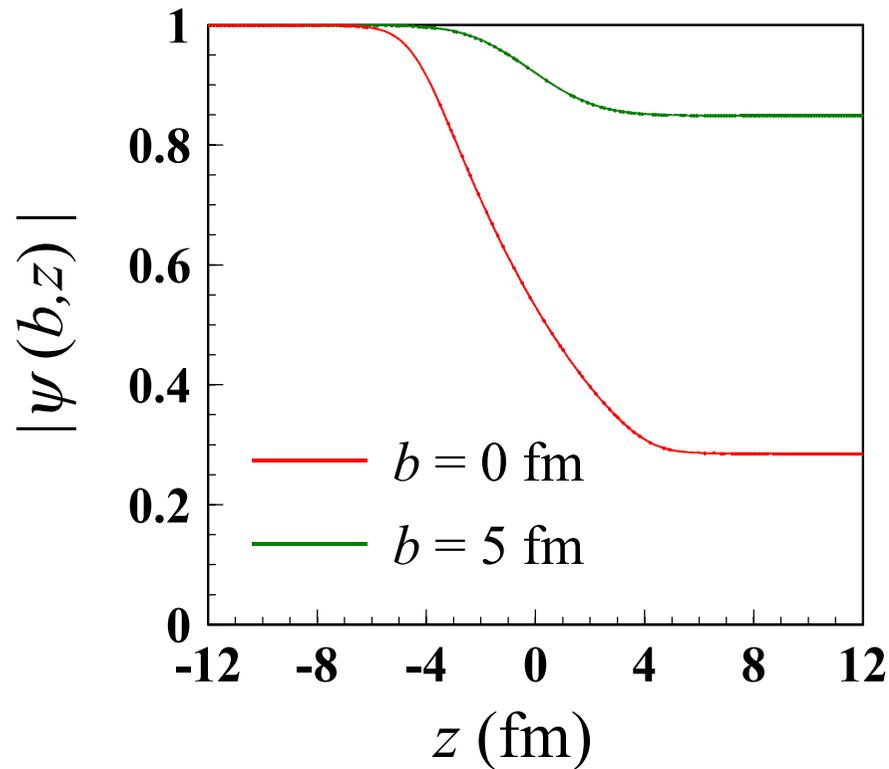
# アイコナル波動関数



- 吸収によって、振幅が減少する(虚数部  $W$  の効果)。
- ポテンシャルに引き込まれ、波長が短くなる(実数部  $V$  の効果)。

# アイコナル波動関数の絶対値と位相

$n+^{40}\text{Ca}$  at 65 MeV, WS potential



- 波動関数の変化がより明確に見える。
- $b = 5$  fm でも同様。ただし変化は小さい。

# 微分断面積の計算

遷移行列:

$$T = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}' \cdot \mathbf{R}} \left| U(b, z) \right| \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z U(b, z') dz' \right] \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}z} \right\rangle$$

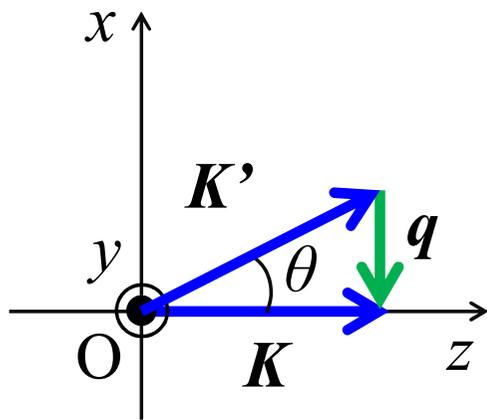
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} U(b, z) \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z U(b, z') dz' \right] d\mathbf{R}$$

ただし  $\mathbf{q} = \mathbf{K} - \mathbf{K}'$  ( $q = 2K \sin(\theta/2)$ ). 散乱が前方に限られると仮定する(前方散乱近似)と、 $\mathbf{q}$  は  $x$  軸と反平行とみなせる。一方、 $\mathbf{R}$  の

$x$  成分は  $b \cos \phi_R$  であるから、 $\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} \approx -qb \cos \phi_R$ .

よって、被積分関数で  $z$  に依存するのは

$$U(b, z) \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z U(b, z') dz' \right]$$



## 微分断面積の計算(つづき)

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi(b, z) = \frac{1}{i\hbar v} U(R) \psi(b, z)$$



$$\begin{aligned} I(b, \phi_R) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} U(b, z) \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z U(b, z') dz' \right] dz = \int_{-\infty}^{\infty} U(b, z) \psi(b, z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar v \left[ \frac{\partial}{\partial z} \psi(b, z) \right] dz = i\hbar v [\psi(b, z)]_{-\infty}^{\infty} = i\hbar v [S^{\text{EK}}(b) - 1] \end{aligned}$$

アイコンール  $S$  行列

$$S^{\text{EK}}(b) \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(b, z) = \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} U(b, z) dz \right]$$

## 微分断面積の計算(さらにつづき)

$$T \approx \frac{i\hbar v}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi_R e^{-iKb\theta \cos \phi_R} \int_0^\infty db [S^{\text{EK}}(b) - 1] b \equiv T^{\text{EK}}$$

積分公式:  $\int_0^{2\pi} e^{-iKb\theta \cos \phi_R} d\phi_R = 2\pi J_0(Kb\theta)$  0次の第1種ベッセル関数

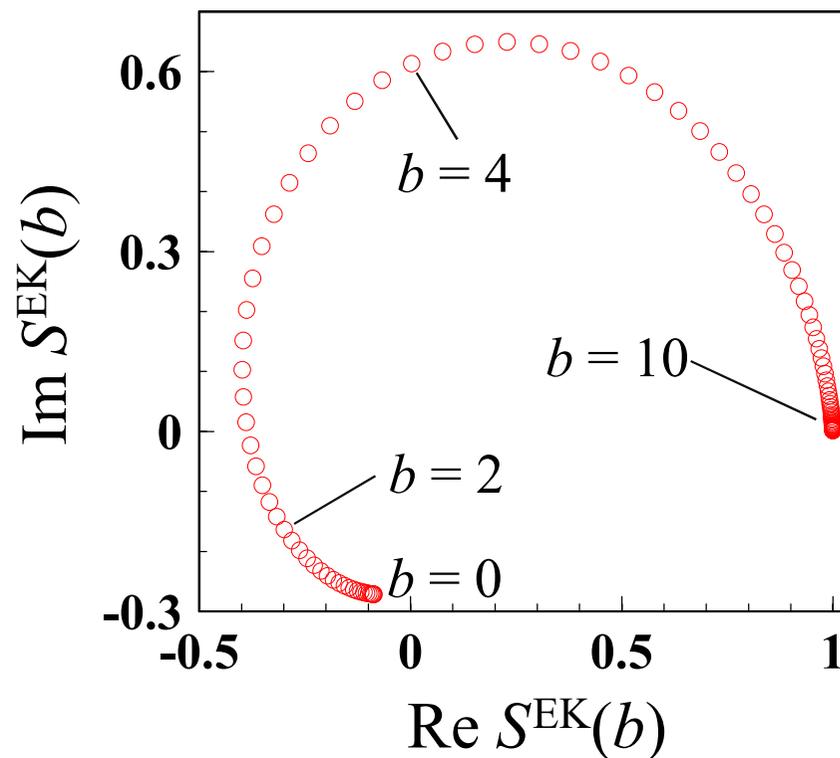
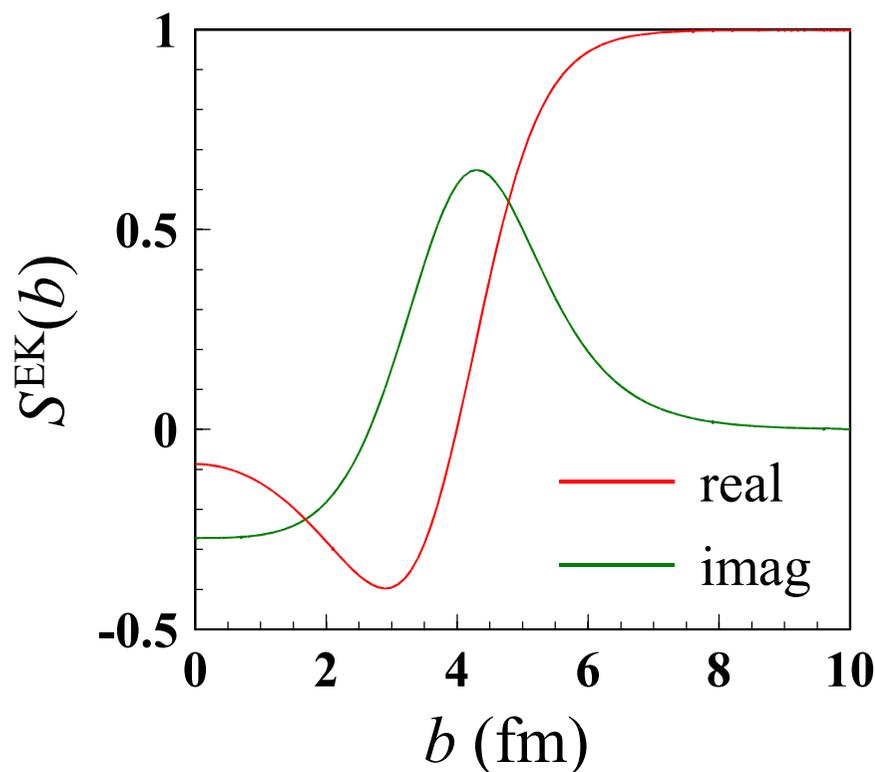
$$\therefore T^{\text{EK}} = \frac{i\hbar v}{(2\pi)^2} \int_0^\infty J_0(Kb\theta) [S^{\text{EK}}(b) - 1] b db$$

アイコナール近似に基づく微分断面式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 \mu^2}{\hbar^4} |T^{\text{EK}}|^2 = K^2 \left| \int_0^\infty J_0(Kb\theta) [S^{\text{EK}}(b) - 1] b db \right|^2$$

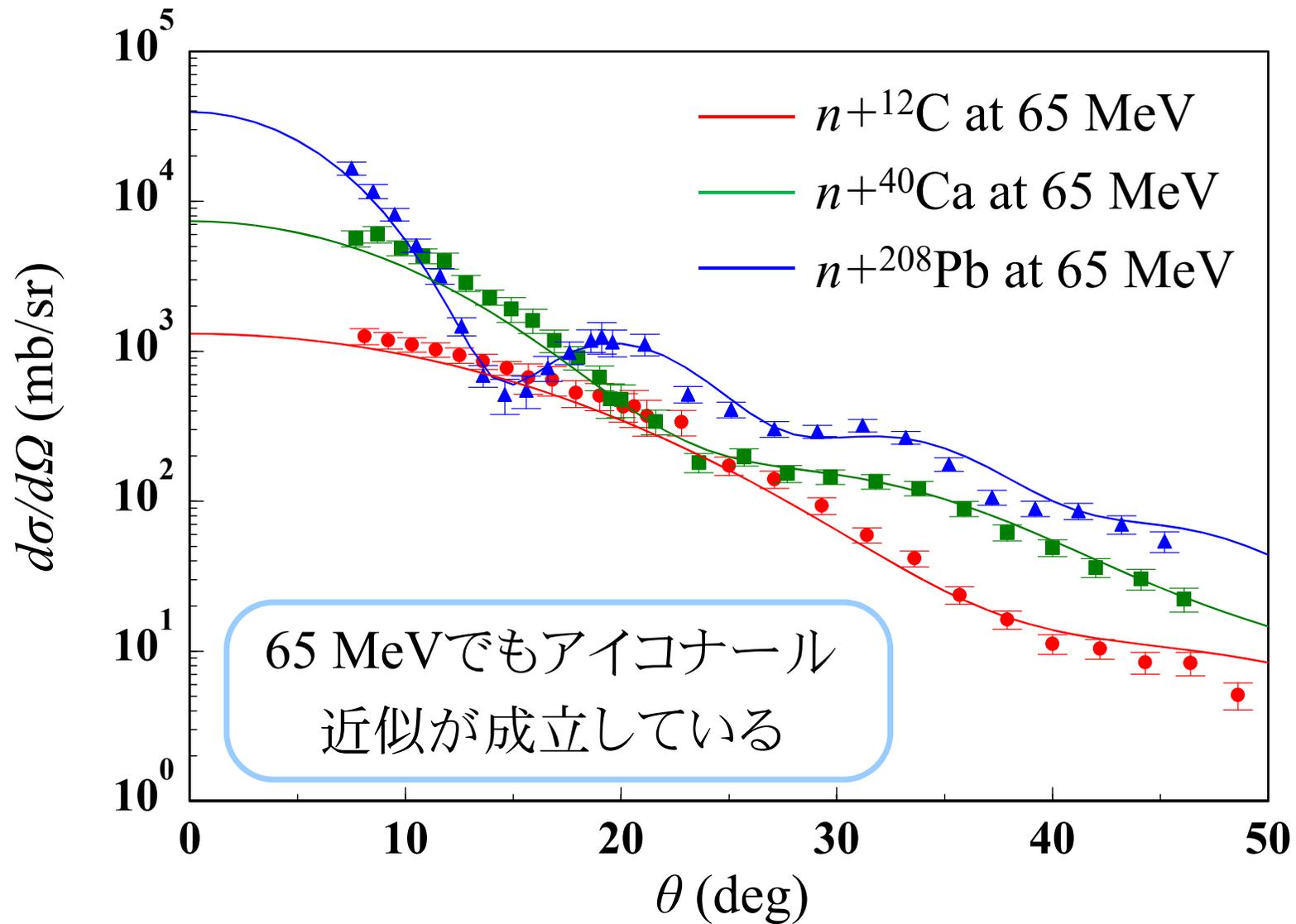
# アイコンールS行列の振る舞い

$n+^{40}\text{Ca}$  at 65 MeV, WS potential



- アイコナール  $S$  行列は、 $b$  の変化に伴って複素平面上を滑らかに動き、やがて  $(1,0)$  に収束する。

# アイコナール近似による断面積の解析



# クーロン場中でのアイコナール近似

入射平面波をクーロン入射波に変更すれば、同様の計算が可能。

$$\chi_{\mathbf{K}}^{(+)}(\mathbf{R}) = \psi(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i[\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} + \eta \ln(KR - \mathbf{K} \cdot \mathbf{R})]} \quad \text{ゾンマーフェルトパラメータ}$$

$$\eta \equiv \frac{\mu Z_P Z_A e^2}{\hbar^2 K} = \frac{Z_P Z_A e^2}{\hbar v}$$

$$T^{\text{EK}} = \frac{i\hbar v}{(2\pi)^2} \int_0^\infty e^{2i\eta \ln(Kb)} J_0(Kb\theta) [S^{\text{EK}}(b) - 1] b db$$

クーロンなしの場合と同じ

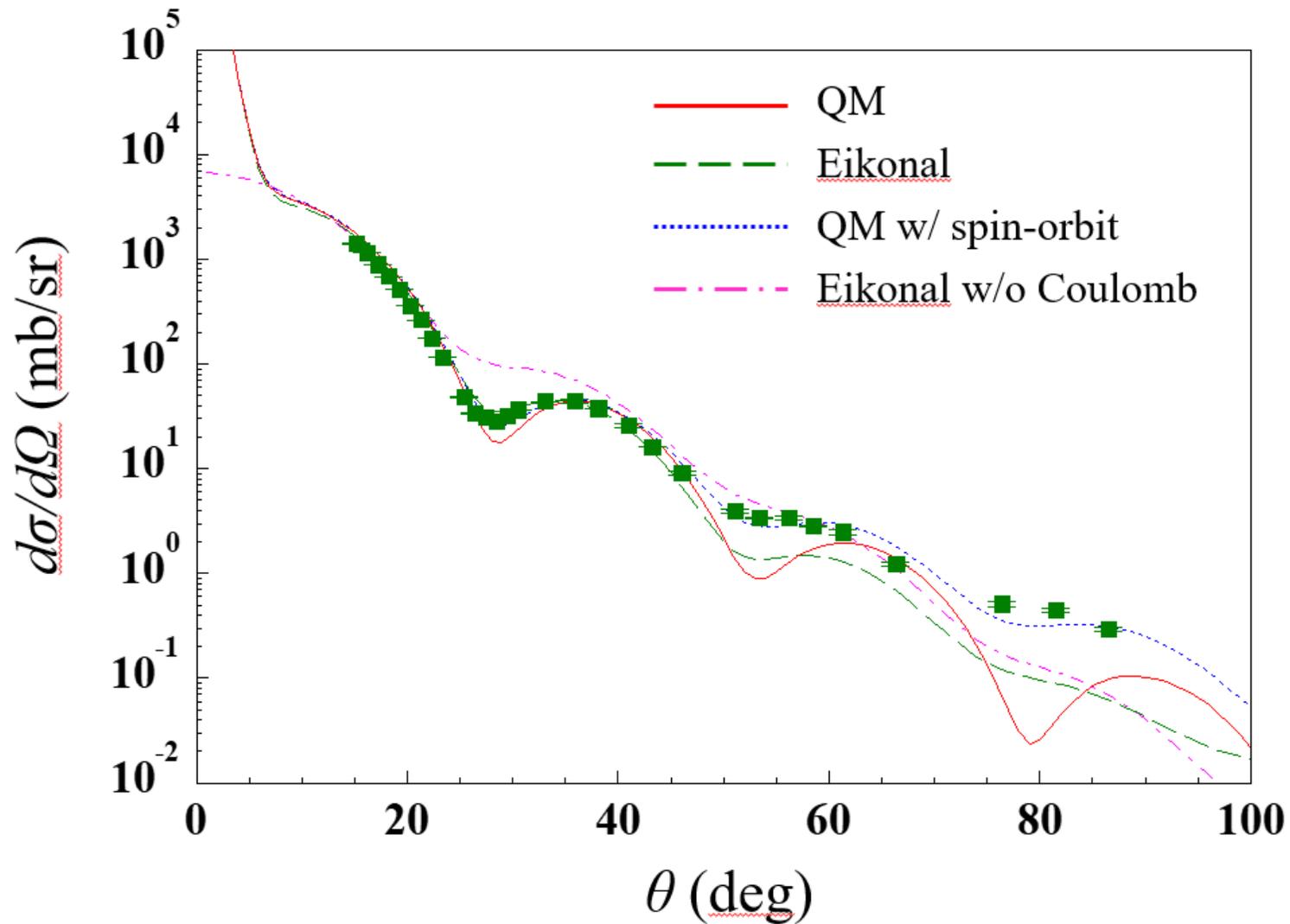
クーロン位相因子

弾性散乱の微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f^{\text{C}}(\theta_R) + f^{\text{EK}}(\theta_R) \right|^2 \quad f^{\text{EK}}(\theta) = -\frac{(2\pi)^2 \mu}{\hbar^2} T^{\text{EK}}$$

ラザフォード振幅

# $p-^{40}\text{Ca}$ の弾性散乱断面積(65MeV)



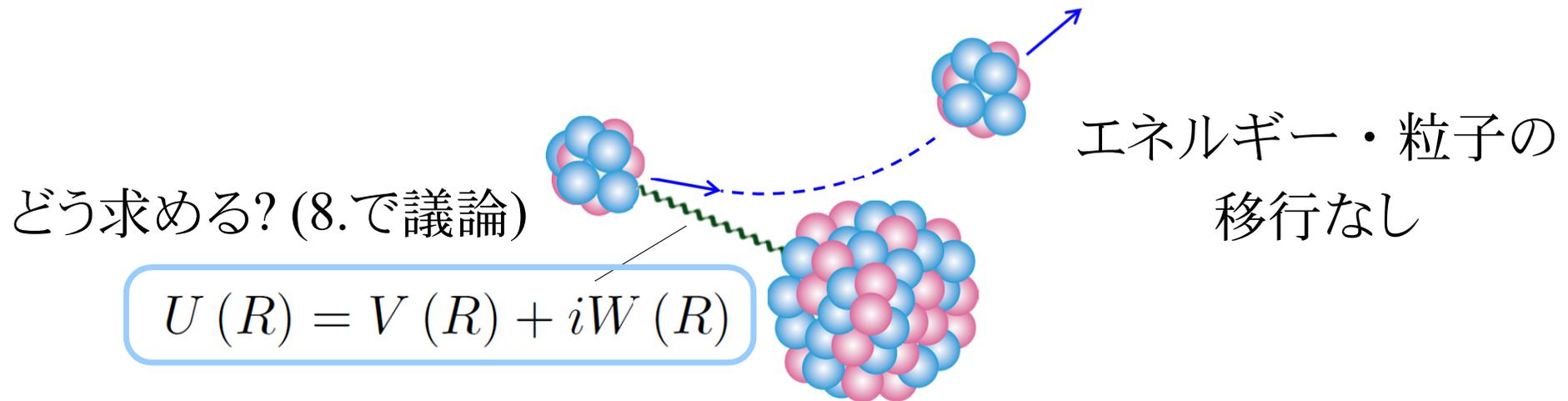
# アイコナール近似のまとめ

- 散乱問題を近似的に解く手法として、アイコナール近似を紹介した。この近似は、比較的エネルギーが高いときに有効である。
- アイコナール近似の結果、散乱問題は、 $z$  軸方向についての微分方程式に帰着する。
- ポテンシャルの影響により、入射波の位相がずれ、振幅が減少する。それぞれ、原子核による回折および吸収の効果を表す。
- 微分断面積の計算も容易に可能。その結果は、中性子の弾性散乱角分布( $\sim 65$  MeV)を、後方までかなり良く再現する。
- クーロン相互作用がある場合も同様の定式化が可能。

## 5. チャンネル結合法

# 原子核反応の多自由度性の象徴

光学ポテンシャル = 弾性散乱を記述する複素一体ポテンシャル



- 弾性散乱のような~~簡単な~~反応の記述に、どうしてそのような得体の知れないものが必要なのか?
- $W(R)$  は入射流束の吸収をもたらす。この吸収とは何か?

# チャンネルの定義(中性子-原子核散乱の例)

反応に関与する粒子それぞれの状態と、それらの間のエネルギーをひとまとめに指定するもの。

※ただし実際に指定しなければならない指標はその一部

入射中性子のエネルギー + 原子核の状態 = チャンネル



エネルギー:  $E_0$



基底状態

エネルギー:  $\varepsilon_0$

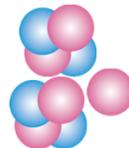
弾性チャンネル



全(自由)エネルギー  
が同じなら結合



エネルギー:  $E_1$



励起状態

エネルギー:  $\varepsilon_1$

非弾性チャンネル



# 反応系の波動関数

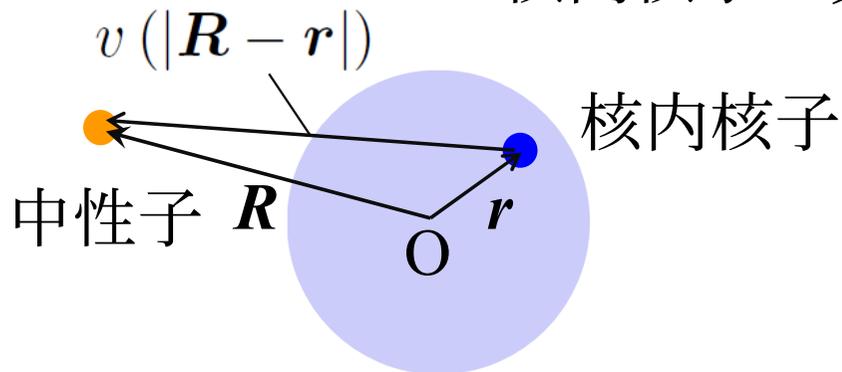
$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \equiv \chi_0(\mathbf{R}) \Phi_0(r) + \chi_1(\mathbf{R}) \Phi_1(r)$$

原子核の内部ハミルトニアン  $h$  の固有関数系  $\{\Phi_0, \Phi_1\}$  は完全系をなす(という仮想的な世界を考える)。

シュレディンガー方程式

$$[T_{\mathbf{R}} + Av(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) + h - E_{\text{tot}}] \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = 0$$

核内核子の数      系の全エネルギー



重要:  $v$  は実数の相互作用

※流束はどこにも逃げない!

# 模型空間と吸収

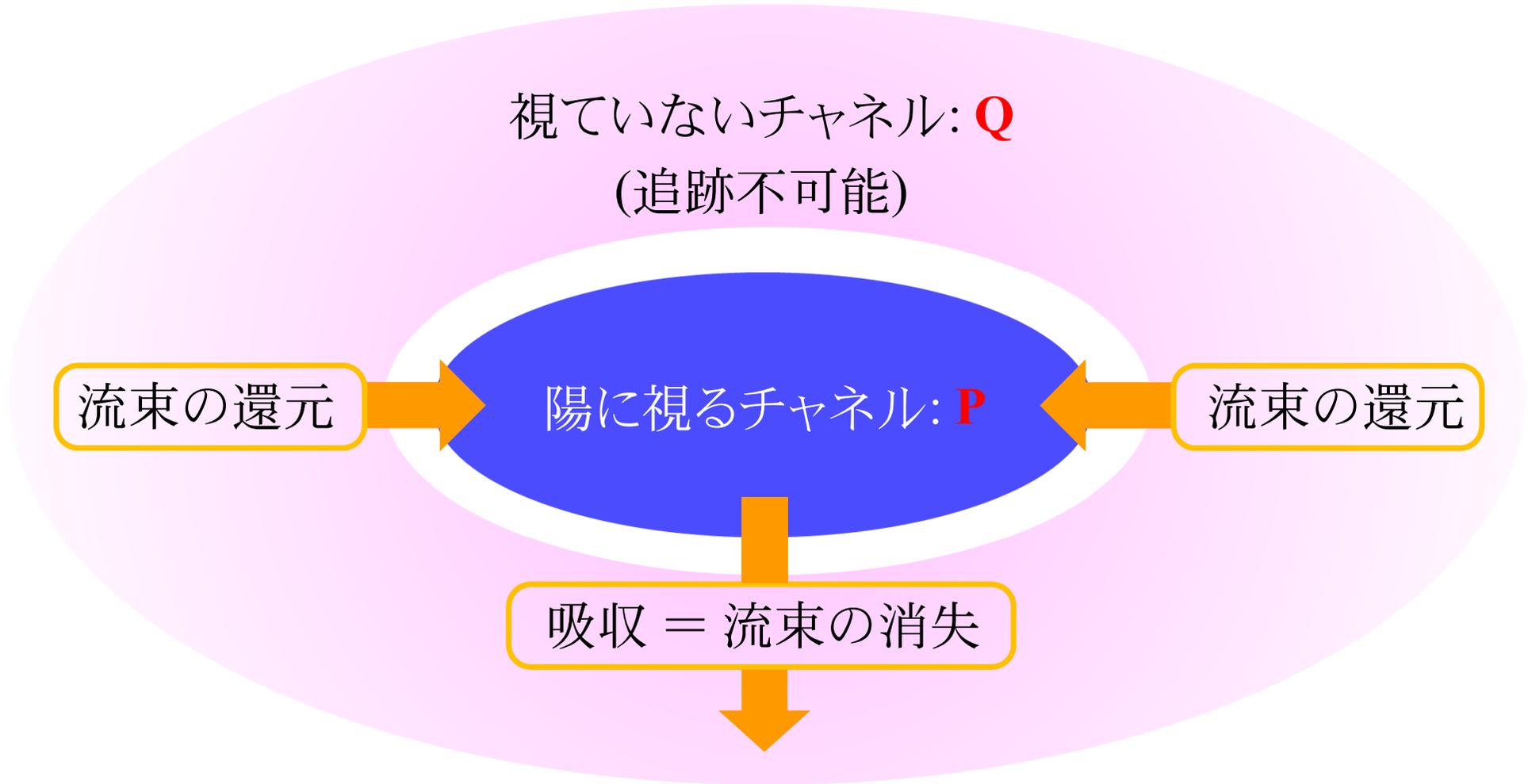
見ていないチャンネル: **Q**  
(追跡不可能)

流束の還元

陽に視るチャンネル: **P**

流束の還元

吸収 = 流束の消失



# 今の場合

陽に視るチャンネル: **P**

全てのチャンネルを視ているので、吸収は存在しない。

# チャンネル結合方程式

$$[T_{\mathbf{R}} + Av(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) + h - E_{\text{tot}}] \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = 0$$

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \equiv \chi_0(\mathbf{R}) \Phi_0(r) + \chi_1(\mathbf{R}) \Phi_1(r)$$

左から  $\Phi_0^*(r)$  を掛ける。

$$\Phi_0^*(r) [T_{\mathbf{R}} + Av(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) + h - E_{\text{tot}}] [\chi_0(\mathbf{R}) \Phi_0(r) + \chi_1(\mathbf{R}) \Phi_1(r)] = 0$$

$h$  を固有値に置き換える。

$$\begin{aligned} & \Phi_0^*(r) [T_{\mathbf{R}} + Av(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) - E_0] \chi_0(\mathbf{R}) \Phi_0(r) \\ & + \Phi_0^*(r) [T_{\mathbf{R}} + Av(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) - E_1] \chi_1(\mathbf{R}) \Phi_1(r) = 0 \end{aligned}$$

ただし

$$E_1 = E_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1$$

## チャンネル結合方程式(つづき)

$$\begin{aligned} \Phi_0^*(r) [T_{\mathbf{R}} + Av(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) - E_0] \chi_0(\mathbf{R}) \Phi_0(r) \\ + \Phi_0^*(r) [T_{\mathbf{R}} + Av(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) - E_1] \chi_1(\mathbf{R}) \Phi_1(r) = 0 \end{aligned}$$

$r$  について積分すると

$$[T_{\mathbf{R}} + v_{00}(R) - E_0] \chi_0(\mathbf{R}) + v_{01}(R) \chi_1(\mathbf{R}) = 0$$

対角ポテンシャル(の弾性チャンネル成分)

$$v_{00}(R) = A \int \Phi_0^*(r) v(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) \Phi_0(r) d\mathbf{r}$$

結合ポテンシャル

$$v_{01}(R) = A \int \Phi_0^*(r) v(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) \Phi_1(r) d\mathbf{r}$$

# チャンネル結合方程式(さらにつづき)

全く同様にして

$$[T_{\mathbf{R}} + v_{11}(R) - E_1] \chi_1(\mathbf{R}) + v_{10}(R) \chi_0(\mathbf{R}) = 0$$

$$v_{11}(R) = A \int \Phi_1^*(r) v(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) \Phi_1(r) dr$$

$$v_{10}(R) = A \int \Phi_1^*(r) v(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) \Phi_0(r) dr$$

チャンネル結合(Coupled-Channel; **CC**)方程式

$$[T_{\mathbf{R}} + v_{00}(R) - E_0] \chi_0(\mathbf{R}) = -v_{01}(R) \chi_1(\mathbf{R})$$

$$[T_{\mathbf{R}} + v_{11}(R) - E_1] \chi_1(\mathbf{R}) = -v_{10}(R) \chi_0(\mathbf{R})$$

※  $\chi_0$  を解くには  $\chi_1$  が必要、 $\chi_1$  を解くには  $\chi_0$  が必要、...

# アイコンナールCC方程式

$$\chi_0(\mathbf{R}) = \psi_0(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}) = \psi_0(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(iK_0 z)$$

$$\chi_1(\mathbf{R}) = \psi_1(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{R}) = \psi_1(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(iK_1 z)$$

$$K_0 = \sqrt{2\mu E_0}/\hbar, \quad K_1 = \sqrt{2\mu E_1}/\hbar$$

$$\nabla_{\mathbf{R}}^2 \psi_0(b, z) \approx 0, \quad \nabla_{\mathbf{R}}^2 \psi_1(b, z) \approx 0$$



$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = v_{00}(b, z) \psi_0(b, z) + v_{01}(b, z) \psi_1(b, z) \exp[i(K_1 - K_0)z]$$

$$i\hbar v_1 \frac{\partial}{\partial z} \psi_1(b, z) = v_{11}(b, z) \psi_1(b, z) + v_{10}(b, z) \psi_0(b, z) \exp[i(K_0 - K_1)z]$$

$$v_0 = \hbar K_0 / \mu, \quad v_1 = \hbar K_1 / \mu$$

# アイコナールCC方程式の解

$$\begin{aligned}i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) &= v_{00}(b, z) \psi_0(b, z) + v_{01}(b, z) \psi_1(b, z) \exp[i(K_1 - K_0)z] \\i\hbar v_1 \frac{\partial}{\partial z} \psi_1(b, z) &= v_{11}(b, z) \psi_1(b, z) + v_{10}(b, z) \psi_0(b, z) \exp[i(K_0 - K_1)z]\end{aligned}$$

非斉次項

反応の初期条件:  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Psi(r, \mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(iK_0 z) \Phi_0(r)$



斉次解 (※ 斉: 整然と並んだ、揃った、<sup>ひと</sup> 斉しい)

$$\psi_0^h(b, z) = \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z v_{00}(b, z') dz' \right],$$

$$\psi_1^h(b, z) = 0.$$

## アイコナールCC方程式の解(つづき)

$$\begin{aligned}\psi_0^{\text{ih}}(b, z) &= \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z v_{00}(b, z') dz' \right] \\ &\times \int_{-\infty}^z \frac{1}{i\hbar v_0} v_{01}(b, z') \psi_1^{\text{ih}}(b, z') e^{i(K_1 - K_0)z'} \exp \left[ \frac{-1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} v_{00}(b, z'') dz'' \right] dz'\end{aligned}$$

$z$  で偏微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \psi_0^{\text{ih}}(b, z) &= \frac{1}{i\hbar v_0} v_{00}(b, z) \psi_0^{\text{ih}}(b, z) + \frac{1}{i\hbar v_0} v_{01}(b, z) \psi_1^{\text{ih}}(b, z) e^{i(K_1 - K_0)z} \\ &\times \exp \left[ \frac{-1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z v_{00}(b, z') dz' \right] \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z v_{00}(b, z'') dz'' \right] \\ &= \frac{1}{i\hbar v_0} v_{00}(b, z) \psi_0^{\text{ih}}(b, z) + \frac{1}{i\hbar v_0} v_{01}(b, z) \psi_1^{\text{ih}}(b, z) e^{i(K_1 - K_0)z} \\ &= \text{CC方程式の右辺} \div i\hbar v_0 \rightarrow \psi_0^{\text{ih}}(b, z) \text{ は非斉次解。}\end{aligned}$$

# アイコナールCC方程式の解(さらにつづき)

一般解 = 斉次方程式の一般解 + 非斉次方程式の特解

非弾性チャネルの波動関数も同様に求めると、初期条件を満たすCC方程式の解は、

$$\psi_0(b, z) = \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z v_{00}(b, z') dz' \right] \\ \times \left( \int_{-\infty}^z \frac{1}{i\hbar v_0} v_{01}(b, z') \psi_1(b, z') e^{i(K_1 - K_0)z'} \exp \left[ \frac{-1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} v_{00}(b, z'') dz'' \right] dz' + 1 \right)$$

$$\psi_1(b, z) = \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z v_{11}(b, z') dz' \right] \\ \times \int_{-\infty}^z \frac{1}{i\hbar v_1} v_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{i(K_0 - K_1)z'} \exp \left[ \frac{-1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} v_{11}(b, z'') dz'' \right] dz'$$

ただし、これらはあくまで形式解。

# 反復法による解法

CC方程式の形式解を、以下のように表記する。

$$\psi_0(b, z) = \hat{\mathcal{F}}_0 \psi_1(b, z), \quad \psi_1(b, z) = \hat{\mathcal{F}}_1 \psi_0(b, z)$$

初期解から始めて、徐々に真の解を得るのが、**反復法**。

$$\psi_0^{(0)}(b, z) = \psi_0^h(b, z), \quad \psi_1^{(0)}(b, z) = \psi_1^h(b, z)$$

$$\psi_0^{(1)}(b, z) = \hat{\mathcal{F}}_0 \psi_1^{(0)}(b, z), \quad \psi_1^{(1)}(b, z) = \hat{\mathcal{F}}_1 \psi_0^{(0)}(b, z)$$

⋮

$$\psi_0^{(i)}(b, z) = \hat{\mathcal{F}}_0 \psi_1^{(i-1)}(b, z), \quad \psi_1^{(i)}(b, z) = \hat{\mathcal{F}}_1 \psi_0^{(i-1)}(b, z)$$

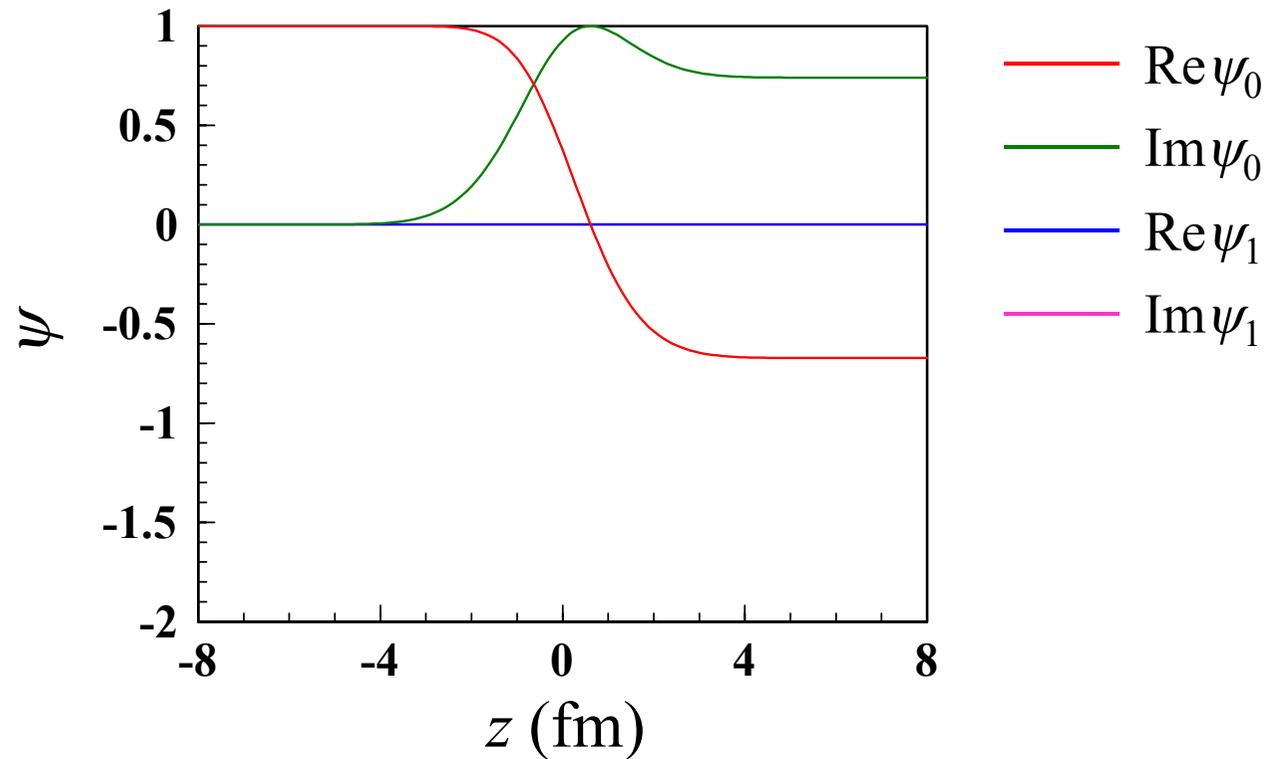
最終的に、以下の条件を満たす、**自己無撞着解**を求める。

$$\psi_0^{(i)}(b, z) \approx \psi_0^{(i-1)}(b, z), \quad \psi_1^{(i)}(b, z) \approx \psi_1^{(i-1)}(b, z)$$

# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A X$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

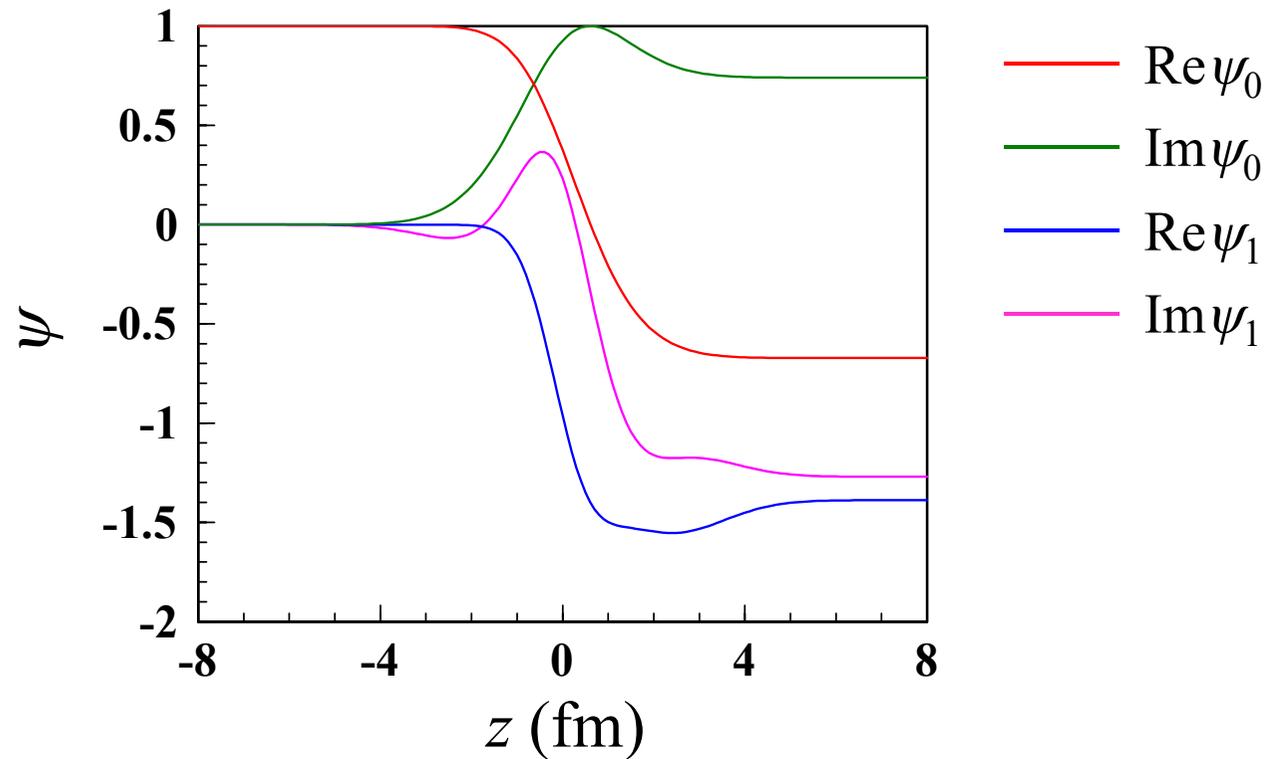
試行回数0 (初期解)



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

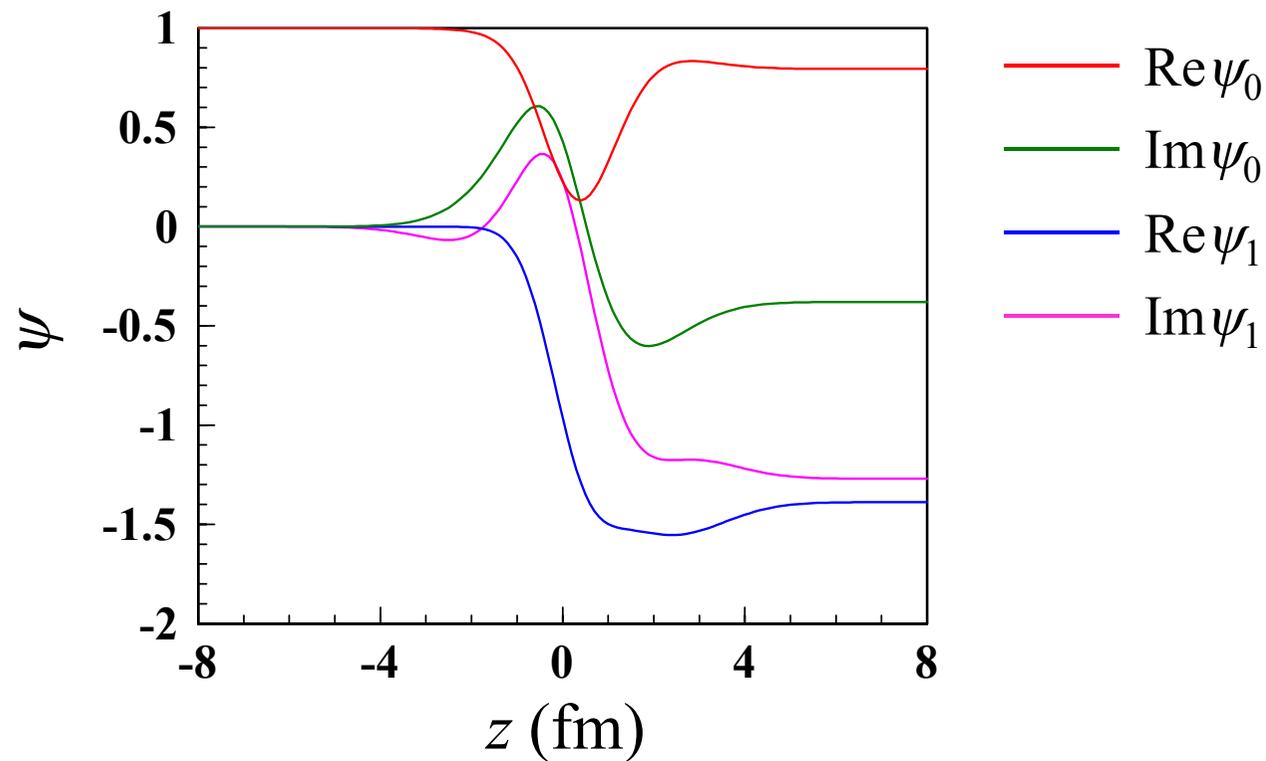
試行回数1



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A X$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

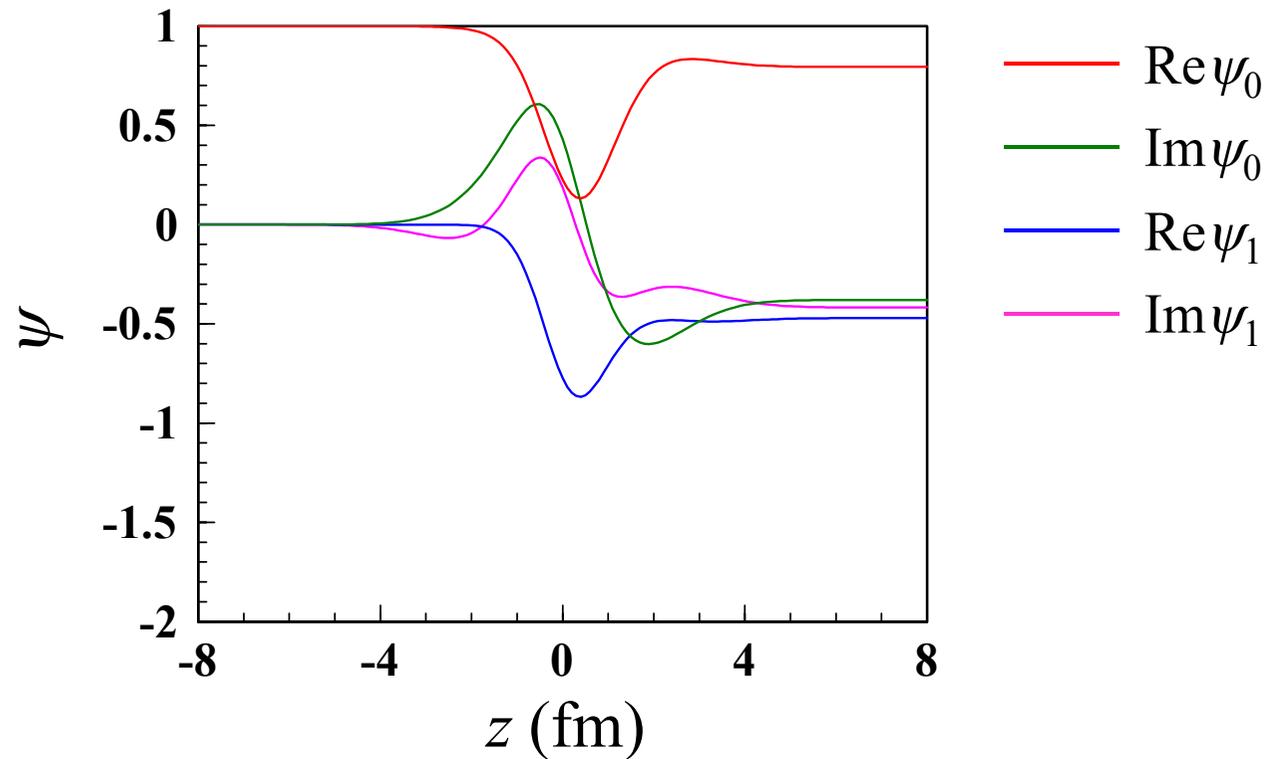
試行回数2



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

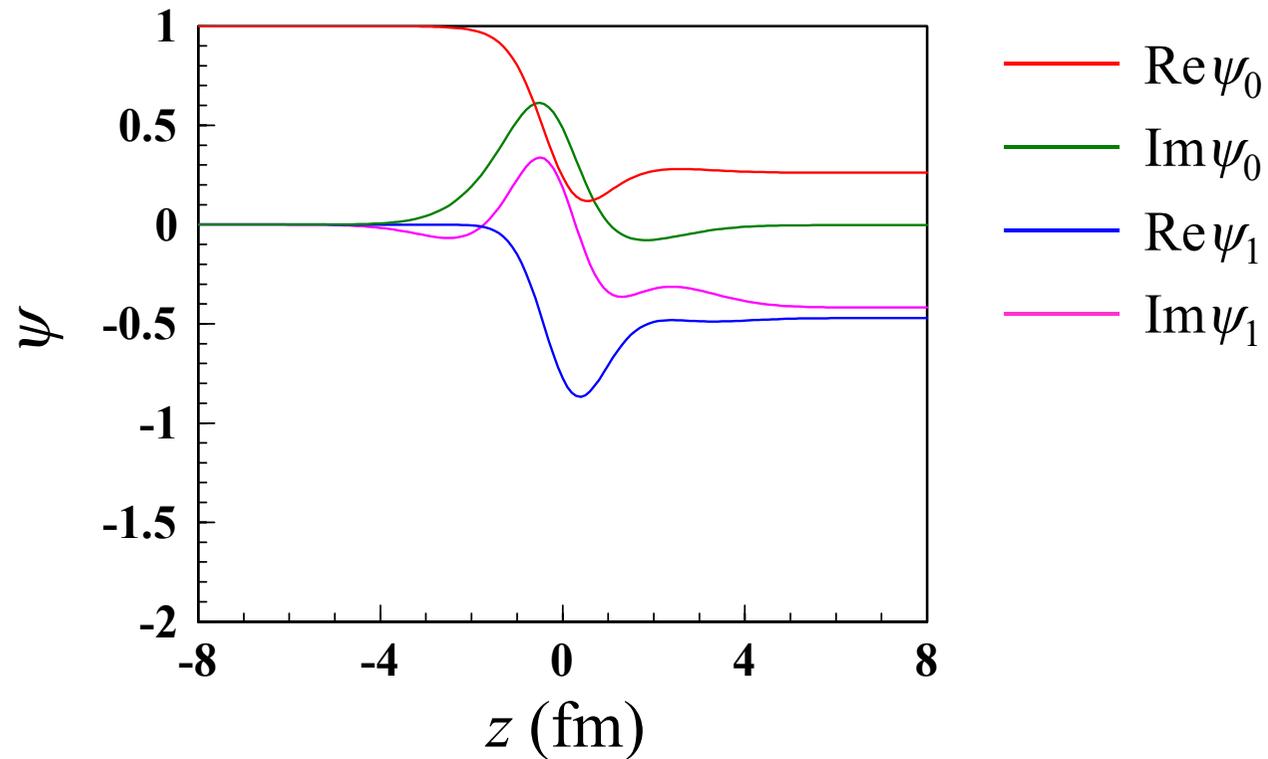
試行回数3



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

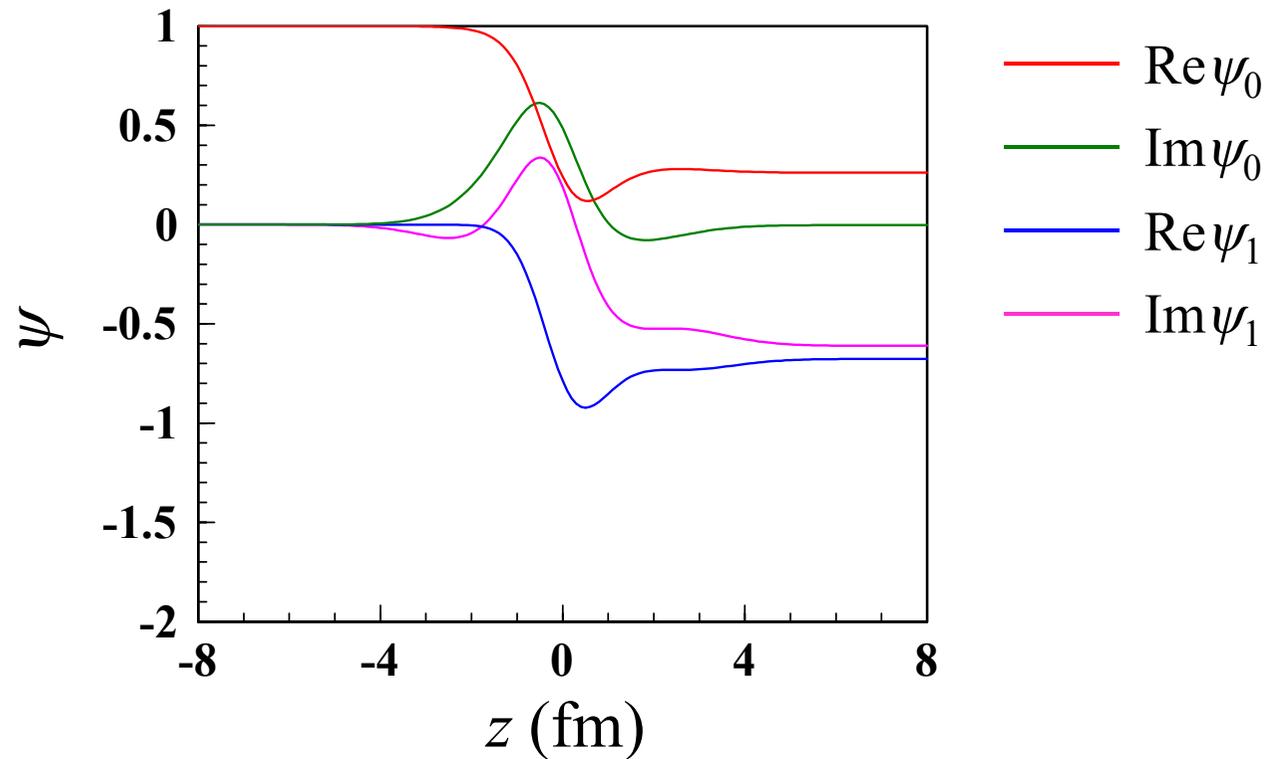
試行回数4



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

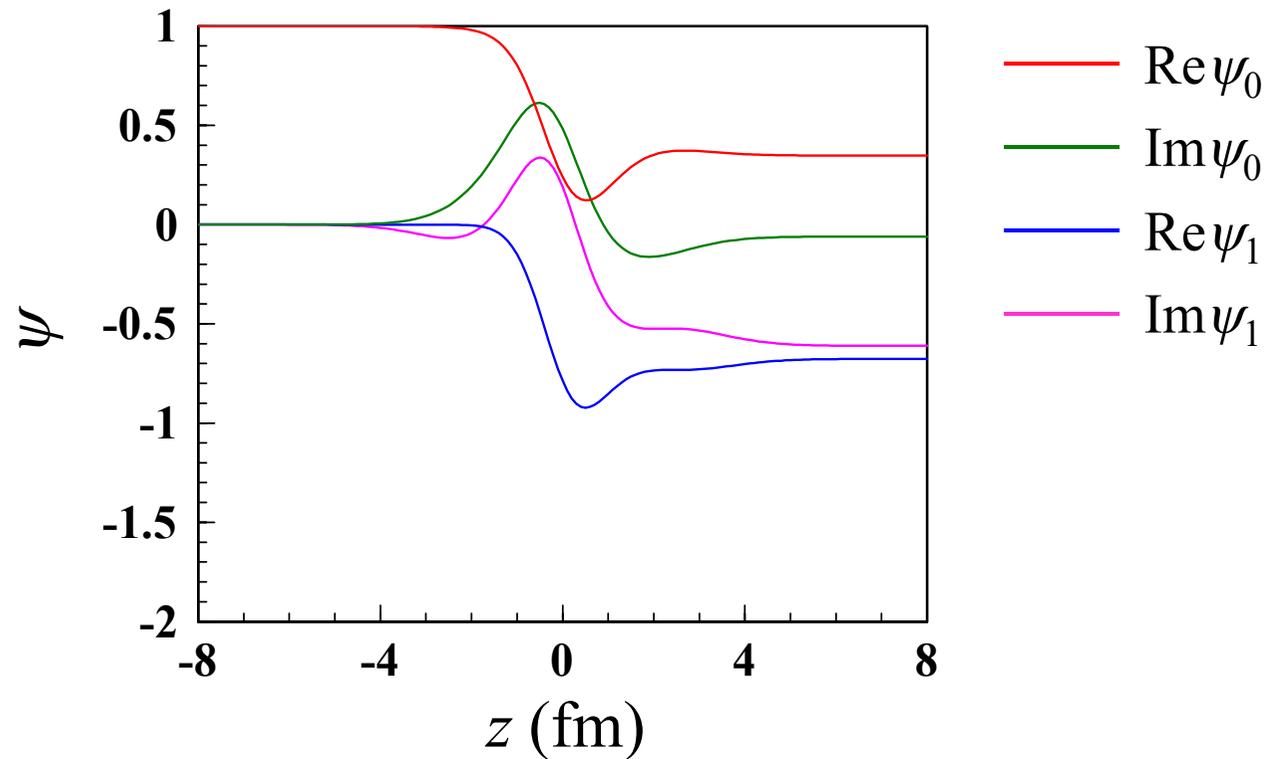
試行回数5



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

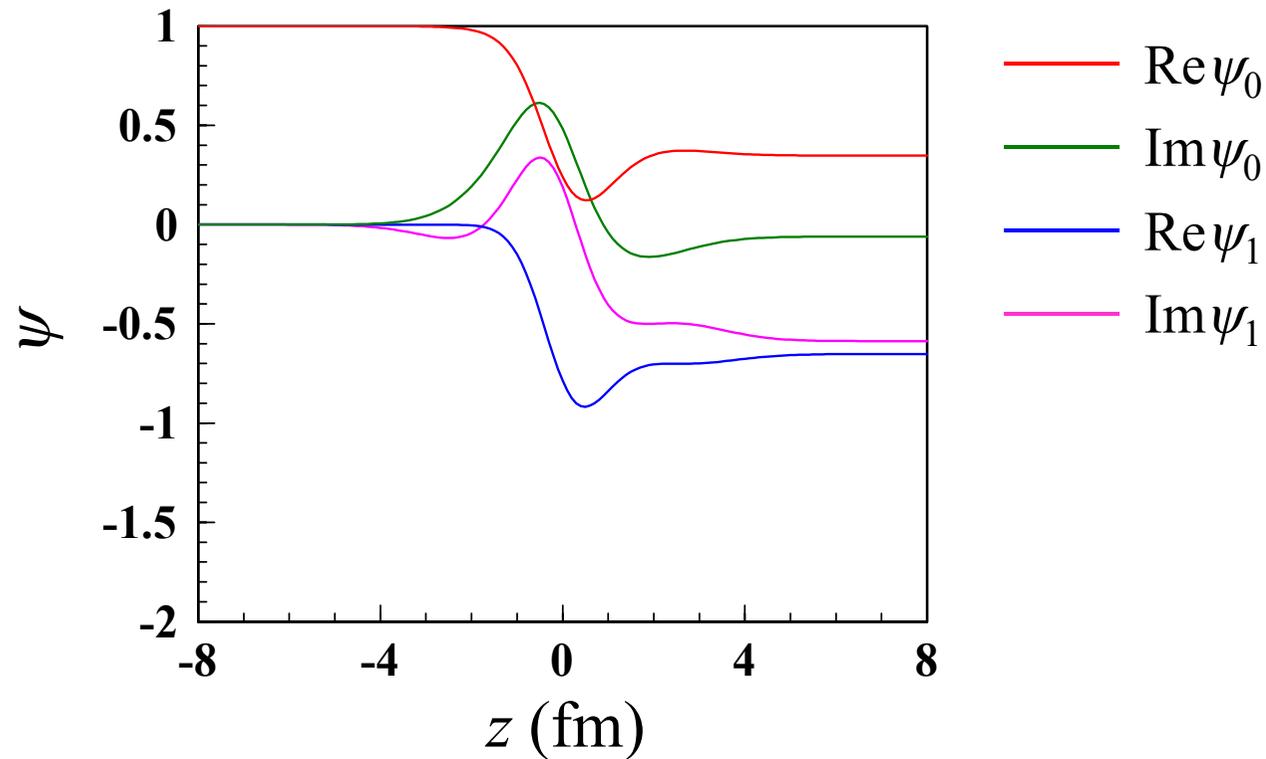
試行回数6



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

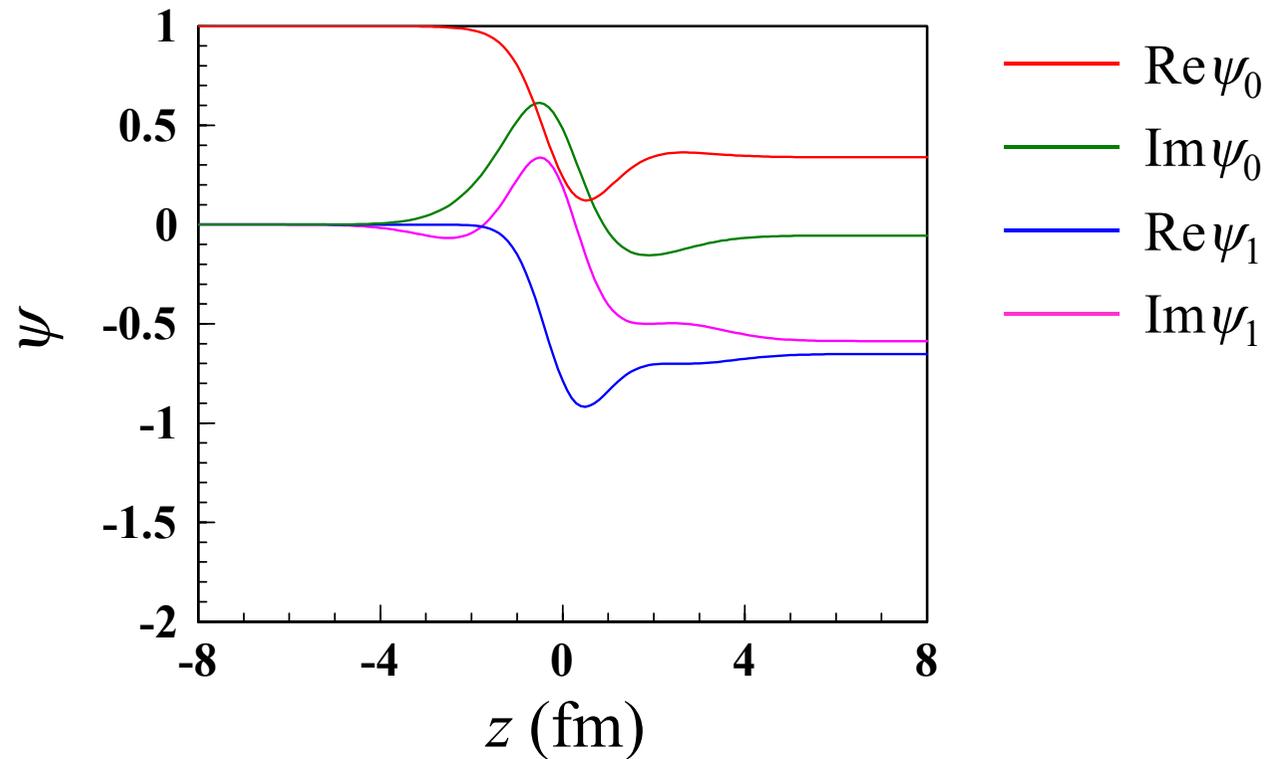
試行回数7



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

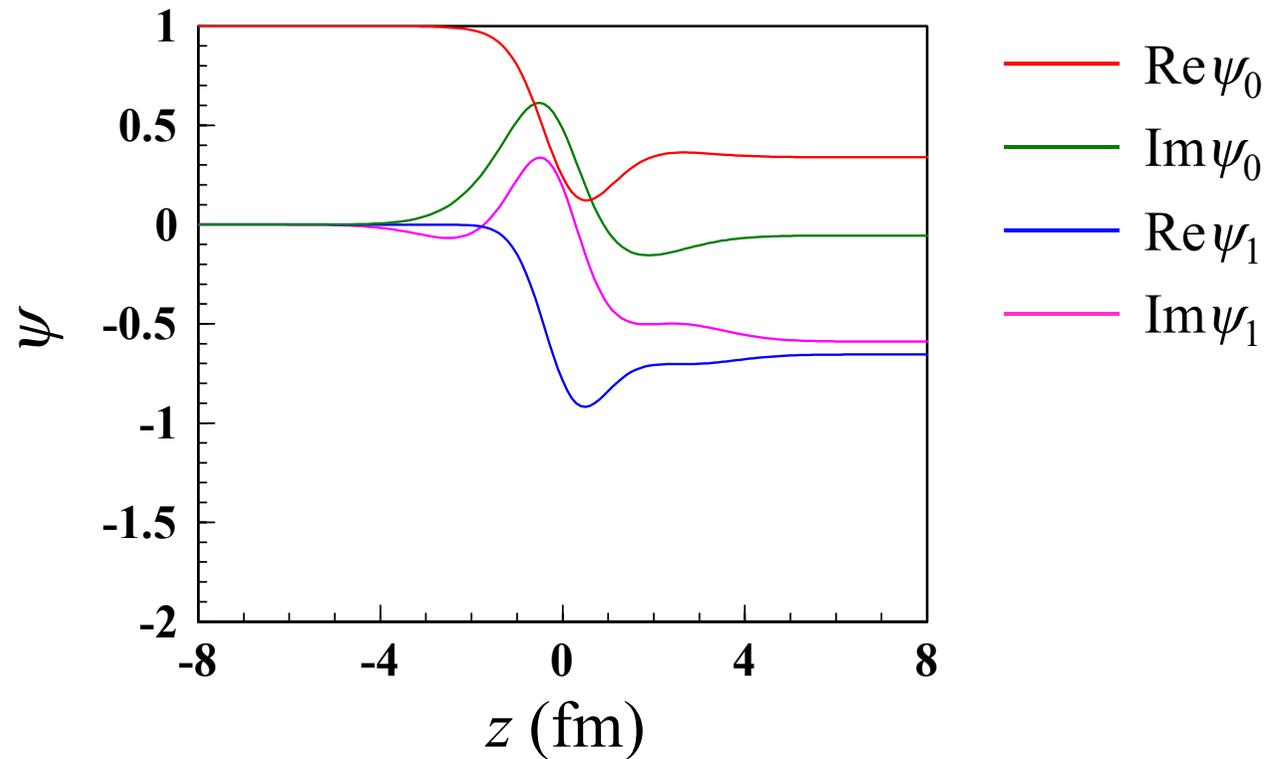
試行回数8



# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

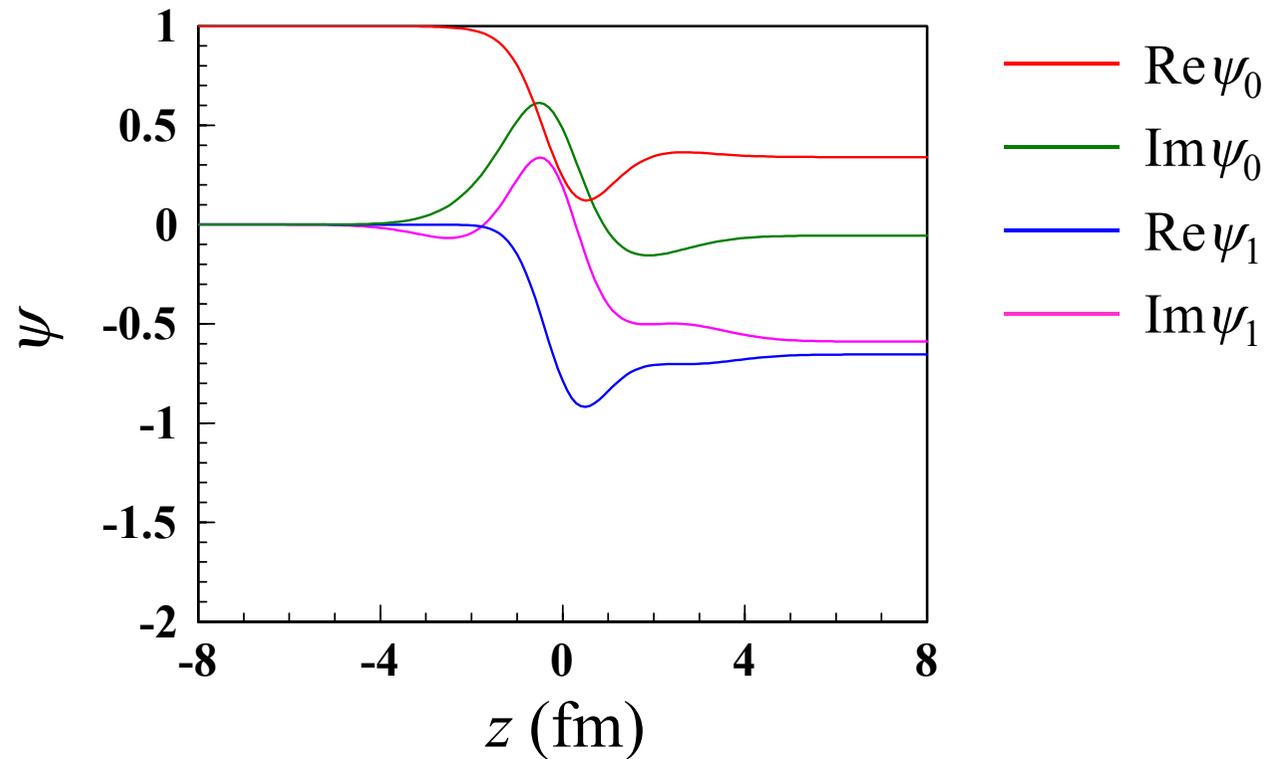
試行回数9



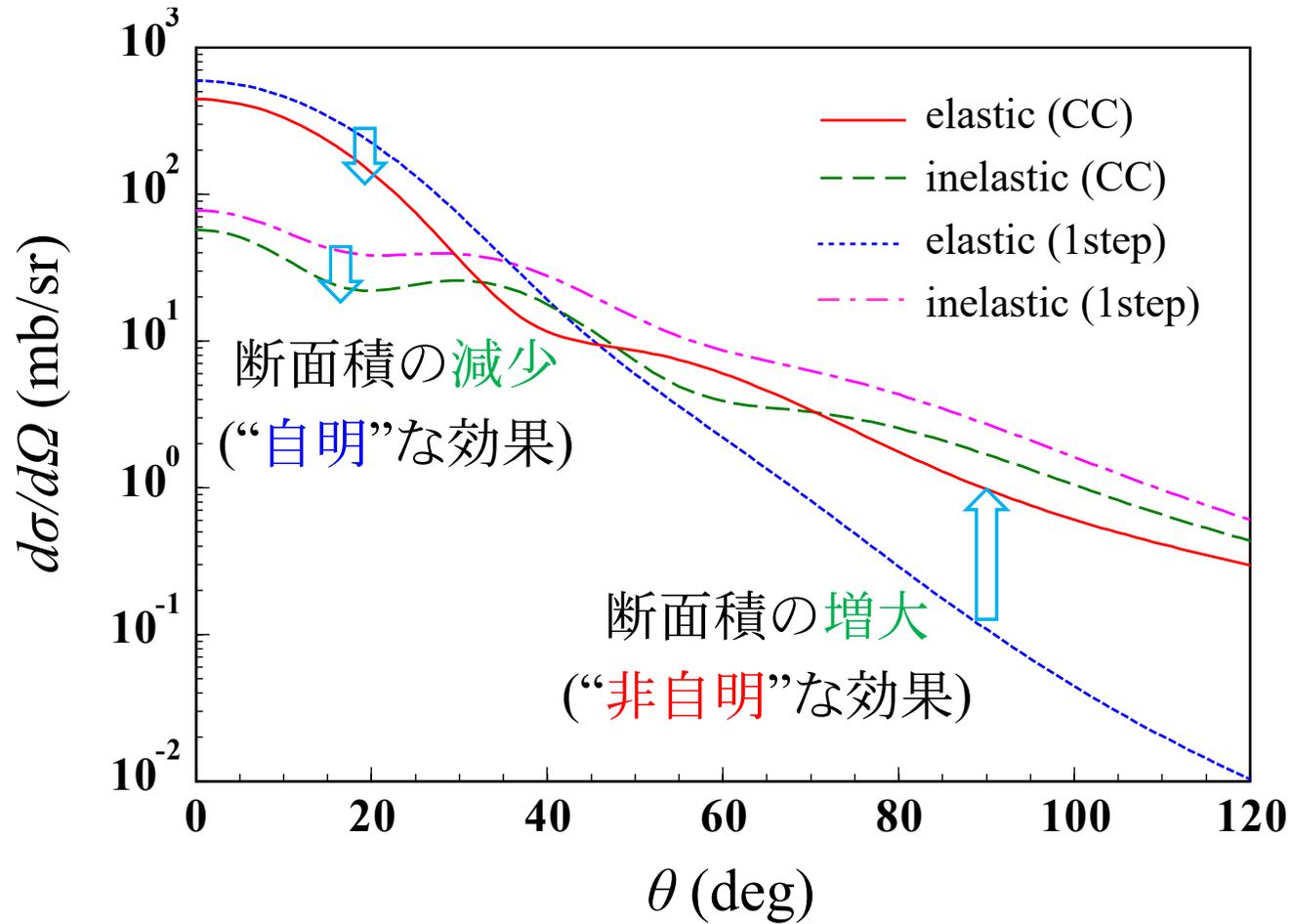
# 解の収束の様子(at $b = 0$ )

$n+^A\text{X}$  at 100 MeV,  $\bar{v} = 250 \text{ MeV fm}^3$ ,  
 $\varepsilon_0 = -7 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_1 = -5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 2 \text{ fm}$

試行回数10 (収束解)

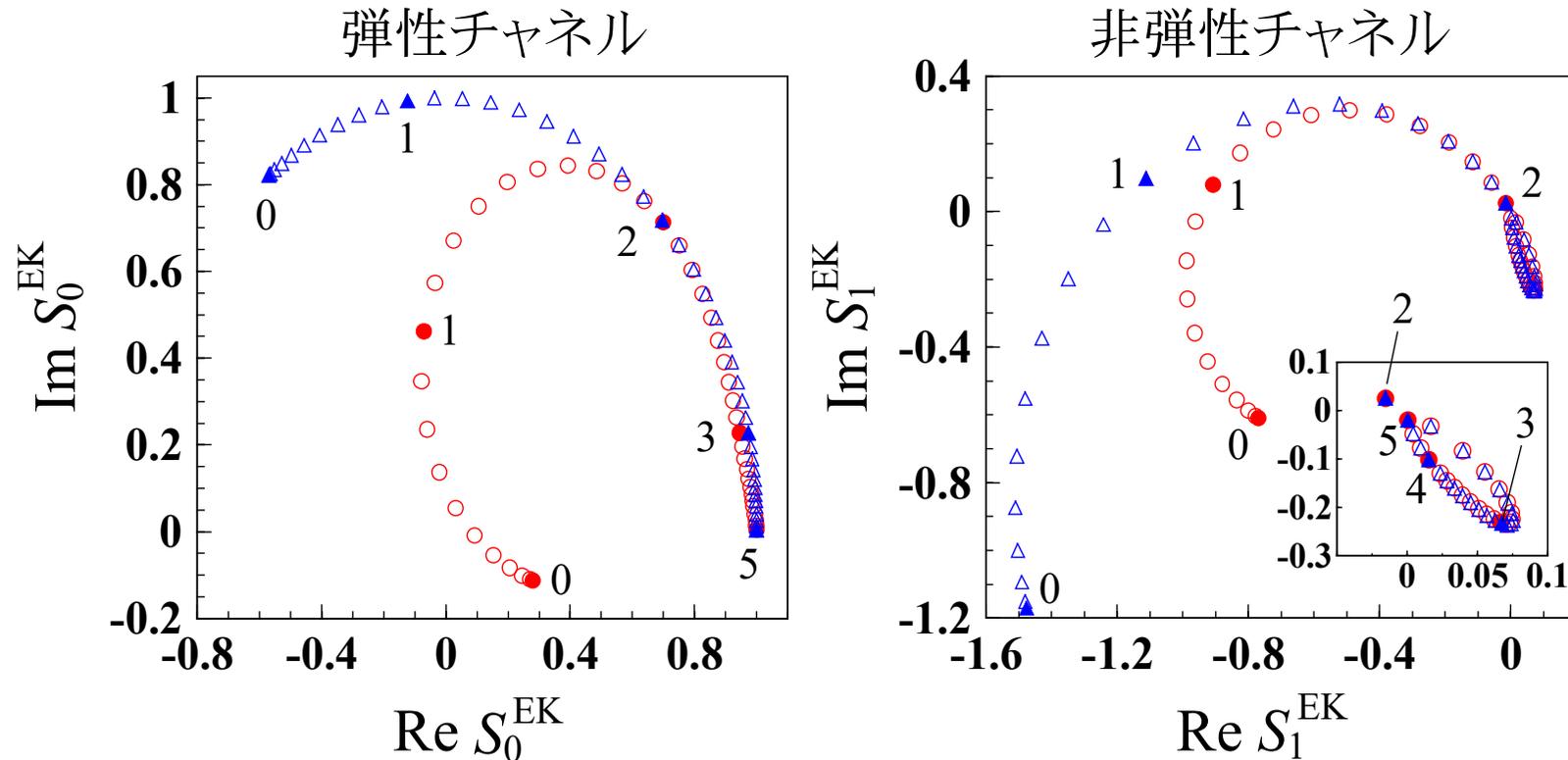


# 角分布の計算結果



非弾性チャンネルの計算方法の詳細は教科書第7章を参照。

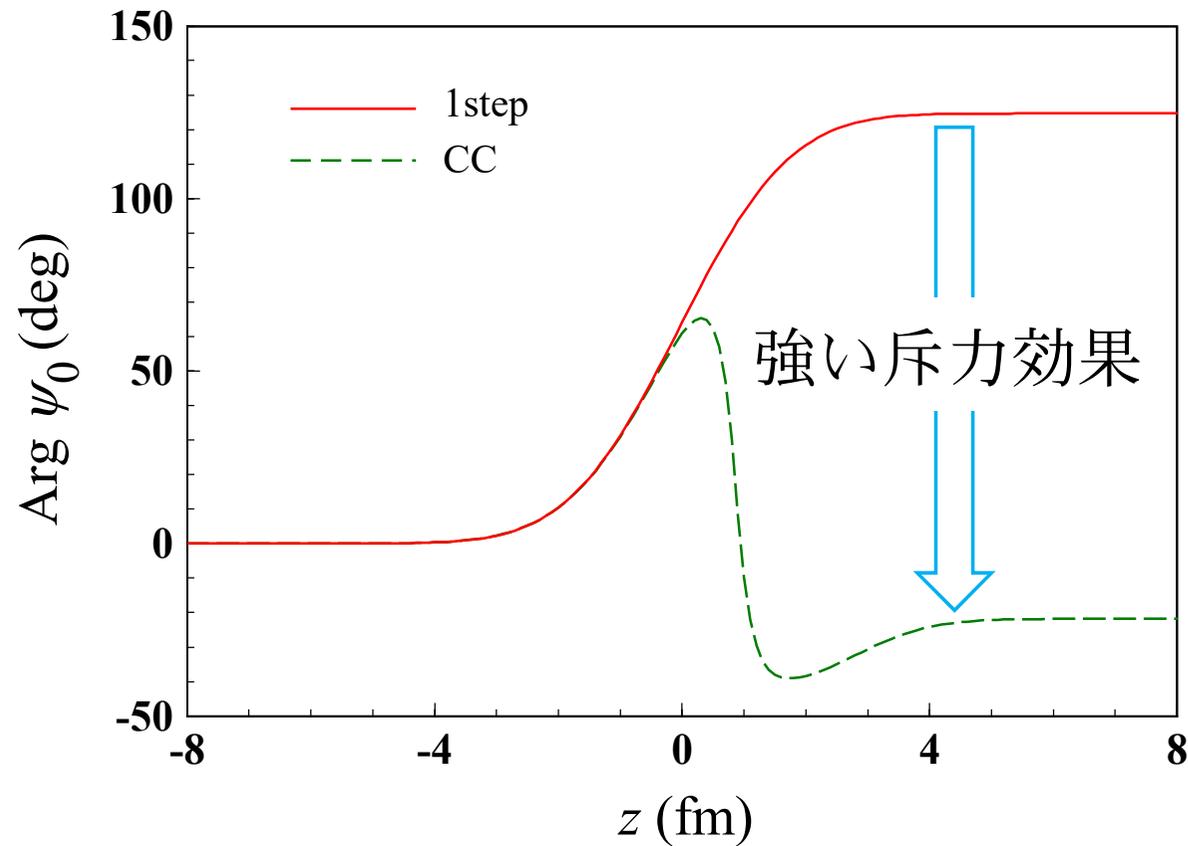
# アイコナルS行列の振る舞い



= 吸収

- いずれのチャンネルも、CCによって絶対値が減少(“**自明**”な効果)。
- 弾性チャンネルについては、位相が大幅に変化(“**非自明**”な効果)。

# 弾性チャンネル波動関数の $z$ 依存性(at $b = 0$ )



- 弾性チャンネルに対するCC効果を式で表現してみよう。

# 複素光学ポテンシャルの“起源”

弾性チャネルの波動関数が満たすシュレディンガー方程式

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = v_{00}(b, z) \psi_0(b, z) + v_{01}(b, z) \psi_1(b, z) \exp[i(K_1 - K_0)z]$$

非斉次項に、 $\psi_1(b, z)$  の形式解を代入。 Folding  
畳み込みポテンシャル

$U_{\text{fold}}(b, z)$

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = v_{00}(b, z) \psi_0(b, z)$$

Dynamical Polarization

動的偏極  
ポテンシャル  
(演算子)

$\hat{U}_{\text{DP}} \psi_0(b, z)$

$$+ v_{01}(b, z) \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z v_{11}(b, z') dz' \right] \\ \times \int_{-\infty}^z \frac{1}{i\hbar v_1} v_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{i(K_0 - K_1)z'} \\ \times \exp \left[ \frac{-1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} v_{11}(b, z'') dz'' \right] dz' e^{i(K_1 - K_0)z}$$

# 複素光学ポテンシャルの“起源”（つづき）

弾性チャネルの波動関数のシュレディンガー方程式

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = [U_{\text{fold}}(b, z) + \hat{U}_{\text{DP}}(b, z)] \psi_0(b, z)$$

一方、光学ポテンシャル  $U(b, z)$  を用いて記述すれば、

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi}_0(b, z) = U(b, z) \bar{\psi}_0(b, z)$$

$$U(b, z) \Leftrightarrow U_{\text{fold}}(b, z) + \hat{U}_{\text{DP}}(b, z)$$

光学ポテンシャルには、非弾性チャネルとの結合が全て取り入れられている。当然、一般に非弾性チャネルにも粒子の放出は起きる。そしてその分、入射流束は減少する。これが光学ポテンシャルの虚数部の起源である。

# 動的偏極ポテンシャルの解釈

階段関数を導入して書き換える:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\text{DP}}\psi_0(b, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(z - z') v_{01}(b, z) \exp\left[\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z v_{11}(b, z'') dz''\right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{-1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} v_{11}(b, z'') dz''\right] \\ &\quad \times \frac{1}{i\hbar v_1} v_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{i(K_0 - K_1)z'} e^{i(K_1 - K_0)z} dz' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(z - z') v_{01}(b, z) \frac{1}{i\hbar v_1} \exp\left[\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{z'}^z v_{11}(b, z'') dz''\right] e^{iK_1(z - z')} \\ &\quad \times v_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{iK_0 z'} dz' e^{-iK_0 z}\end{aligned}$$

# 動的偏極ポテンシャルの解釈(つづき)

整理すると:

$z$  において、ポテンシャル  $v_{01}$  により弾性チャンネルに戻る。

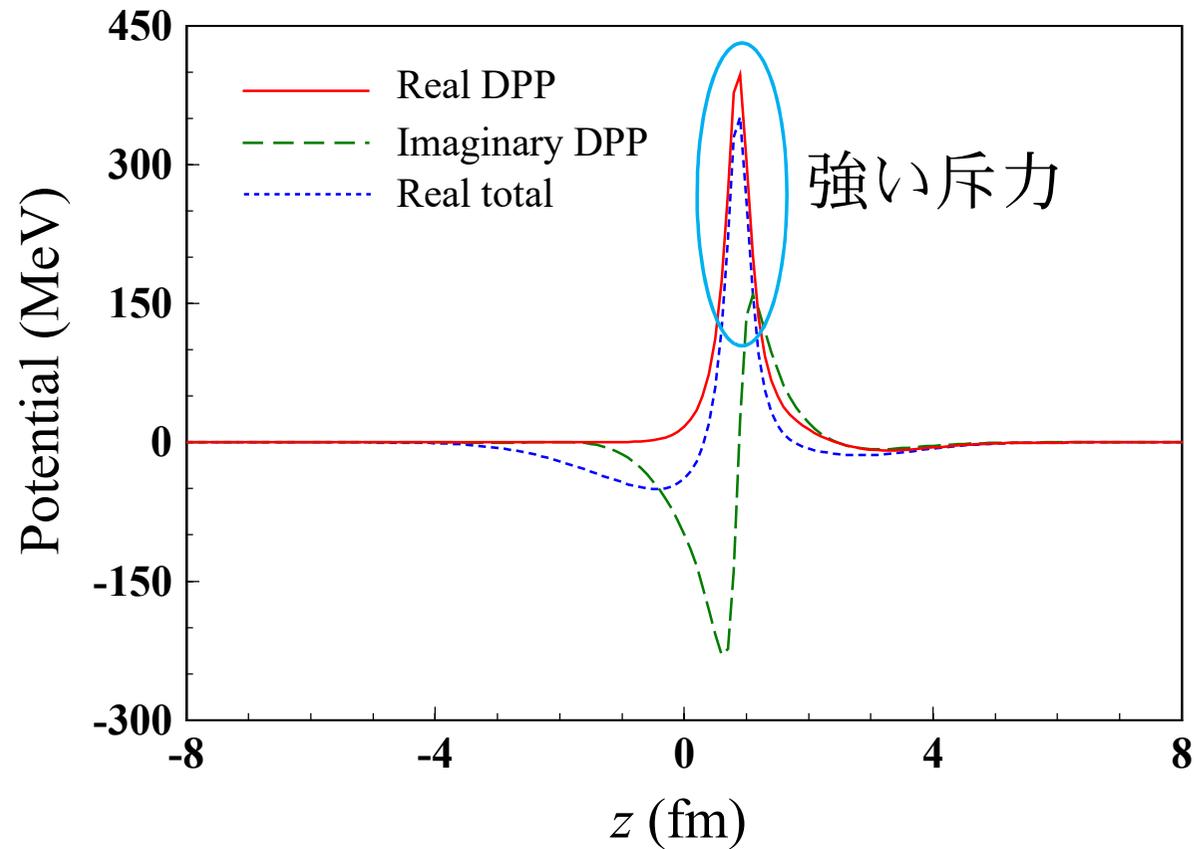
$z'$  から  $z$  まで、ポテンシャル  $v_{11}$  の中を伝播  
(グリーン関数と同等であることが証明可能)

$$\hat{U}_{\text{DP}}\psi_0(b, z) e^{iK_0 z} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(z - z') v_{01}(b, z) \left[ \frac{1}{i\hbar v_1} \exp \left[ \frac{1}{i\hbar v_1} \int_{z'}^z v_{11}(b, z'') dz'' \right] e^{iK_1(z-z')} \right] \times v_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{iK_0 z'} dz'$$

$z = z'$  において、弾性チャンネルの散乱波が  $v_{10}$  によって非弾性チャンネルに遷移

エネルギー依存する、非局所型の複素ポテンシャル

## 動的偏極ポテンシャル(at $b = 0$ )



- 複雑なチャネル結合の結果(ただし逐次的にその発達を追跡することは可能)

# チャンネル結合と光学ポテンシャルのまとめ

- 反応系全体の状態を指定する言葉として、チャンネルを導入した。
- 複数のチャンネルを陽に取り入れる場合、吸収は、視ていないチャンネルへの流束の消失として定義される。従って、陽に取り扱うチャンネルのみが存在する世界では、吸収は存在しない。
- アイコナール近似を用いたチャンネル結合方程式の導出と、その解法(反復法)について学んだ。
- 吸収が存在しない場合でも、非弾性チャンネルとの結合によって、弾性チャンネルを記述する実数ポテンシャルは変化する。その補正項は、複素ポテンシャルとなる。これが、光学ポテンシャルの虚数部の起源である。

## 6. 散乱問題の純量子力学的解法

# 3次元のシュレディンガー方程式

$$\left[ T_{\mathbf{R}} + U(R) - E \right] \chi(\mathbf{R}) = 0$$

軌道角運動量演算子

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{R} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{R}}$$

ラプラシアン of 極座標表示

$$\nabla_{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta_R^2} + \cot \theta_R \frac{\partial}{\partial \theta_R} + \frac{1}{\sin^2 \theta_R} \frac{\partial^2}{\partial \phi_R^2} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hbar^2}$$

変数分離  $\chi(\mathbf{R}) = \psi(R) \Theta(\theta_R, \phi_R)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2\mu R^2}{\psi(R)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} R + U(R) - E \right] \psi(R) = \Xi, \\ \frac{1}{\Theta(\theta_R, \phi_R)} \hat{\mathbf{L}}^2 \Theta(\theta_R, \phi_R) = \Xi \end{array} \right.$$

# 角度方向の方程式と解

$$\hat{L}^2 \Theta(\theta_R, \phi_R) = \Xi \Theta(\theta_R, \phi_R)$$

この解( $\phi_R$  についての周期的境界条件を満たすもの)と固有値は、  
数学的にわかっている(球面調和関数)。

(軌道)角運動量

$$\hat{L}^2 Y_{LM}(\Omega_R) = \hbar^2 L(L+1) Y_{LM}(\Omega_R), \quad L = 0, 1, 2, \dots$$

球面調和関数は、 $\hat{L}_z$  の固有関数でもある。角運動量の $z$ 成分

$$\hat{L}_z Y_{LM}(\Omega_R) = \hbar M Y_{LM}(\Omega_R), \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$$

※球面調和関数は、規格直交完全系をなす。

角度方向の方程式は、既に解けている!  
(ただしその解は量子化された角運動量を持つ特殊関数)

# 動径方向の1次元シュレディンガー方程式

$$\mu \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R + U(R) - E \right] \psi(R) = \hbar^2 L(L+1)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R - \frac{L(L+1)}{R^2} \right) + U(R) - E \right] \psi(R) = 0$$

$$\psi(R) = \frac{u_L(R)}{KR} \longrightarrow \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R \right) \frac{u_L(R)}{KR} = \frac{1}{KR} \frac{\partial^2 u_L(R)}{\partial R^2}$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu R^2} + U(R) - E \right] u_L(R) = 0$$

角運動量バリア

ある特定の  $L$  を持つ波?

# 平面波の部分波分解

平面波  $\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}$  は、ある特定の  $L$  を持つ波ではない。

レイリーの公式

$$\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_L i^L (2L+1) j_L(KR) P_L(\cos\theta_R)$$

平面波は、様々な  $L$  を持つ波(部分波)の重ね合わせ。

• 軌道角運動量  $L$  の部分波:  $u_L(R) \rightarrow u_L^{\text{PW}}(R) = KR j_L(KR)$

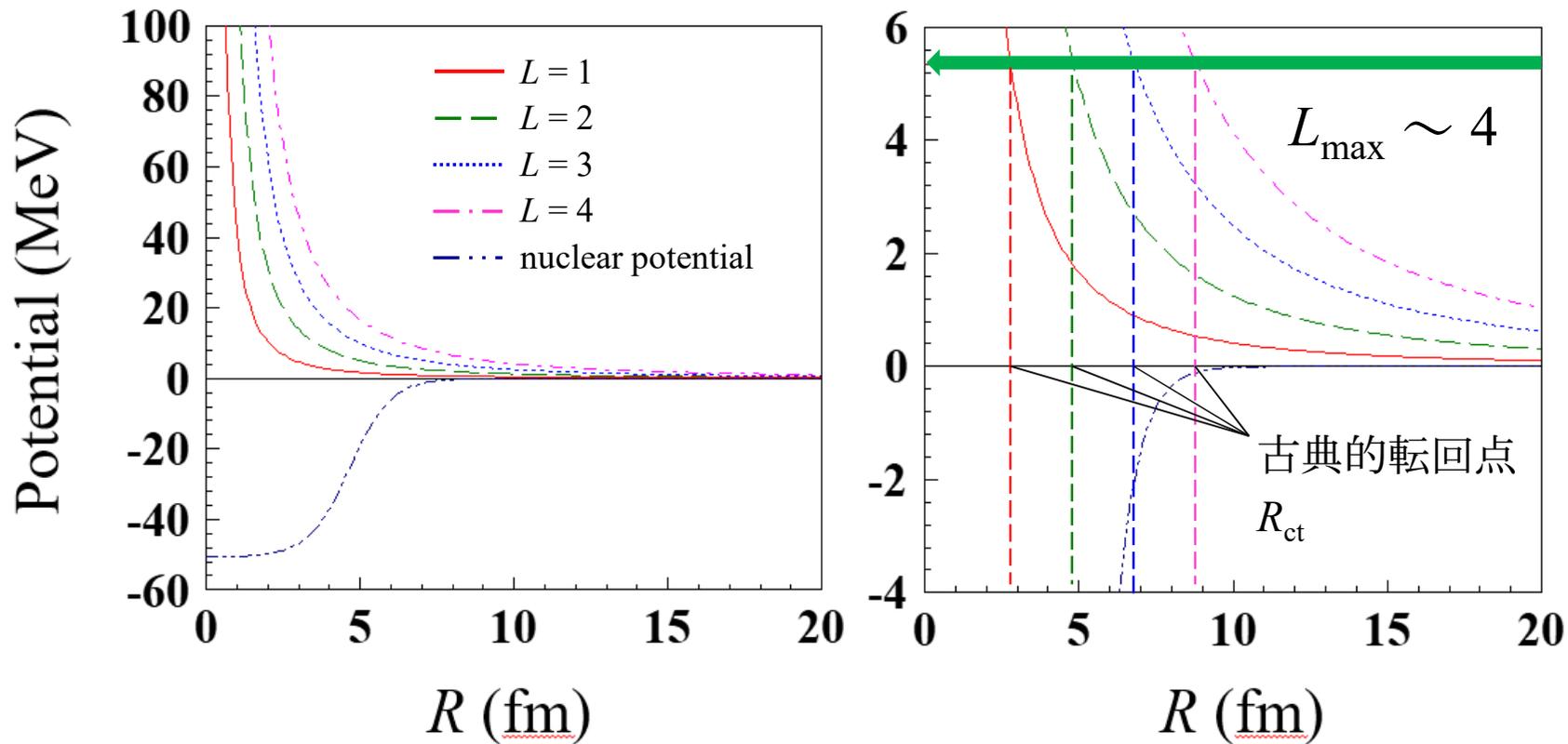
•  $L$  は反応を通じて保存  $\Leftrightarrow$  アイコナール模型の  $b$

•  $L$  ごとに異なるバリア:  $\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{L(L+1)}{R^2} \rightarrow L \leq L_{\text{max}}$  の部分波だけが反応

# 反応に関与する部分波の数(目安)

$n + {}^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV ( $K \sim 0.5 \text{ fm}^{-1}$ )

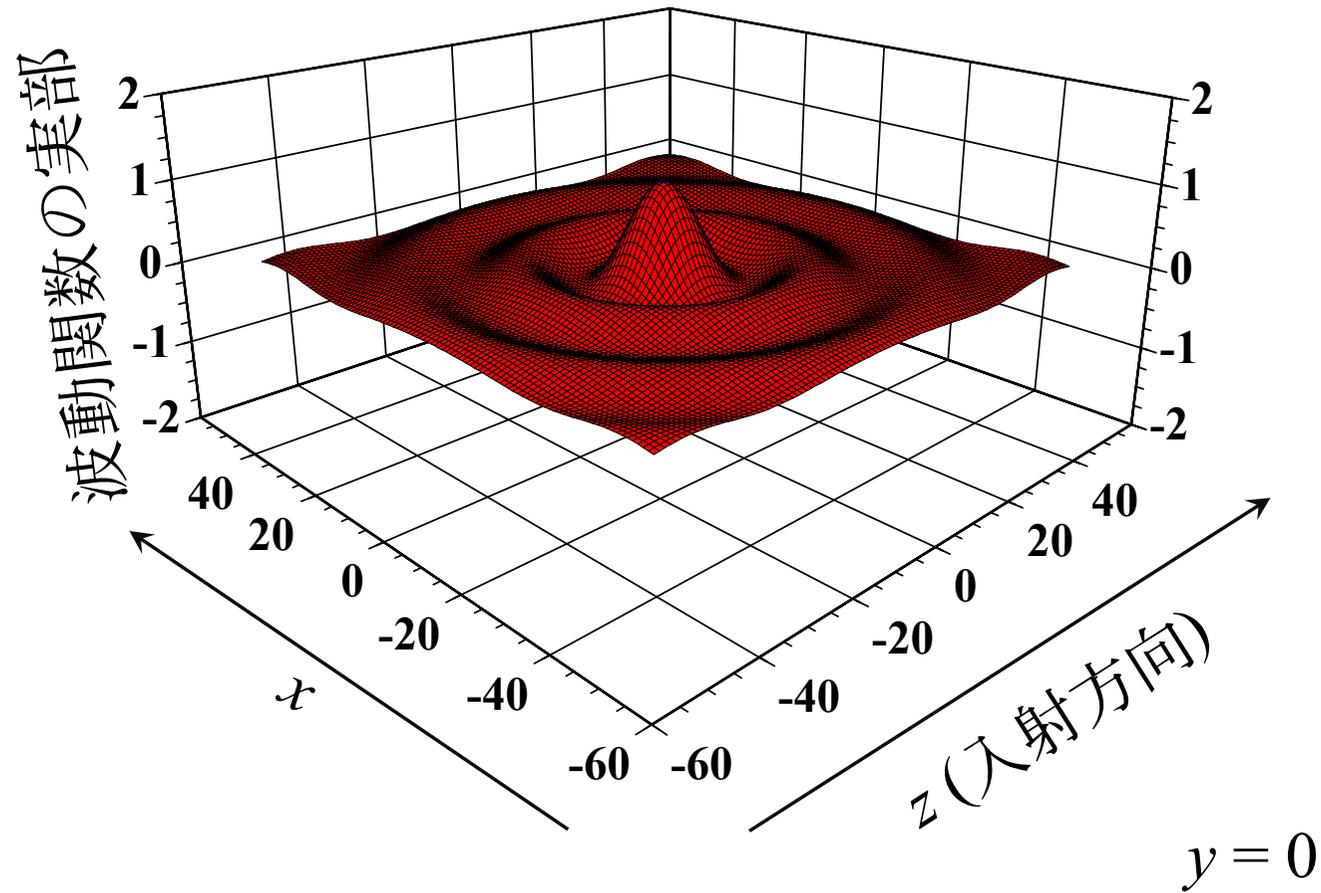
入射エネルギー



$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{L(L+1)}{R_{\text{ct}}^2} = E = \frac{\hbar^2 K^2}{2\mu} \quad \rightarrow \quad \sqrt{L_{\text{max}}(L_{\text{max}}+1)} \sim L_{\text{max}} = KR_N$$

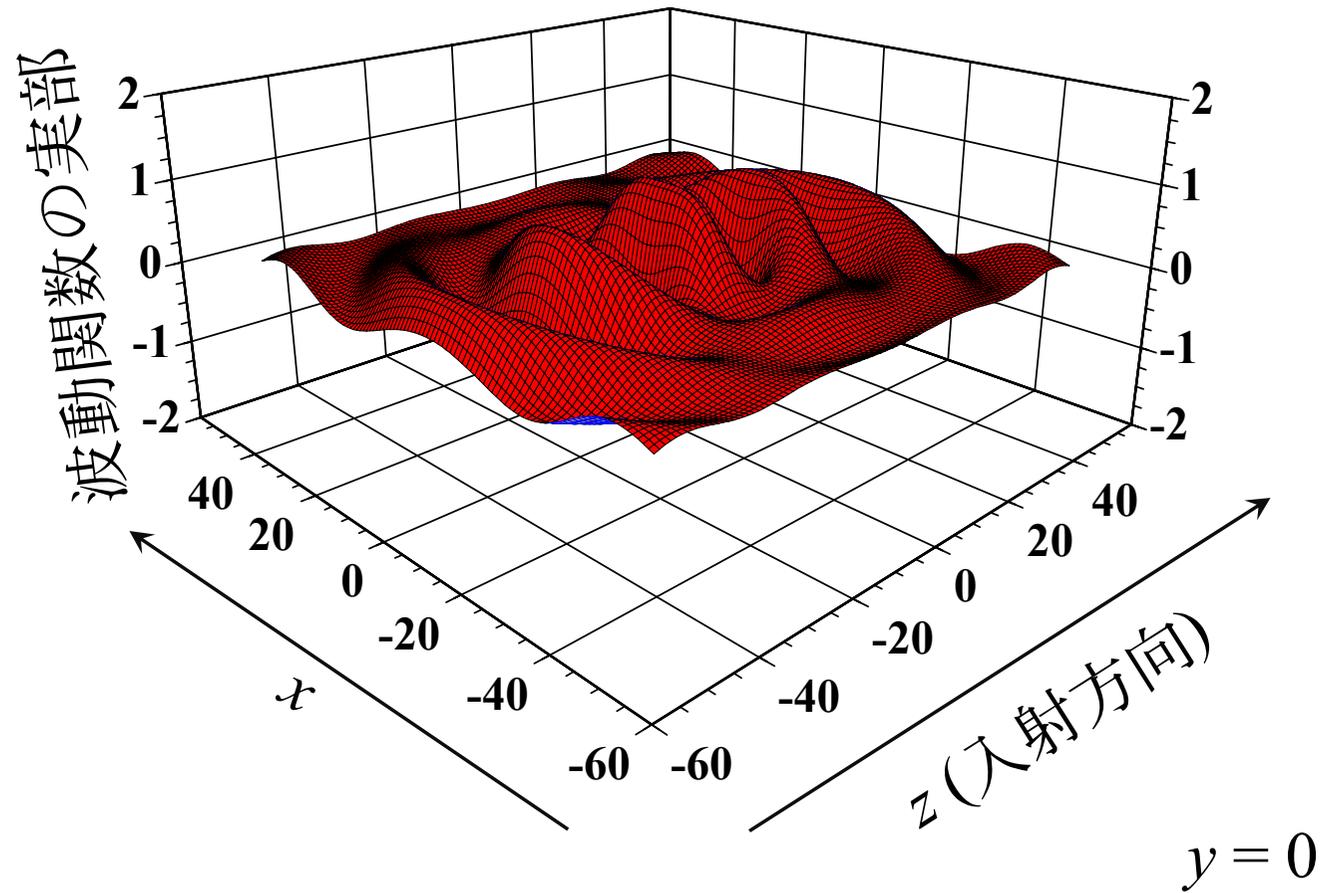
# 平面波(実部)の部分波分解の収束性

$$L_{\max} = 0$$



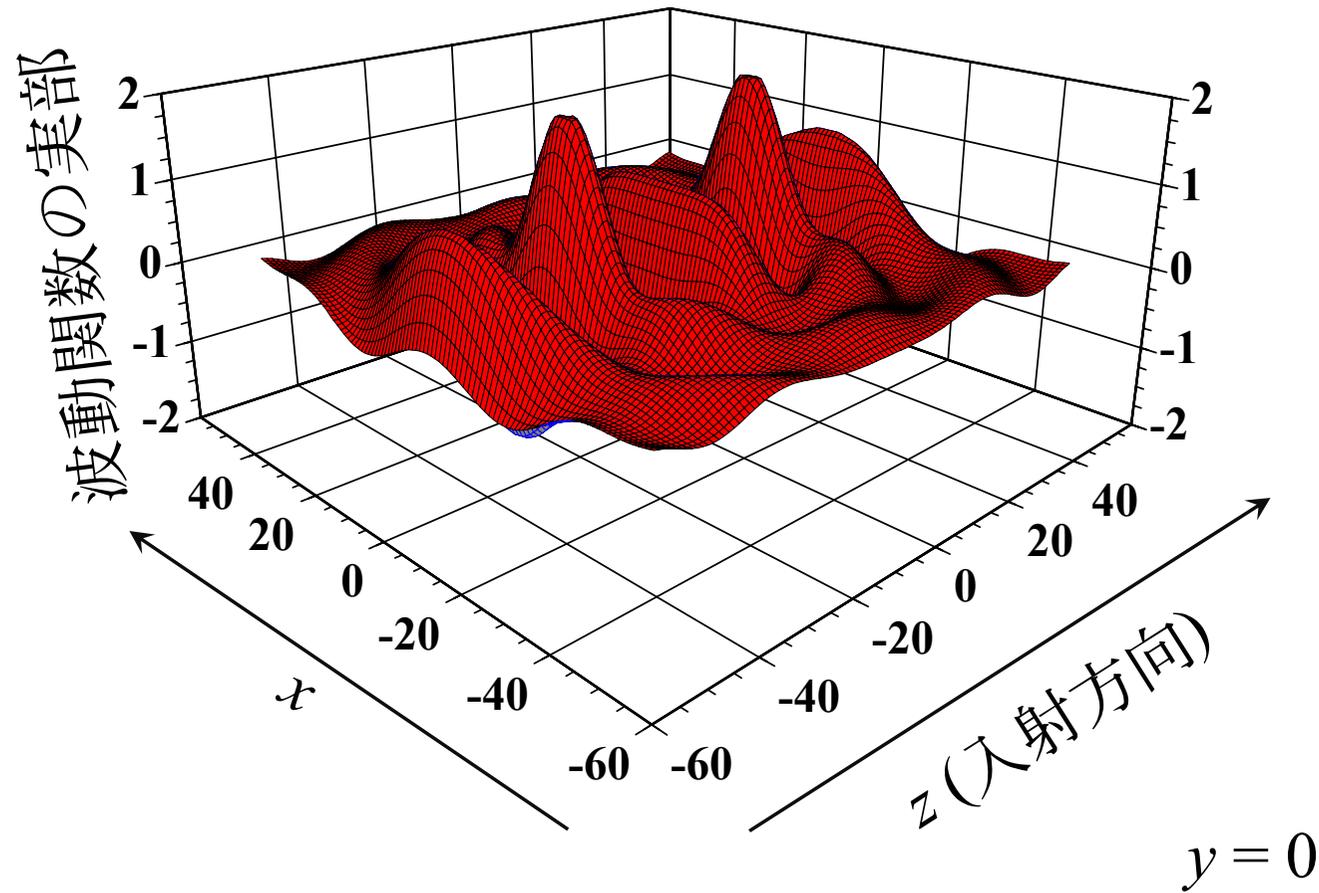
# 平面波(実部)の部分波分解の収束性

$$L_{\max} = 2$$



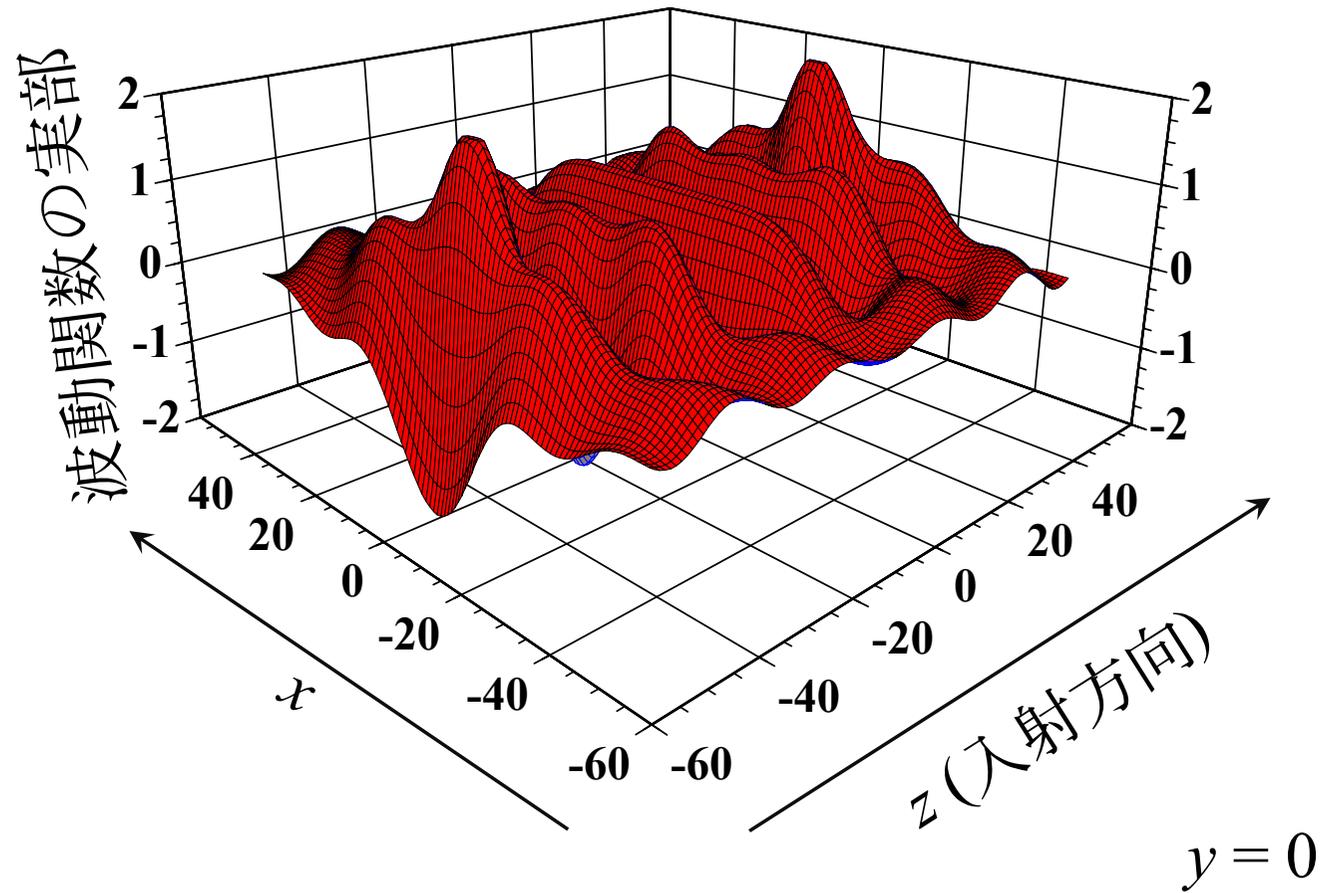
# 平面波(実部)の部分波分解の収束性

$$L_{\max} = 4$$



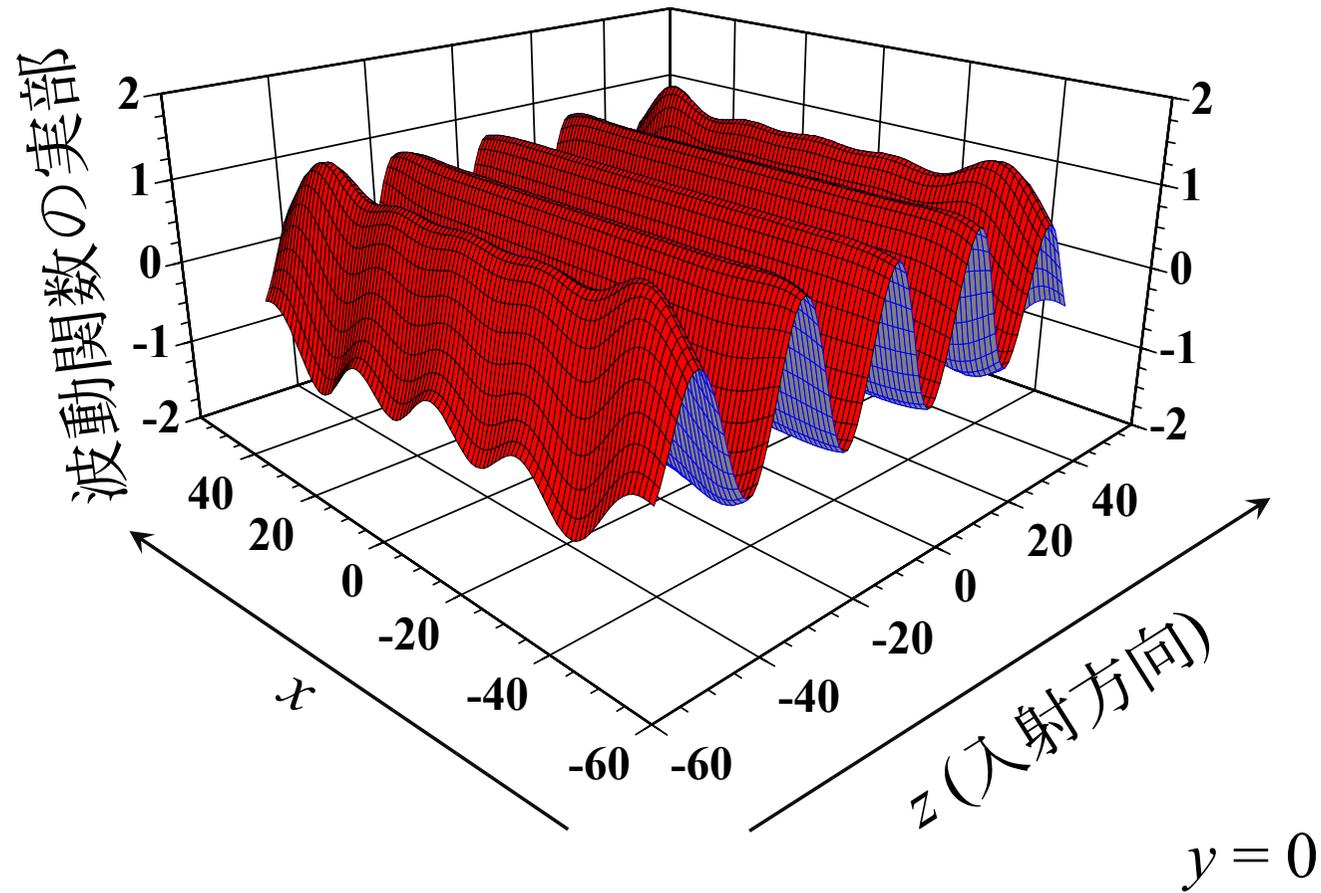
# 平面波(実部)の部分波分解の収束性

$$L_{\max} = 8$$



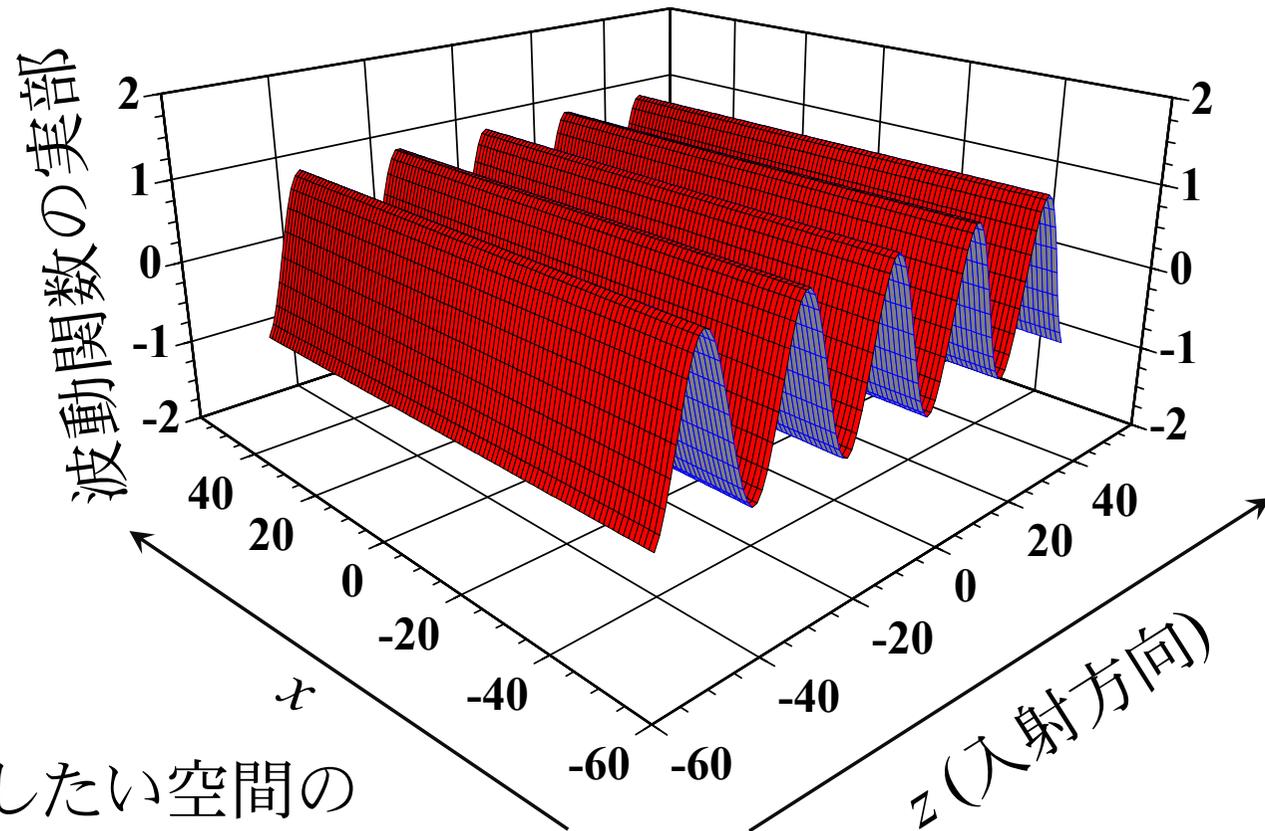
# 平面波(実部)の部分波分解の収束性

$$L_{\max} = 16$$



# 平面波(実部)の部分波分解の収束性

$$L_{\max} = 30$$



平面波を記述したい空間の  
広さに応じた  $L_{\max}$  が必要

$$y = 0$$

# 部分平面波の分析

$$u_L^{\text{PW}}(R) = KRj_L(KR)$$

球ハンケル関数  $h_L^{(\pm)}$  を用いて表現:

$$j_L(KR) = \frac{h_L^{(+)}(KR) - h_L^{(-)}(KR)}{2i} = \frac{i}{2} \left[ h_L^{(-)}(KR) - h_L^{(+)}(KR) \right]$$

$KR$  を掛けて無限遠方  $R \gg R_N$  の漸近形を取る:

$$\sin\left(KR - \frac{L}{2}\pi\right) = \frac{i}{2} \left( \exp\left[-i\left(KR - \frac{L}{2}\pi\right)\right] - \exp\left[i\left(KR - \frac{L}{2}\pi\right)\right] \right)$$

$R$  の遠方から入射してきた進行波が、極座標原点という**固定端**で**反射**して、外向きの進行波が生じる。入射波と反射波が重なって、**定在波**(**流れなし**)が作り出されている。

# 実数核カポテンシャルの影響

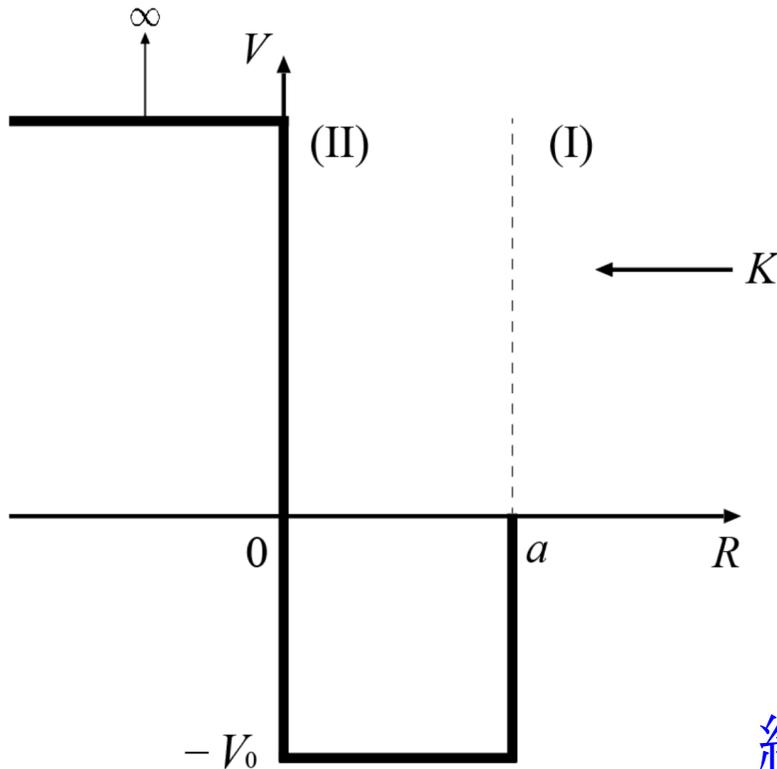
外向きの波だけがポテンシャルの影響を受ける。

$$u_L(R) \rightarrow \frac{i}{2} \left[ K R h_L^{(-)}(K R) - e^{2i\delta_L} K R h_L^{(+)}(K R) \right] \quad (R > R_N)$$

絶対値1の複素数( $\delta_L$ は実数) ← 吸収なし

# 量子力学の演習問題(回想)

$L = 0$  の動径散乱波を求める問題として解釈可能。



$$\psi_{\text{I}} = e^{-iKR} + Be^{iKR}$$

$$\psi_{\text{II}} = C \sin \left( \frac{\sqrt{2\mu(E + V_0)}}{\hbar} R \right)$$

$$\equiv C \sin(\kappa R)$$



$R = a$  の境界条件

$$B = -\frac{\kappa + iK \tan(\kappa a)}{\kappa - iK \tan(\kappa a)} e^{-2iKa}$$

絶対値1の複素数

$$\psi_{\text{I}} = e^{-iKR} - \frac{\kappa + iK \tan(\kappa a)}{\kappa - iK \tan(\kappa a)} e^{-2iKa} e^{iKR}$$

# 実数核力ポテンシャルの影響

外向きの波だけがポテンシャルの影響を受ける。

$$u_L(R) \rightarrow \frac{i}{2} \left[ K R h_L^{(-)}(K R) - e^{2i\delta_L} K R h_L^{(+)}(K R) \right] \quad (R > R_N)$$

絶対値1の複素数( $\delta_L$ は実数) ← 吸収なし

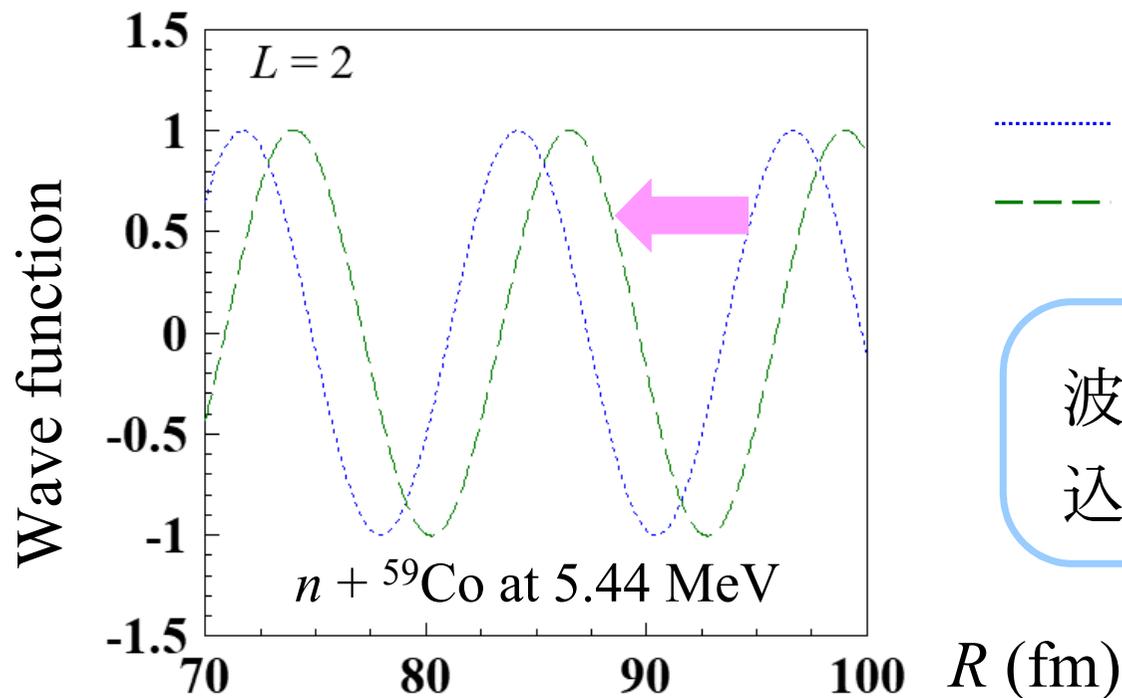
無限遠( $R \gg R_N$ )での形

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{i}{2} \left( \exp \left[ -i \left( K R - \frac{L}{2} \pi \right) \right] - e^{2i\delta_L} \exp \left[ i \left( K R - \frac{L}{2} \pi \right) \right] \right) \\ &= \frac{i}{2} e^{i\delta_L} \left( e^{-i\delta_L} \exp \left[ -i \left( K R - \frac{L}{2} \pi \right) \right] - e^{i\delta_L} \exp \left[ i \left( K R - \frac{L}{2} \pi \right) \right] \right) \\ &= \frac{i}{2} e^{i\delta_L} \left( \exp \left[ -i \left( K R - \frac{L}{2} \pi + \delta_L \right) \right] - \exp \left[ i \left( K R - \frac{L}{2} \pi + \delta_L \right) \right] \right) \end{aligned}$$

# 部分散乱波の正しい漸近形

$$u_L(R) \rightarrow -\frac{i}{2} e^{i\delta_L} 2i \sin\left(KR - \frac{L}{2}\pi + \delta_L\right) = e^{i\delta_L} \sin\left(KR - \frac{L}{2}\pi + \delta_L\right)$$

$$u_L^{\text{PW}}(R) = KR j_L(KR) \rightarrow \sin\left(KR - \frac{L}{2}\pi\right)$$

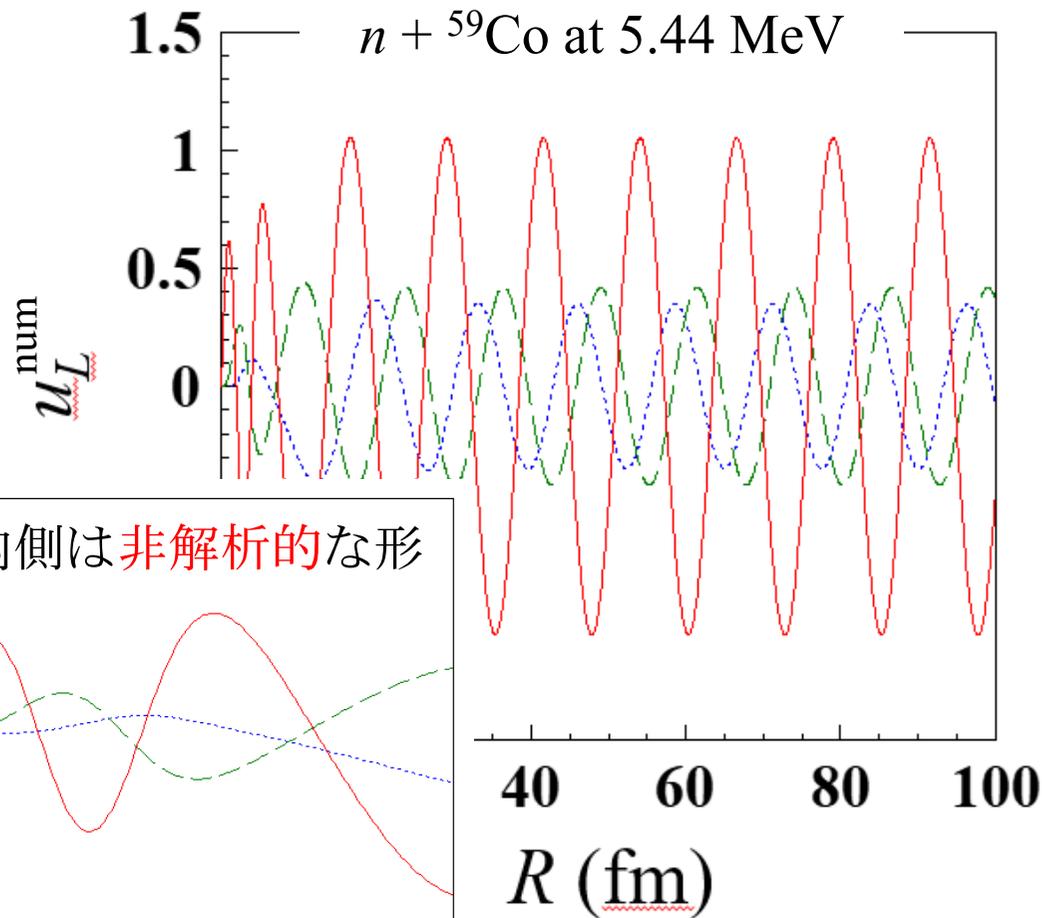


⋯  $\sin(KR - L/\pi)$   
- - -  $\sin(KR - L/\pi + \delta)$

位相差  $\delta_L$

波動関数の内側への引き込まれ具合を表す量。

# 部分散乱波の数値解( numerical solution)



$$u_L^{\text{num}}(\Delta R) = (\Delta R)^{L+1}/(2L+1)!!$$

—  $L = 0$

- - -  $L = 2$

⋯⋯  $L = 4$

不定!

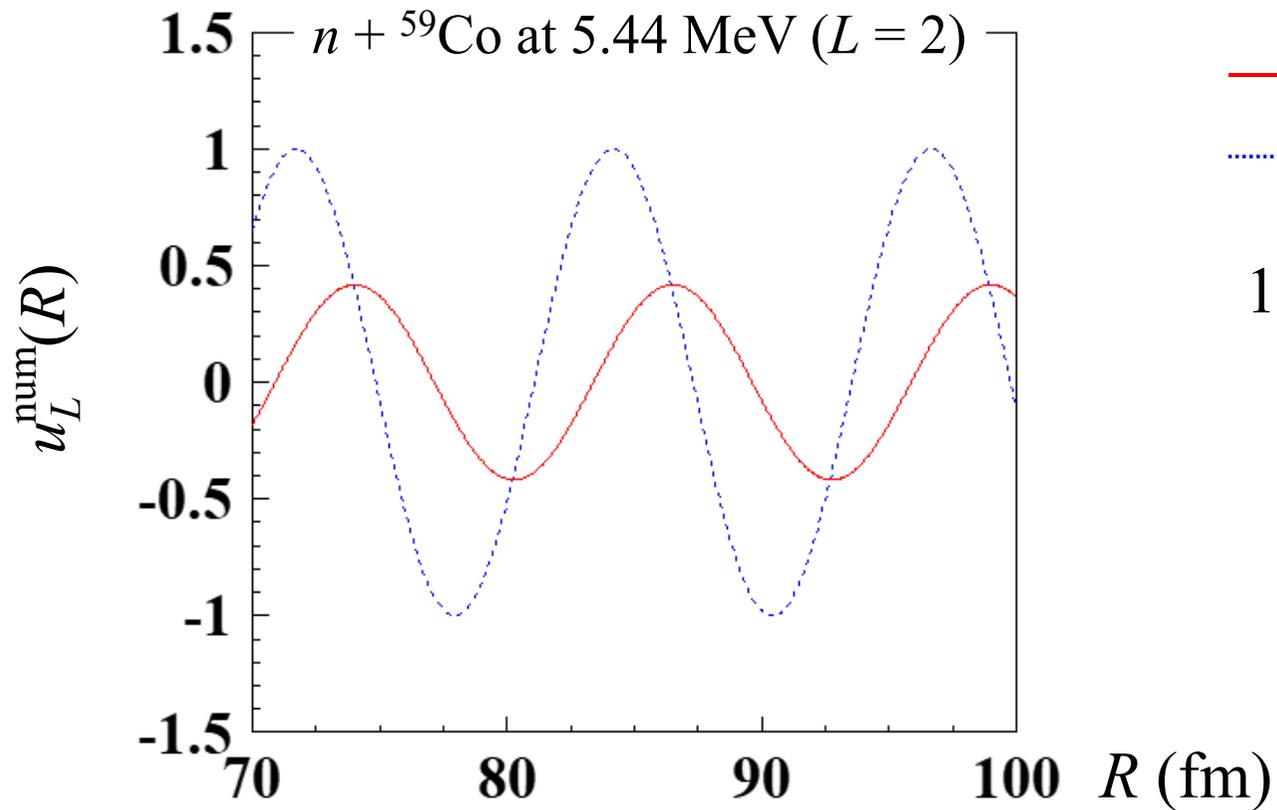
$$u_L(R) = c_L u_L^{\text{num}}(R)$$



$c_L$  を決めるには  $u_L$  の漸近形が必要。

cf. アイコナル波動関数の積分定数  $C$

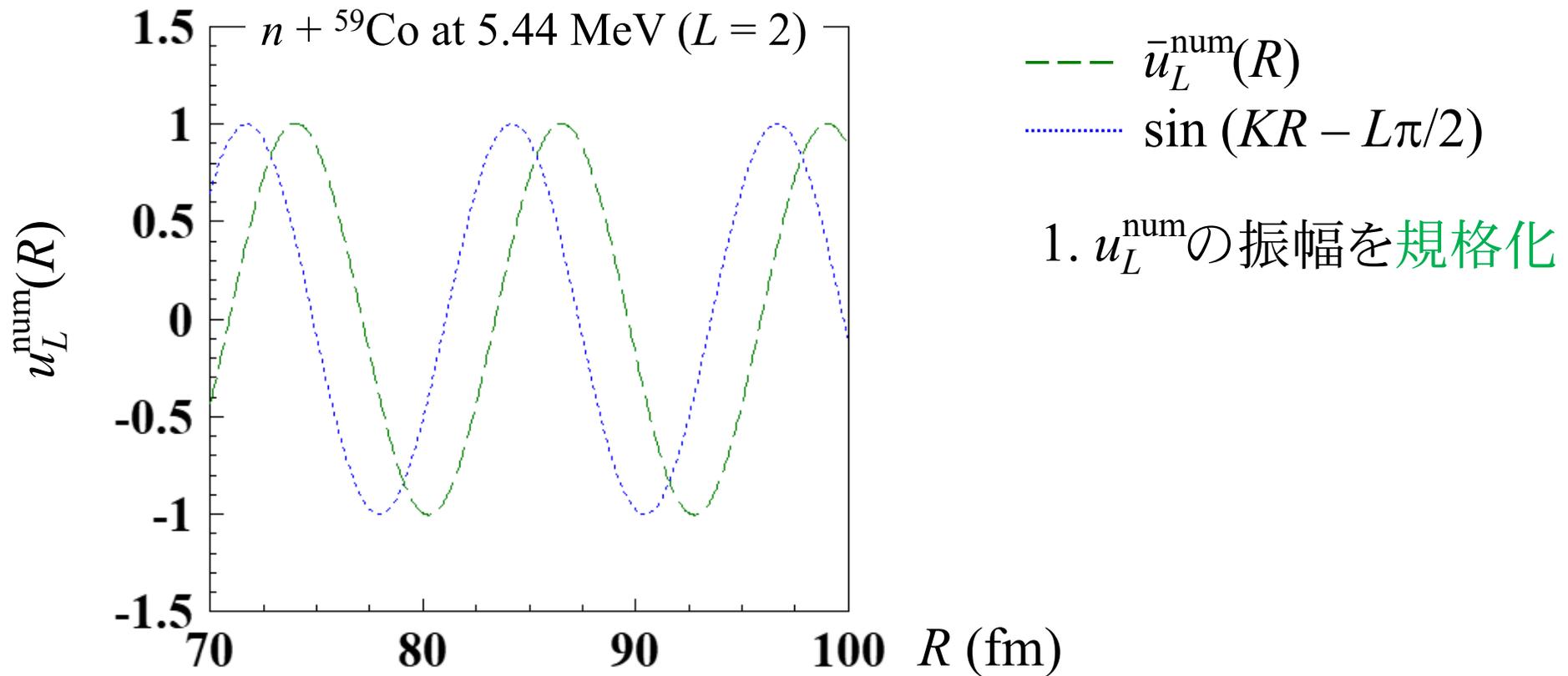
# 数値解から真の解へ



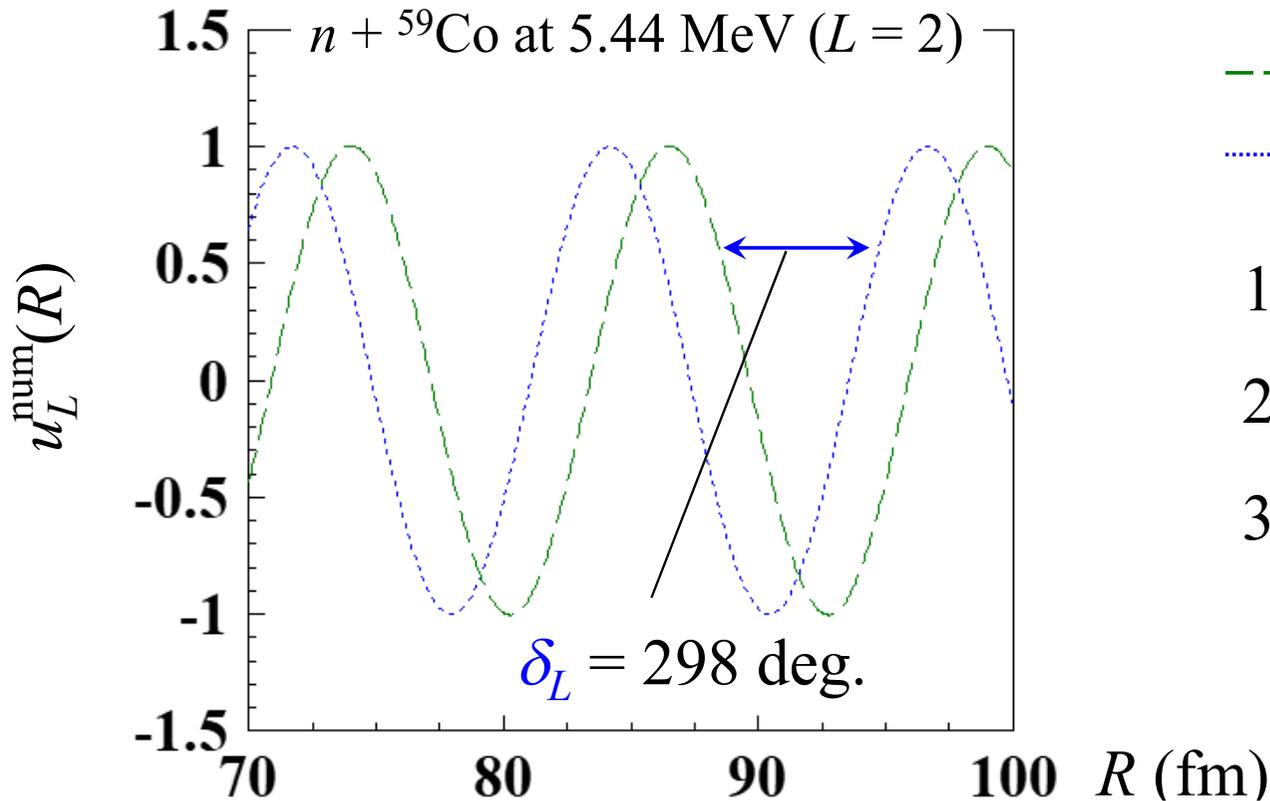
—  $u_L^{\text{num}}(R)$   
⋯  $\sin(KR - L\pi/2)$

1.  $u_L^{\text{num}}$ の振幅を規格化

# 数値解から真の解へ



# 数値解から真の解へ



---  $\bar{u}_L^{\text{num}}(R)$   
.....  $\sin(KR - L\pi/2)$

1.  $u_L^{\text{num}}$ の振幅を規格化

2. 位相差  $\delta_L$  を決定

3. 真の解:

$$u_L(R) = e^{i\delta_L} \bar{u}_L^{\text{num}}(R)$$

結局、次の式を満たすように  $c_L$  と  $\delta_L$  を決めている。

$$c_L u_L^{\text{num}}(R) = e^{i\delta_L} \sin\left(KR - \frac{L}{2}\pi + \delta_L\right) \quad (R \gg R_N)$$

# 波動関数の接続条件

無限遠における漸近形を利用(実数ポテンシャル)

$$c_L u_L^{\text{num}}(R) = e^{i\delta_L} \sin\left(KR - \frac{L}{2}\pi + \delta_L\right) \quad (R \gg R_N)$$



$R > R_N$  における漸近形を利用

$$c_L u_L^{\text{num}}(R) = \frac{i}{2} \left[ KR h_L^{(-)}(KR) - \boxed{e^{2i\delta_L}} KR h_L^{(+)}(KR) \right]$$

散乱行列  $S_L$

- 波動関数及びその微分が等しいとおく(滑らかな接続)。
- $R > R_N$  における接続条件を利用する方が遙かに楽。
- 複素ポテンシャルの場合、位相差は複素数となる。

# 遷移行列の計算

$$T = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}' \cdot \mathbf{R}} |V(\mathbf{R})| \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \right\rangle$$

$$\phi_{\mathbf{K}'}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}' \cdot \mathbf{R}} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{LM} i^L j_L(KR) Y_{LM}^*(\Omega_{\mathbf{K}'}) Y_{LM}(\Omega_{\mathbf{R}})$$

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{LM} i^L \frac{u_L(K, R)}{KR} Y_{LM}^*(\Omega_{\mathbf{K}}) Y_{LM}(\Omega_{\mathbf{R}})$$



$$T = \int \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{L'M'} (-i)^{L'} j_{L'}(KR) Y_{L'M'}(\Omega_{\mathbf{K}'}) \boxed{Y_{L'M'}^*(\Omega_{\mathbf{R}})} V(\mathbf{R})$$

$$\times \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{LM} i^L \frac{u_L(K, R)}{KR} Y_{LM}^*(\Omega_{\mathbf{K}}) \boxed{Y_{LM}(\Omega_{\mathbf{R}})} R^2 dR \boxed{d\Omega_{\mathbf{R}}}.$$

$\delta_{LL'} \delta_{MM'}$

## 遷移行列の計算(つづき)

$$T = \frac{2}{\pi} \int \sum_{LM} j_L(KR) Y_{LM}(\Omega_{K'}) V(R) \frac{u_L(K, R)}{KR} Y_{LM}^*(\Omega_K) R^2 dR$$

$\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} P_L(\cos \theta_{K'})$ 
 $K // z$  軸
 $Y_{LM}^*(\Omega_K) = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \delta_{M0}$

$$T = \frac{2}{\pi} \int \sum_L j_L(KR) Y_{L0}(\Omega_{K'}) V(R) \frac{u_L(K, R)}{KR} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} R^2 dR$$

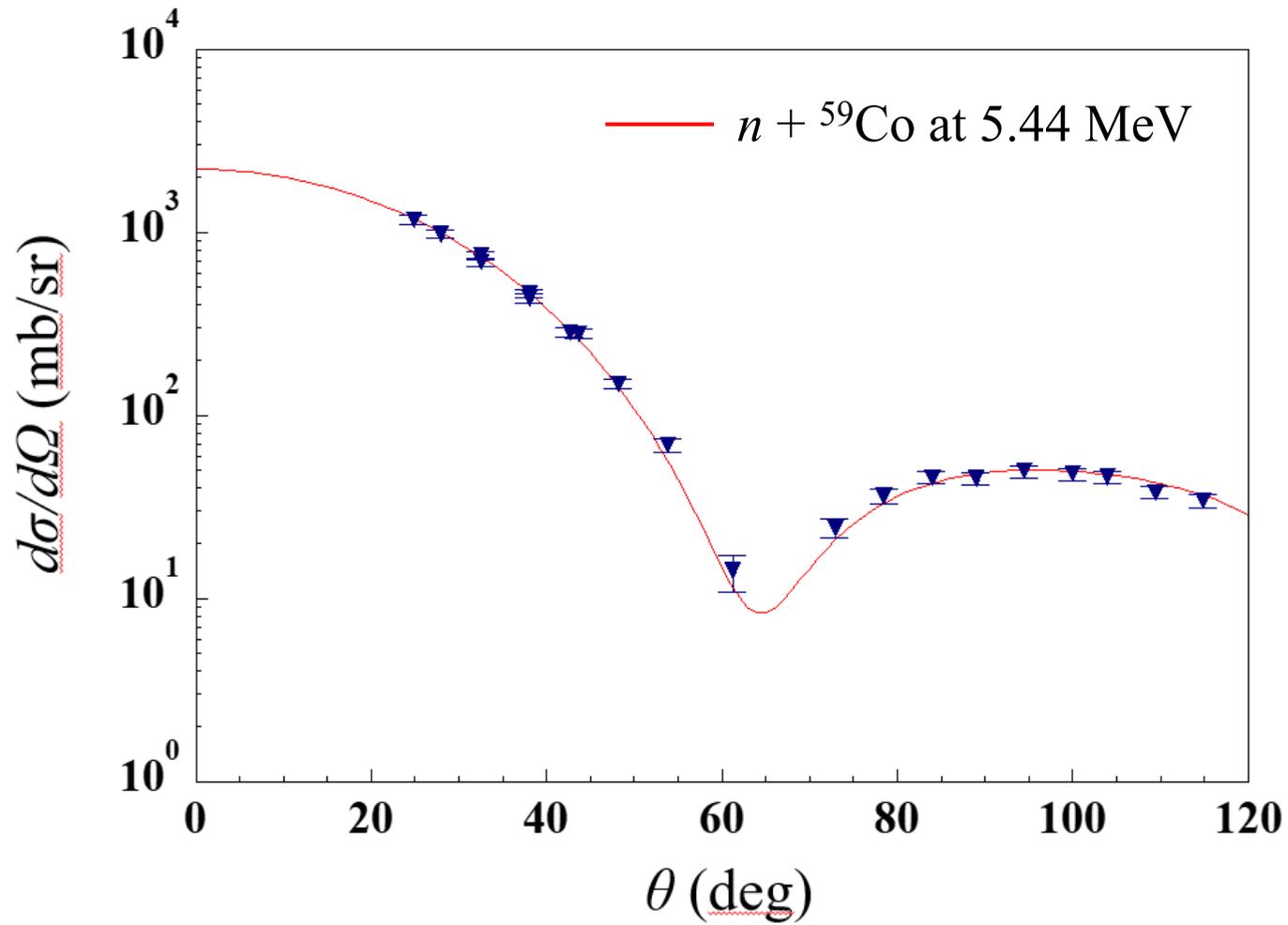
遷移行列の部分波展開表示と微分断面積

$$T = \frac{1}{2\pi^2 K} \sum_L (2L+1) P_L(\cos \theta_{K'}) \int j_L(KR) V(R) u_L(K, R) R dR$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{K'}} = \frac{(2\pi)^4 \mu^2}{\hbar^4} |T|^2$$

内側の波動関数  
のみを利用

# 実験値との比較



# 正確な散乱波が得られた利点を活かす

遷移行列を得るには、もう一度積分計算が必要。

$$T = \frac{1}{2\pi^2 K} \sum_L (2L + 1) P_L(\cos \theta_{K'}) \int j_L(KR) V(R) u_L(K, R) R dR$$

正確な波動関数があれば、断面積は計算できるはず。

$$\begin{aligned} u_L(R) &\rightarrow \frac{i}{2} \left[ KR h_L^{(-)}(KR) - e^{2i\delta_L} KR h_L^{(+)}(KR) \right] \\ &= \frac{i}{2} KR \left( [-n_L(KR) - i j_L(KR)] - S_L h_L^{(+)}(KR) \right) \\ &= \frac{i}{2} KR \left[ h_L^{(+)}(KR) - 2i j_L(KR) - S_L h_L^{(+)}(KR) \right] \\ &= KR \left[ j_L(KR) + \frac{1}{2i} (S_L - 1) h_L^{(+)}(KR) \right] \quad (R > R_N) \end{aligned}$$

# 正確な散乱波の漸近形

散乱波  $\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$  の漸近形 ( $R > R_N$ )

平面波

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_L i^L (2L+1) \left[ j_L(KR) + \frac{1}{2i} (S_L - 1) h_L^{(+)}(KR) \right] P_L(\cos \theta_R)$$



$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2i} \sum_L i^L (2L+1) (S_L - 1) h_L^{(+)}(KR) P_L(\cos \theta_R)$$



$R \gg R_N$

$$\frac{1}{2i} \sum_L i^L (2L+1) (S_L - 1) \frac{\exp[i(KR - L\pi/2)]}{KR} P_L(\cos \theta_R)$$

→ 
$$\frac{1}{2iK} \frac{\exp(iKR)}{R} \sum_L (2L+1) (S_L - 1) P_L(\cos \theta_R)$$

# 散乱波の漸近形と散乱振幅

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f(\theta_R) \frac{\exp(iKR)}{R}}_{\chi_{\mathbf{K}}^{\text{scat}}(\mathbf{R})} \quad (R \gg R_N)$$

散乱振幅

$$f(\theta_R) = \frac{1}{2iK} \sum_L (2L+1) (S_L - 1) P_L(\cos\theta_R)$$

$\chi_{\mathbf{K}}^{\text{scat}}(\mathbf{R})$  の流束  $j_R$

$$\begin{aligned} j_R &= \frac{\hbar}{2i\mu} \frac{|f(\theta_R)|^2}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{iK}{R} - \frac{1}{R^2} \right) - \left( \frac{-iK}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{1}{R} \right] \\ &= \frac{\hbar K}{\mu} \frac{|f(\theta_R)|^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

# 微分断面積

巨視的な点で微小立体角  $d\Omega_R$  に単位時間あたりに放出される確率

$$dN = \frac{\hbar K}{\mu} \frac{|f(\theta_R)|^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{R^2} R^2 d\Omega_R = \frac{\hbar K}{\mu} \frac{|f(\theta_R)|^2}{(2\pi)^3} d\Omega_R$$

これを入射流束  $j_{\text{in}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar K}{\mu}$  で割ったものが断面積

散乱振幅(の部分波展開表示)と微分断面積

$$d\sigma \equiv \frac{dN}{j_{\text{in}}} = |f(\theta_R)|^2 d\Omega_R \quad \longrightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega_R} = |f(\theta_R)|^2$$

$$f(\theta_R) = \frac{1}{2iK} \sum_L (2L+1) (S_L - 1) P_L(\cos\theta_R)$$

漸近波動関数のみ利用

# 遷移行列と散乱振幅

遷移行列の部分波展開表示と微分断面積

$$T = \frac{1}{2\pi^2 K} \sum_L (2L + 1) P_L(\cos \theta_{K'}) \int j_L(KR) V(R) u_L(K, R) R dR$$
$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{K'}} = \frac{(2\pi)^4 \mu^2}{\hbar^4} |T|^2$$

内側の波動関数のみを利用

これら2つの考え方の等価性が  散乱の形式論で示される。

散乱振幅(の部分波展開表示)と微分断面積

$$d\sigma \equiv \frac{dN}{j_{\text{in}}} = |f(\theta_R)|^2 d\Omega_R \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega_R} = |f(\theta_R)|^2$$

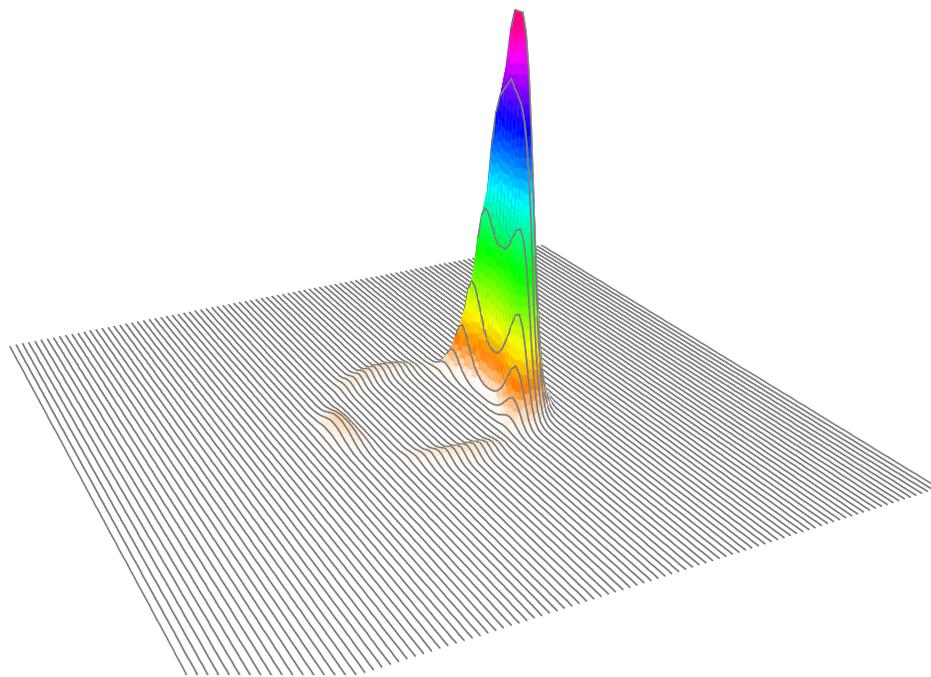
$$f(\theta_R) = \frac{1}{2iK} \sum_L (2L + 1) (S_L - 1) P_L(\cos \theta_R)$$

漸近波動関数のみ利用

# 散乱問題の純量子力学的解法のまとめ

- 極座標系で反応を記述する場合、波動関数の角度成分は既知であり、その解は角運動量  $L$  とその  $z$  成分  $M$  で特徴付けられる。
- 平面波は様々な角運動量を持った部分波の重ね合わせであり、反応に実質的に関与するのは少数の部分波。
- 部分平面波は内向き進行波と外向き進行波の重ね合わせとみなせる。ポテンシャルの影響は、外向き波にのみ現れる。
- 部分散乱波の漸近形を利用することで、正しい散乱波を(数値的に)求めることができる。
- 正しい散乱波が得られれば、遷移行列または散乱振幅から微分断面積を純量子力学的に計算することが可能。

## 7. 波束の理論



$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta_R) \frac{e^{iKR}}{R}$$



# 散乱理論の教科書によれば…

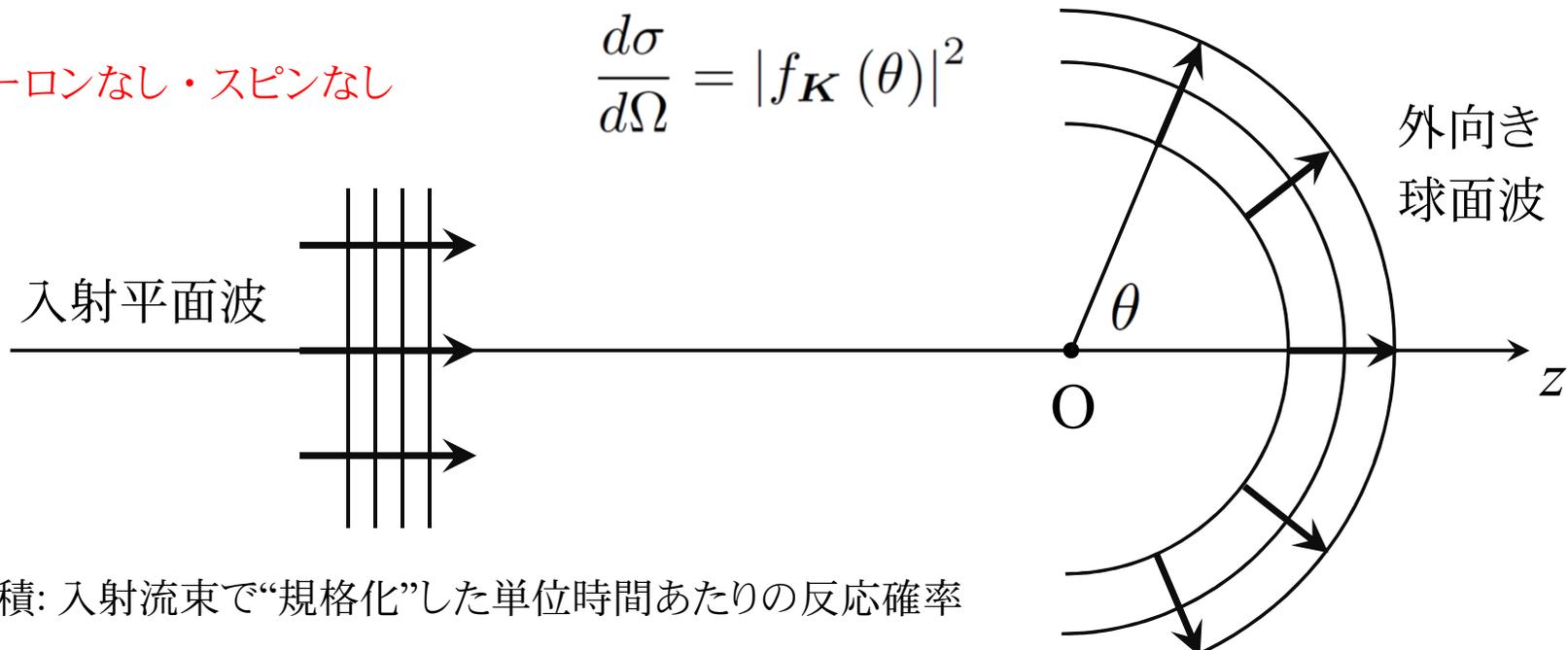
適切な境界条件を満足する散乱波は、無限遠方において

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta_R) \frac{e^{iKR}}{R} \equiv \chi_{\mathbf{K}}^{\text{asym}}(\mathbf{R})$$

となる。このとき、微分散乱断面積は以下のように与えられる。

クーロンなし・スピンなし

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{K}}(\theta)|^2$$



※断面積: 入射流束で“規格化”した単位時間あたりの反応確率

# 疑問

- 突然「適切な境界条件」と言われても....。
- 仮にそういう形で散乱波を表現しただけだとしても、 $|f_{\mathbf{k}}(\theta)|^2$  が観測される断面積になるというのはどうにも腑に落ちない。
- 波動関数の時間依存性はどこに？
- 入射平面波って、宇宙の彼方まで広がっているよね？



定常散乱波の理論は、実験条件(および直観的な描像)と合致しない。

## 本単元の目的

直観と合致する波束の理論と定常散乱波の理論がどのような関係にあるのかを明らかにする。

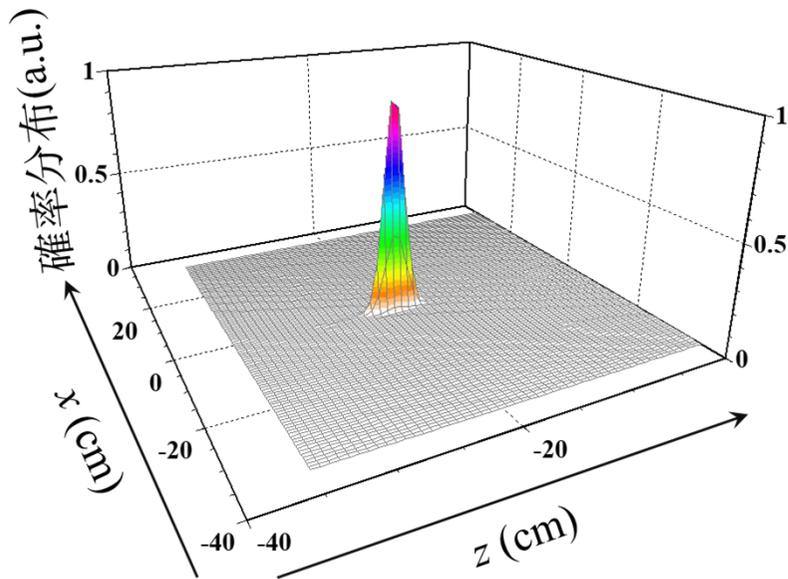
# 波束状態

反応の初期状態(初期波束): 波束中心 波束の運動量(波数)

$$\Phi(t_0) = \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu z^2}$$

初期時刻:  $t_0 = -|\mathbf{Z}_0| \frac{\mu}{\hbar K_0}$  換算質量



波束中心の速さ:  $v_0 = \frac{\hbar K_0}{\mu}$

$\mathcal{G}$ はエンベロープ関数で、波束の形状を表す(たとえばガウス型)。

# 3つのスケール

## 反応領域の大きさ

fm のスケール。換算ド・ブロイ波長  $1/K_0$  に相当。

※波数  $K_0$  の波は位置変化  $1/K_0$  を位相変化 1 として“検出”する。

## 波束の広がり

典型的には cm のスケール。長さ  $w$  として表現する。このとき  
運動量(波数)は幅  $1/w$  ( $\sim 10^{-13}$  1/fm)に集中している。

## 漸近領域の距離

典型的には m のスケール。粒子を撃ち込んだり検出器で測定したりする領域。波動関数の漸近形が利用できる。 $|Z_0|$  に相当。

$$\frac{1}{K_0} \ll w \ll |Z_0|$$

## 初期波束のフーリエ展開

$$\begin{aligned}\int e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}\Phi(t_0)d\mathbf{R} &= \int e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}\mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{R} \\ &= \int \mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{R} \\ &= e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0}\int \mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)}d\mathbf{R} \\ &= \boxed{\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0}\dots(1)\end{aligned}$$

$\mathcal{G}$  のフーリエ変換 ( $\sim 1/w$  の極めて狭い幅に分布)

$$\text{逆変換: } \Phi(t_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{P}$$

初期波束は  $\mathbf{P} \sim \mathbf{K}_0$  に集中

# 初期波束の定常波動関数による表現

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0)} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{P}$$

$\mathbf{R} \sim \mathbf{Z}_0$  に局在

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}}{R}$$

運動量  $\mathbf{K}$

$\mathbf{R} \sim \mathbf{Z}_0$  で運動量  $\sim -\mathbf{K}$



↓式(1)

$$(\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}), \Phi(t_0)) \approx \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \Phi(t_0) d\mathbf{R} = \frac{1}{(2\pi)^3} \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0}$$

$$\tilde{\Phi}(t_0) = \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}$$

逆変換



$$\Phi(t_0) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

# 測定がなされる時刻での波束と定常波動関数

$$\Phi(t) = e^{-(i\hat{H}/\hbar)(t-t_0)} \Phi(t_0)$$

$$\Phi(t_0) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

↓  $\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$  は  $H$  の固有状態(固有値  $E$ )

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE/\hbar)(t-t_0)} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

幅  $\sim 1/w$  ( $\sim 10^{-13} \text{ fm}^{-1}$ ) ↓ 測定領域では漸近系が利用可

$$\Phi(t) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE/\hbar)(t-t_0)} \times \left[ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{R} \right] d\mathbf{K} \equiv \Phi_{\text{asym}}(t)$$

この後の方針:  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$  とし、 $E$  と  $K$  を  $\mathbf{Q}$  の1次までで評価する。

# 定常散乱波の波数・エネルギー

$$Q \equiv K - K_0 \quad \sim 10^{-11} \text{ MeV}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} K^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu} (\mathbf{K}_0 + \mathbf{Q})^2 \sim \frac{\hbar^2}{2\mu} K_0^2 + \frac{\hbar^2}{\mu} (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Q}) = E_0 + \boxed{\hbar (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q})}$$

$$K^2 \sim K_0^2 + 2(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Q}) \rightarrow K \sim K_0 + (\hat{\mathbf{K}}_0 \cdot \mathbf{Q})$$

 積分変数を  $\mathbf{K}$  から  $\mathbf{Q}$  に変更

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{asym}}(t) &\approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{g}(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q})(t-t_0)} \\ &\times \left[ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\mathbf{Q} + \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{iK_0 R} e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0 \cdot \mathbf{Q})R}}{R} \right] d\mathbf{Q} \end{aligned}$$

# 波束の平面波成分

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{asym}}^{\text{PW}}(t) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})(t-t_0)} e^{i(\mathbf{Q}+\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{Q} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \times \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})t} e^{i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})t_0} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{Q} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{Q}) e^{i(\mathbf{R}-\mathbf{v}_0 t)\cdot\mathbf{Q}} d\mathbf{Q} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{v}_0 t)
 \end{aligned}$$

$= i|\mathbf{Z}_0|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_z$   
 $= i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})\frac{-|\mathbf{Z}_0|}{v_0} = -i|\mathbf{Z}_0|\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{Q}$

Trivialな時間依存性

中心が速度  $\mathbf{v}_0$  で運動する波束  
(入射波束の形を保持)

# 波束の拡散は？

波束の**拡散**を扱うには、 **$Q$** の高次項が必要。ただし今の場合、その効果は無視して良い。

1次元の自由ガウス波束の**確率分布幅**(時間変化):

$$w(t) = \sqrt{w_0^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{\mu^2 w_0^2}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{\mu^2 w_0^4}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{(\hbar c)^2 (ct)^2}{(\mu c^2)^2 w_0^4}}$$

( $\hbar c \sim 200$  [MeV · fm],  $ct \sim 10^{15}$  fm,  $\mu c^2 \sim 10^3$  MeV,  $w_0 \sim 10^{13}$  fm)

検出器の距離



$$\frac{w(t)}{w_0} \sim \sqrt{1 + \frac{4 \times 10^4 \times 10^{15 \times 2}}{10^6 \times 10^{13 \times 4}}} \sim \sqrt{1 + 4 \times 10^{-14}}$$

# 波束の球面波成分

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})(t-t_0)} \\ &\quad \times f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{iK_0 R} e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0\cdot\mathbf{Q})R}}{R} d\mathbf{Q} \\ &= e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{e^{iK_0 R}}{R} \int \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{Q}) f_{\mathbf{K}}(\theta) e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0\cdot\mathbf{Q})(R-v_0 t)} d\mathbf{Q} \end{aligned}$$

積分に關与する  $\mathbf{Q}$  の範囲内では  $f$  の  $\mathbf{K}$  依存性は無視できる。



$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) \approx \underbrace{e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)}}_{\text{Trivialな時間依存性}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}_0}(\theta) \frac{e^{iK_0 R}}{R} \underbrace{\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0(R-v_0 t))}_{\text{中心が速さ } v_0 \text{ で動径外向きに運動する波束}}$$

Trivialな時間依存性

中心が速さ  $v_0$  で動径  
外向きに運動する波束

# ガウス型エンベロップ関数の場合

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu z^2}$$

- 平面波成分

$$\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + (z - v_0 t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu(z-v_0 t)^2}$$

- 球面波成分

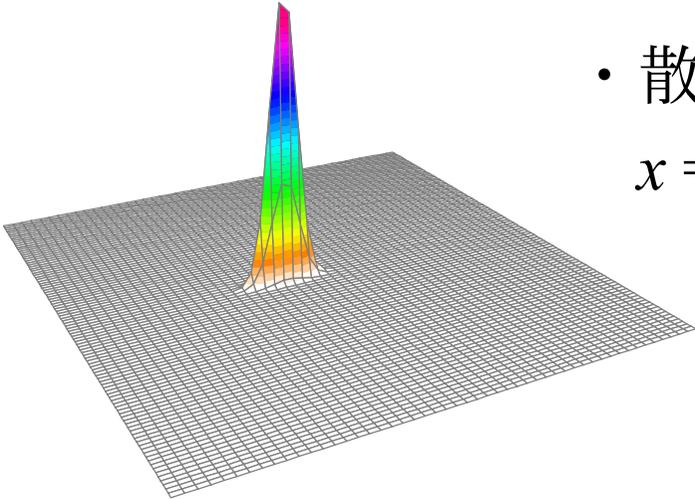
$$\hat{\mathbf{K}}_0(R - v_0 t) = (R - v_0 t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0[R - v_0 t]) = e^{-\nu(R-v_0 t)^2}$$

# エンベロープ関数の性質(平面波成分)

$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{PW}}(t) = e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t)$$

- 中心は速さ  $v_0$  で  $z$  軸方向に運動。
- **cm 程度の拡がり**を持つので、散乱領域付近では、 $\mathcal{G}$  の  $x, y$  依存性は無視して良い。
- 散乱領域の**単位面積あたりに流れ込む確率の総量**は、 $x = y = 0$  として、 $\mathcal{G}$  の  $z$  分布の積分を取ることで求まる。

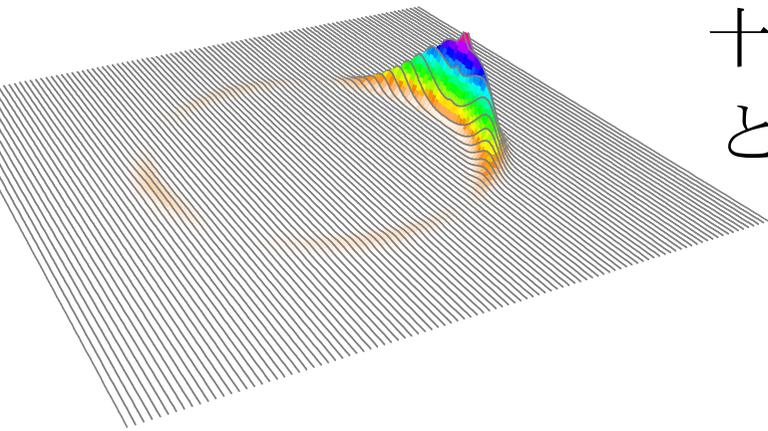


$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 z)|^2 dz \equiv \mathfrak{G}$$

# エンベロープ関数の性質(球面波成分)

$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) \approx e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}_0}(\theta) \frac{e^{iK_0 R}}{R} \mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - v_0 t])$$

- 中心は速さ  $v_0$  で動径外向きに運動。
- 動径方向についての分布は初期波束の  $z$  方向の分布と同じ。
- $\theta$  方向に出ていく単位立体角あたりの確率の総量は、十分時間が経ったところで求めた  $\mathcal{G}$  の  $R$  分布の積分値と、散乱振幅の絶対値二乗の積:



$$|f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \int_0^\infty \left| \mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - R_0]) \right|^2 dR \approx |f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \mathfrak{G}$$

巨視的な距離

# 微分断面積

散乱領域の単位面積あたりに流れ込む確率の総量:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 z)|^2 dz \equiv \mathcal{G}$$

$\theta$  方向に出ていく、単位立体角あたりの確率の総量:

$$|f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \int_0^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 R - R_0)|^2 dR \approx |f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \mathcal{G}$$

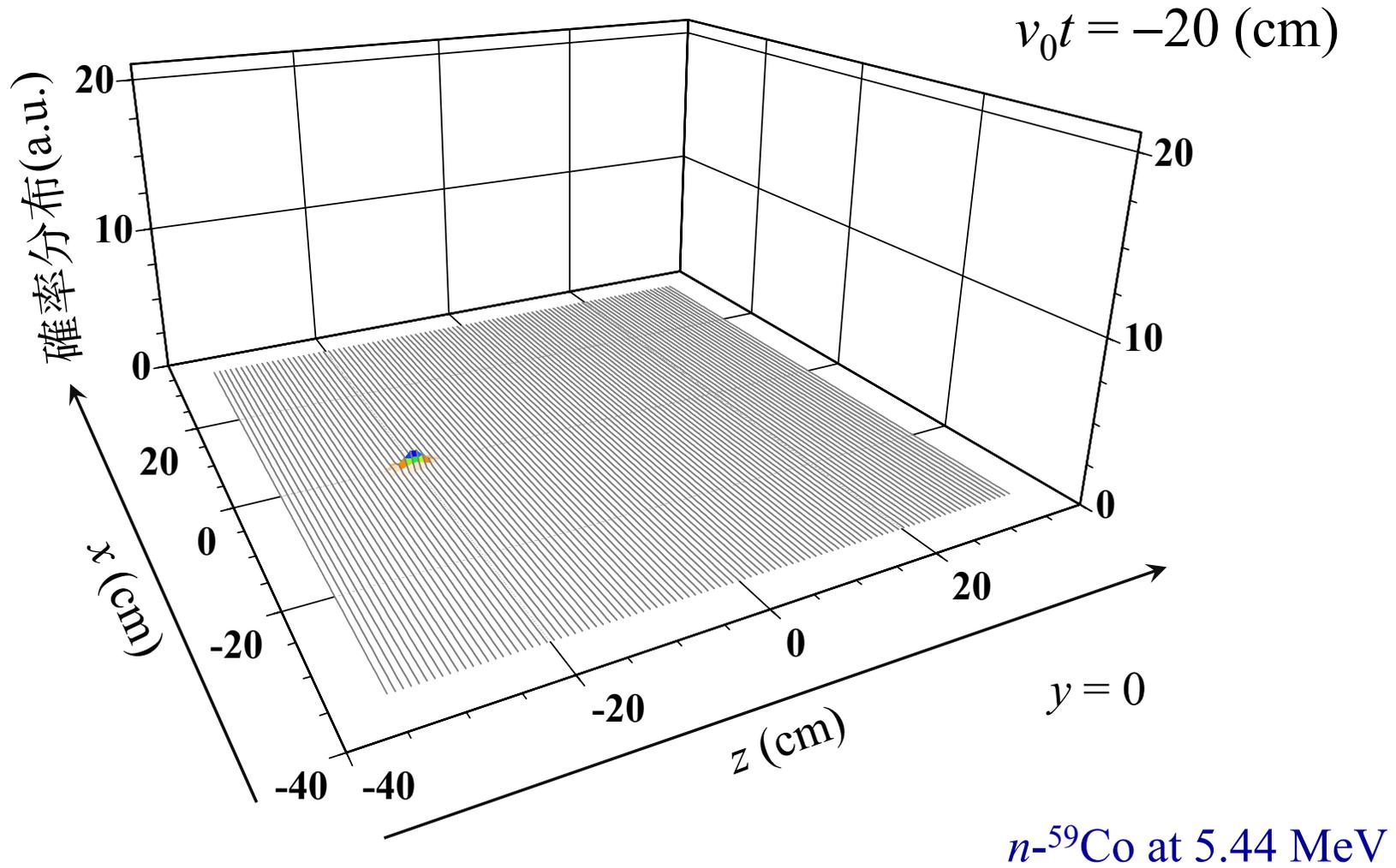


微分断面積

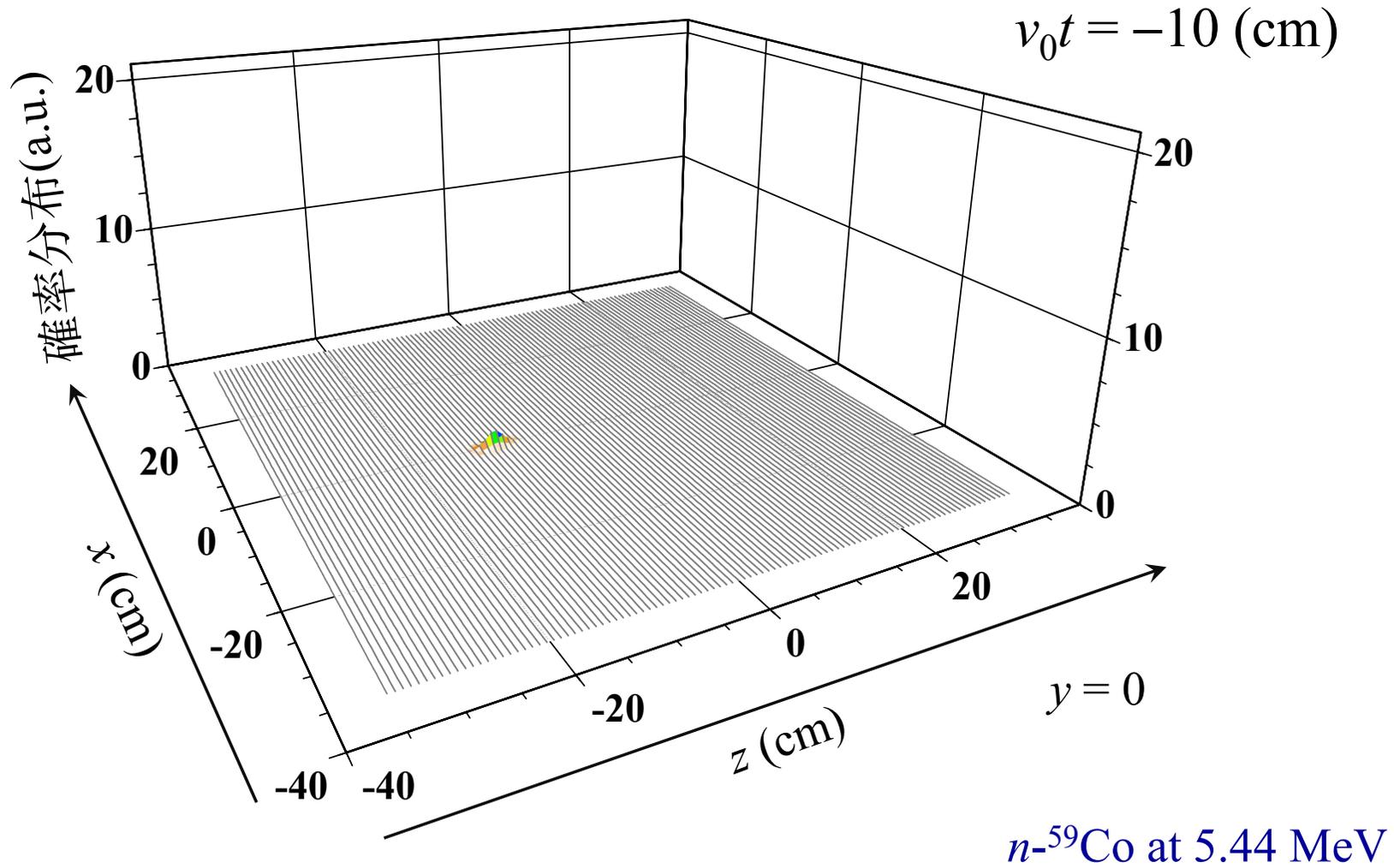
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{K}}(\theta)|^2$$

定常散乱波の理論の結論と完全に一致!

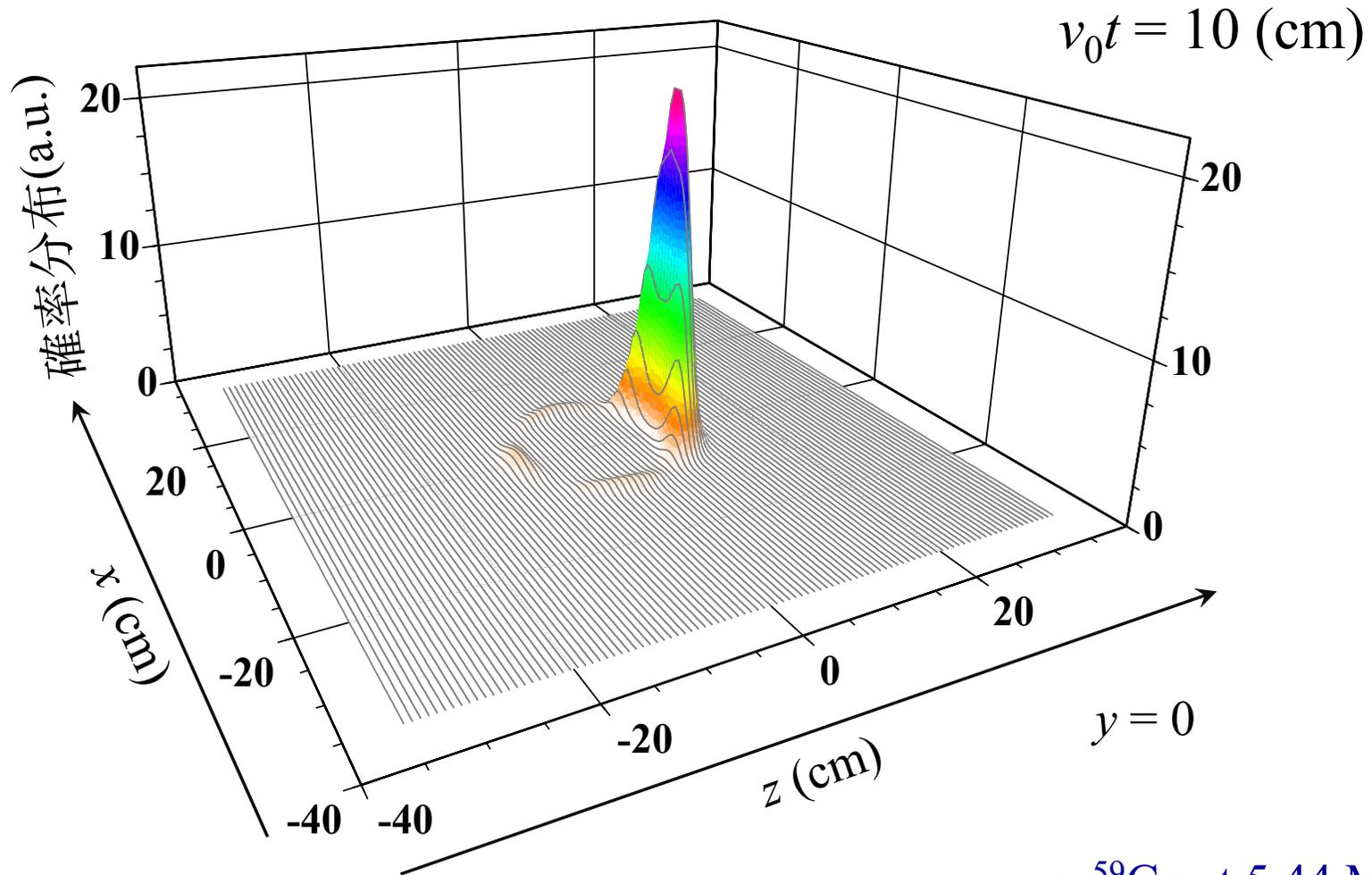
# 波束の伝播の様子



# 波束の伝播の様子

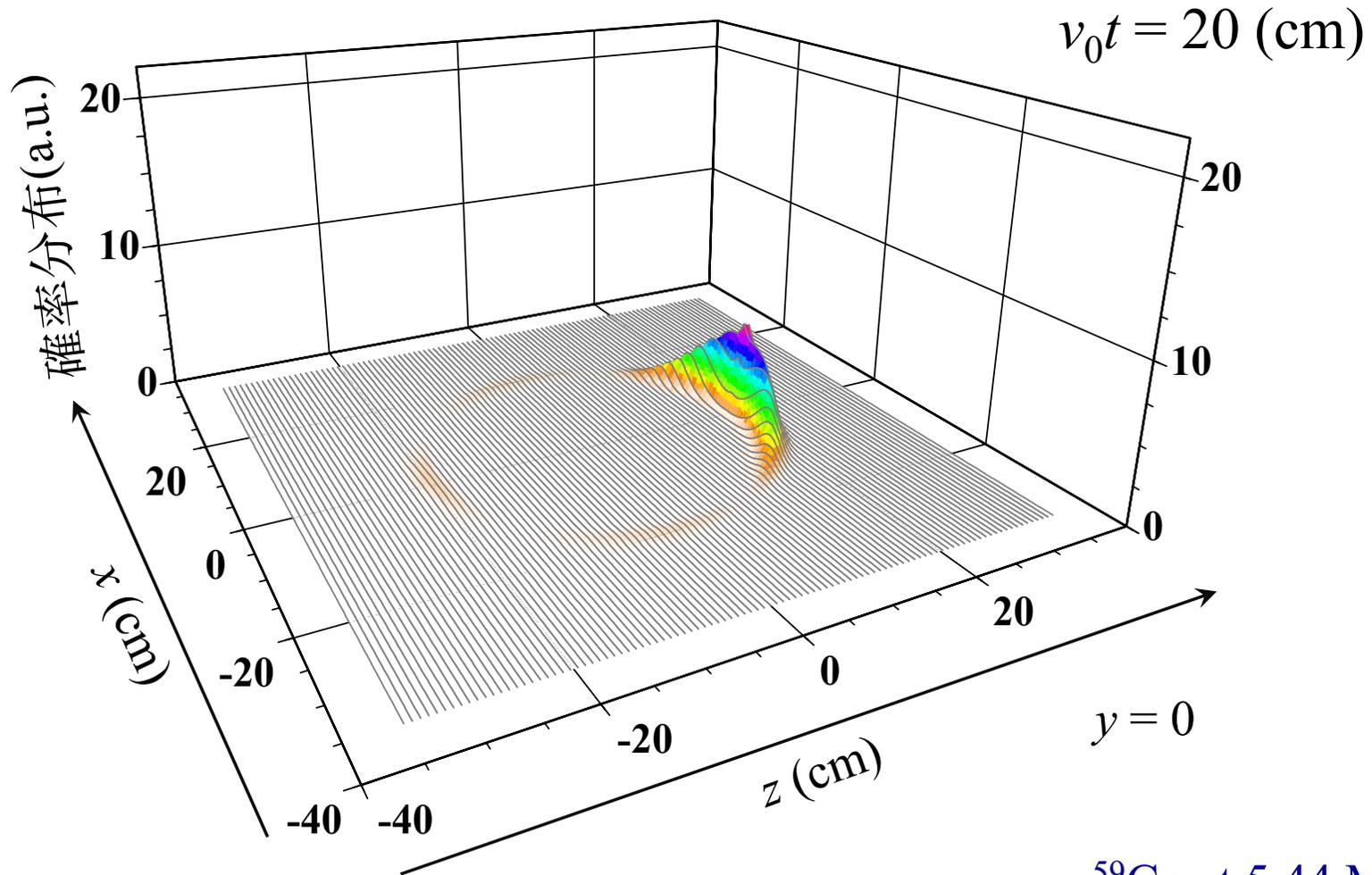


# 波束の伝播の様子



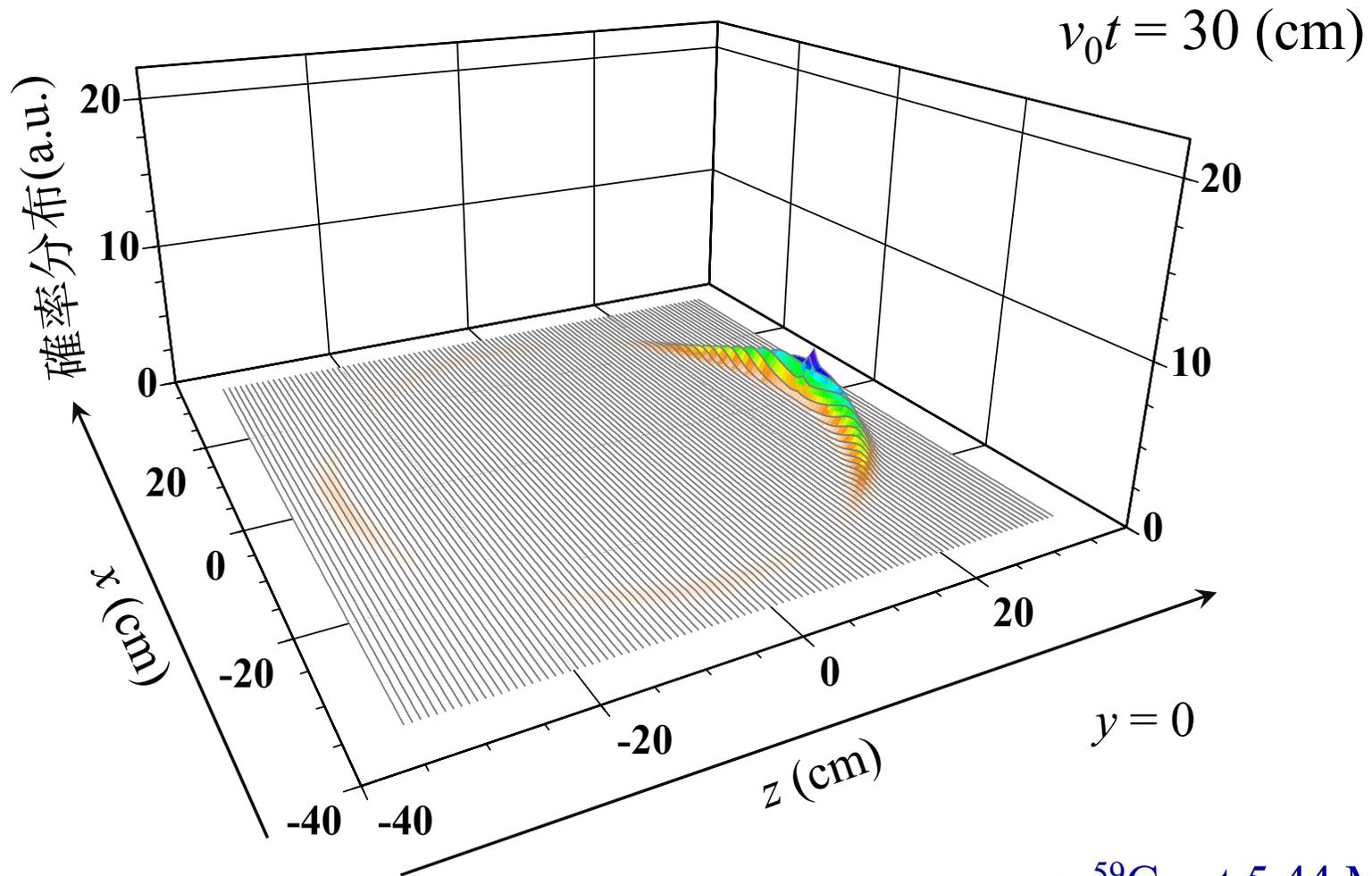
$n$ - $^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV

# 波束の伝播の様子



$n$ - $^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV

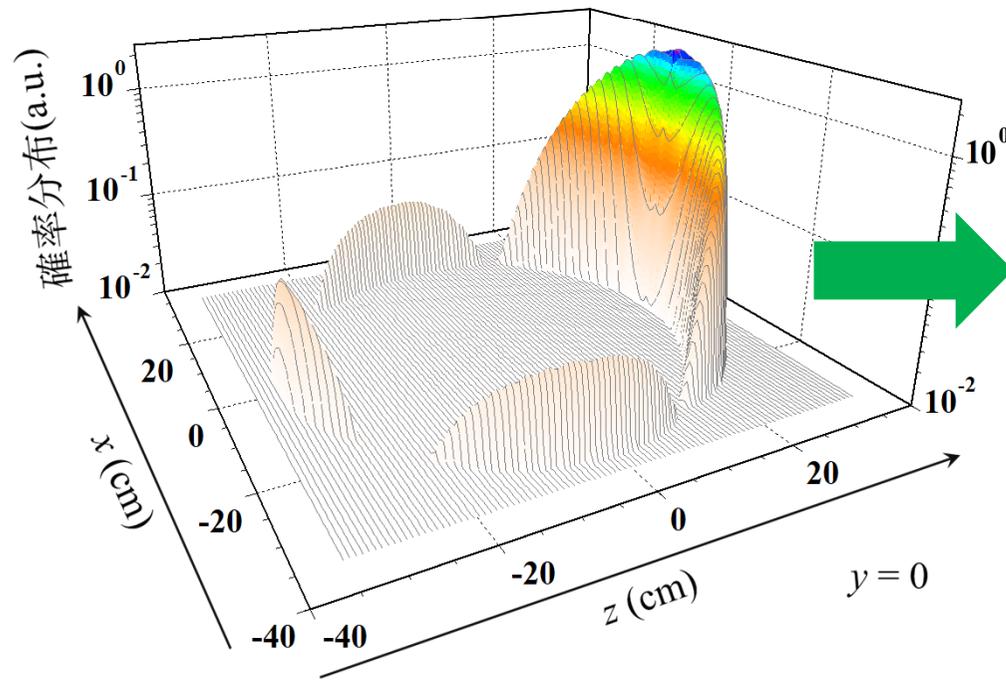
# 波束の伝播の様子



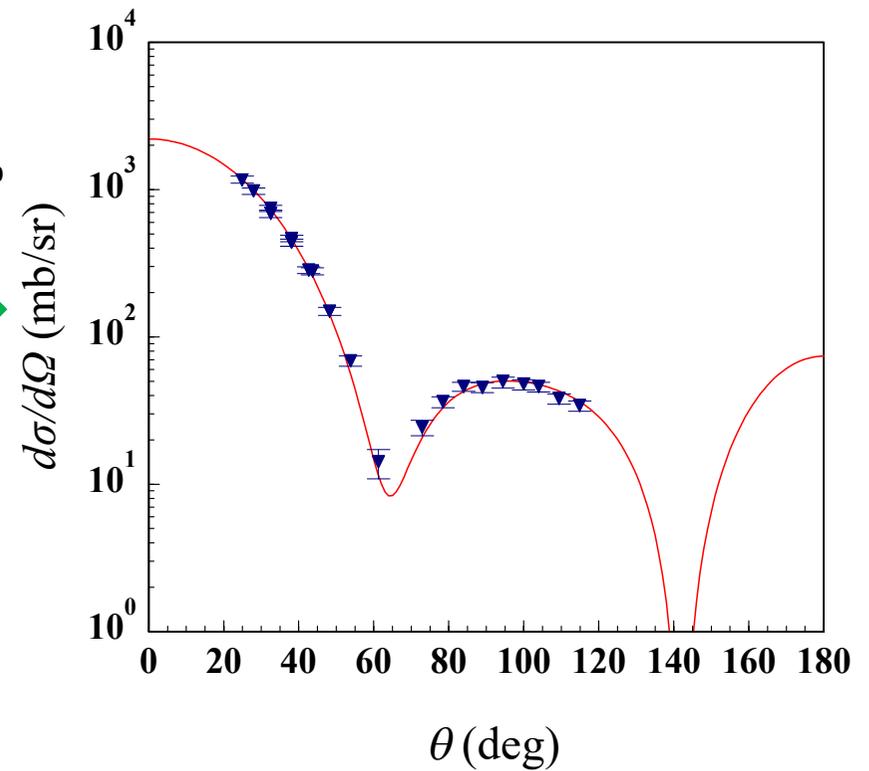
$n$ - $^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV

# 波束の伝播の様子

$v_0 t = 30$  (cm)



$n$ - $^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV



# 波束の理論のまとめ

- 現実の実験条件や直観的描像と合致する波束の理論と、通常学習する定常散乱波の理論との関係を議論した。
- 運動量に(非常に狭い)幅を持たせる事によって、散乱現象を、直観と合致する波束の運動として描くことができる。
- そのようにして求めた微分断面積の表式は、定常散乱波の理論の結論と完全に一致する。これは本質的には、散乱領域の大きさと比べて、波束の拡がりが無限に大きいと見なせるからである。

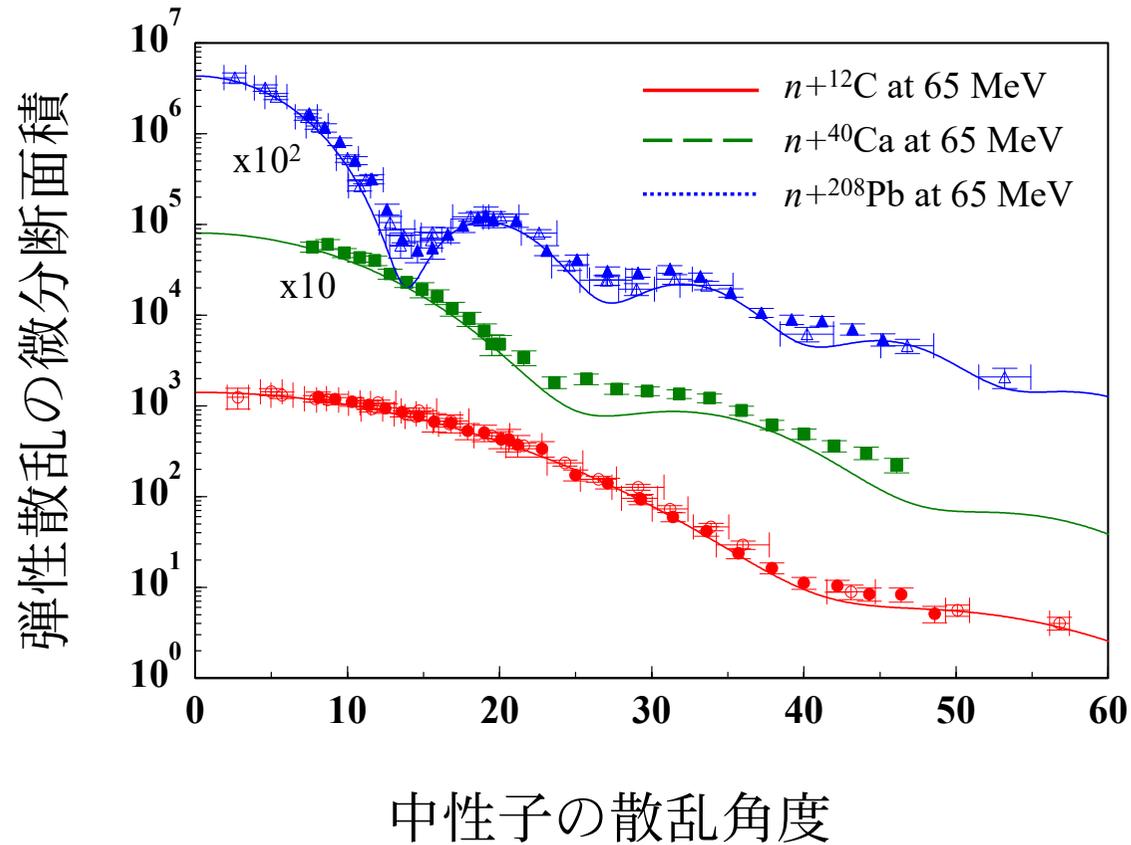
※より詳しい議論については、以下を参照(ただしAusternは絶版)。

N. Austern, “Direct Nuclear Reaction Theories” (John Wiley & Sons) [Chap. 1]

笹川辰弥 『散乱理論 (物理学選書20)』 (裳華房) [第2章]

M. L. Goldberger and K. M. Watson, “Collision Theory” (Dover) [Chap. 3]

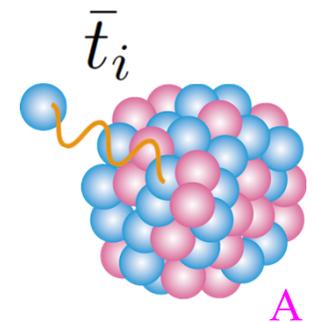
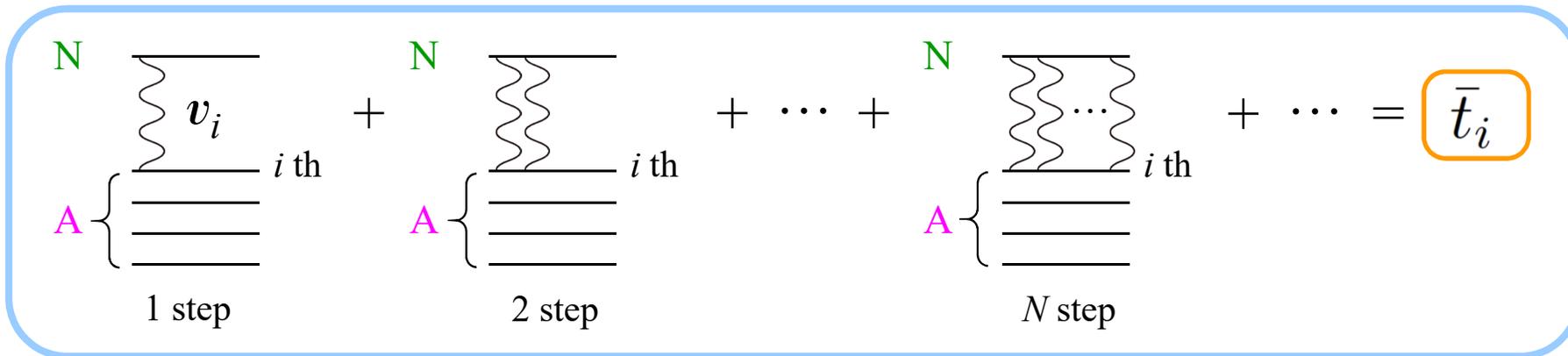
## 8. 多重散乱理論と微視的光学ポテンシャル



# 現象論から微視的理論へ

TABLE I. Optical-Model Parameters Neutrons

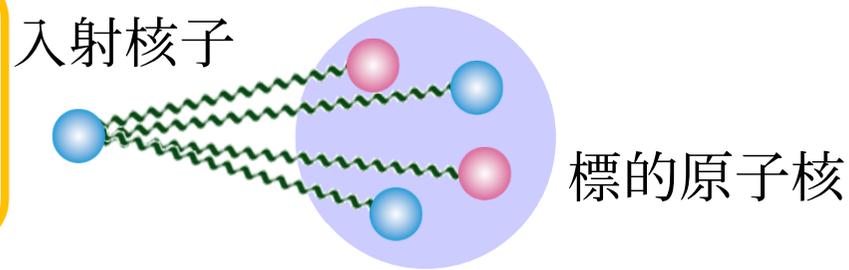
NUCLIDE	ENERGY (MEV)	REAL POTENTIAL			VOL. IMAG. POTENTIAL			SURF. IMAG. POTENTIAL			SPIN-ORBIT POTENTIAL			ST	SR	FIT	NOTE	REF.
		V	R	A	W	RW	AW	WD	RD	AD	VSO	RSO	ASO					
AL	1.	40.	1.25*	0.65*			5.0G*	1.25*	0.98*	10.*	1.25*	0.65*	3520	1340	S3	15	GIL63	
AL	1.5	47.4	1.25*	0.46			6.3G	1.25*	0.98*	10.*	1.25*	0.46	3204		S1	10	KOR68	
AL	2.47	48.0	1.14	0.65			8.42	1.19	0.48*	8.0*	1.14	0.65	2530	1270	S2	2	HOL71	
AL	3.00	47.9	1.13	0.72			7.35	1.08	0.48*	8.0*	1.13	0.72	2520	1250	S2	2	HOL71	
AL	3.49	48.7	1.18	0.61			8.46	1.29	0.48*	8.0*	1.18	0.61	2360	1130	S1	2	HOL71	
AL	4.00	49.1	1.20	0.62			7.99	1.26	0.48*	8.0*	1.20	0.62	2290	1090	S2	2	HOL71	
AL	4.56	50.2	1.18	0.59			8.38	1.26	0.48*	8.0*	1.18	0.59	2060	1020	S1	2	HOL71	
AL	6.09	47.8	1.20	0.67			8.23	1.23	0.48*	8.0*	1.20	0.67	1880	1070	S3	2	HOL71	
AL	7.	45.5	1.25*	0.65*			9.5G	1.25*	0.98*	8.6	1.25*	0.65*			X3		BJO58	
AL	7.05	49.1	1.20	0.68			7.90	1.20	0.48*	8.0*	1.20	0.68	1800	1040	S2	2	HOL71	
AL	7.97	49.4	1.20	0.69			12.1	1.30	0.41	9.8	1.20	0.69			S1	2	BRA72	



# 核子-原子核散乱の記述

入射核子-核内核子間の核力の和が散乱を引き起こすと考える。

遷移行列をこの形に限ることは、散乱の境界条件の限定を意味する(たとえば組み替えチャンネルは生成できない)。この段階で一部のチャンネルを視ていないことになる。



遷移行列

$v$  は極めて強いので扱いにくい!

$$T = \sum_i v_i + \sum_i v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j + \sum_i v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots = \sum_i \Lambda_i$$

(散乱について)自由なグリーン関数

運動エネルギー演算子

原子核のハミルトニアン

$$G_0^{(+)} = \frac{1}{E - (T_{\text{NA}} + H_A) + i\eta}$$

# Resummation (1/3)

$$\Lambda_i \equiv v_i + v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j + v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots$$

$$\Lambda_i = v_i + v_i G_0^{(+)} v_i + v_i G_0^{(+)} v_i G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots$$

$$+ v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} v_j + v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots$$

$$= v_i + v_i G_0^{(+)} \left( v_i + v_i G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots \right)$$

$$+ v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \left( v_j + v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots \right)$$

最後に核子*i*と相互作用する遷移行列成分

$$\Lambda_i = v_i + v_i G_0^{(+)} \Lambda_i + v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \Lambda_j$$

最後に*i*以外の核子と相互作用する遷移行列成分

## Resummation (2/3)

$$\Lambda_i = v_i + v_i G_0^{(+)} \Lambda_i + v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \Lambda_j$$

$$\Lambda_i = \frac{1}{1 - v_i G_0^{(+)}} v_i + \frac{1}{1 - v_i G_0^{(+)}} v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \Lambda_j$$

$$\left( t_i = v_i + v_i G_0^{(+)} t_i \right) \quad t_i \equiv \frac{1}{1 - v_i G_0^{(+)}} v_i \quad \longrightarrow \quad \Lambda_i = t_i + t_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \Lambda_j$$

2核子間有効相互作用  $t$  で書き下した遷移行列

$$T = \sum_i t_i + \sum_i t_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} t_j + \sum_i t_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} t_j G_0^{(+)} \sum_{k \neq j} t_k + \dots$$

## Resummation (3/3)

遷移行列が作用する波動関数が核子の入れ替えに関して反対称化されていけば、諸量は核子の番号によらない。

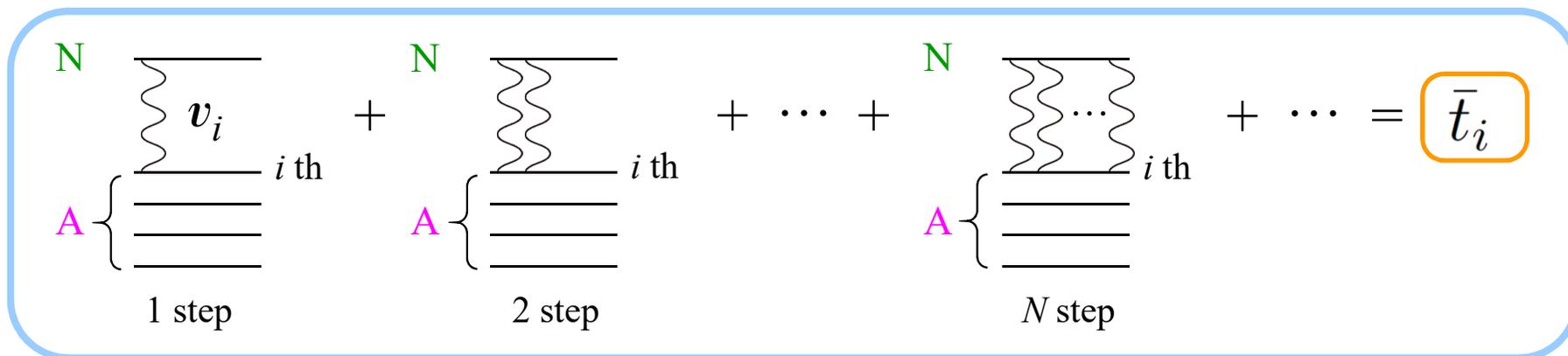
$$\sum_{j \neq i} t_j \rightarrow \frac{A-1}{A} \sum_j t_j \equiv \sum_j \bar{t}_j$$

$$T = \frac{A}{A-1} \bar{T}$$

$$\bar{T} \equiv \sum_i \bar{t}_i + \sum_i \bar{t}_i G_0^{(+)} \sum_j \bar{t}_j + \sum_i \bar{t}_i G_0^{(+)} \sum_j \bar{t}_j G_0^{(+)} \sum_k \bar{t}_k + \dots$$

核子-原子核散乱を解く際の相互作用として、(扱いにくい)**2核子力**の和の代わりに(扱いやすい)**2核子間有効相互作用**の和を用いてよい!

# 多重散乱理論



$$\left( T_{\text{NA}} + \sum_i v_i + H_A - E \right) \Psi = 0 \quad \xrightarrow{\text{Resummation}} \quad \left( T_{\text{NA}} + \sum_i \bar{t}_i + H_A - E \right) \bar{\Psi} = 0$$

(for all boundary conditions)  (for a specific b. c.)

左の式では散乱の境界条件を限定していないため、波動関数は厳密で、流束は保存する。右の式は限られた境界条件を前提とした式であるため、一部のチャンネルは視ておらず、流束は保存しない。

$$\bar{t}_i = \frac{A-1}{A} t_i, \quad t_i = v_i + v_i G_0^{(+)} t_i$$

- L. L. Foldy, Phys. Rev. 67, 107 (1945); K. M. Watson, Phys. Rev. 89, 115 (1953).  
A. K. Kerman, H. McManus, and R. M. Thaler, Ann. Phys. (NY) 8, 551 (1959).  
M. Yahiro, K. Minomo, KO, and M. Kawai, PTP 120, 767 (2008).*

# 多重散乱理論に基づく弾性散乱の記述

※ $c = 0$ : Aの基底状態

$$\left( T_{\text{NA}} + \sum_i \bar{t}_i + H_A - E \right) \bar{\Psi} = 0$$

$$\bar{\Psi} = \sum_c \chi_c \phi_c^A \quad H_A \phi_c^A = \varepsilon_c \phi_c^A \quad \langle \phi_{c'}^A | \phi_c^A \rangle = \delta_{c'c}$$

$$\int \phi_0^{*A} \left( T_{\text{NA}} + \sum_i \bar{t}_i + H_A - E \right) \sum_c \chi_c \phi_c^A d\xi_A = 0$$

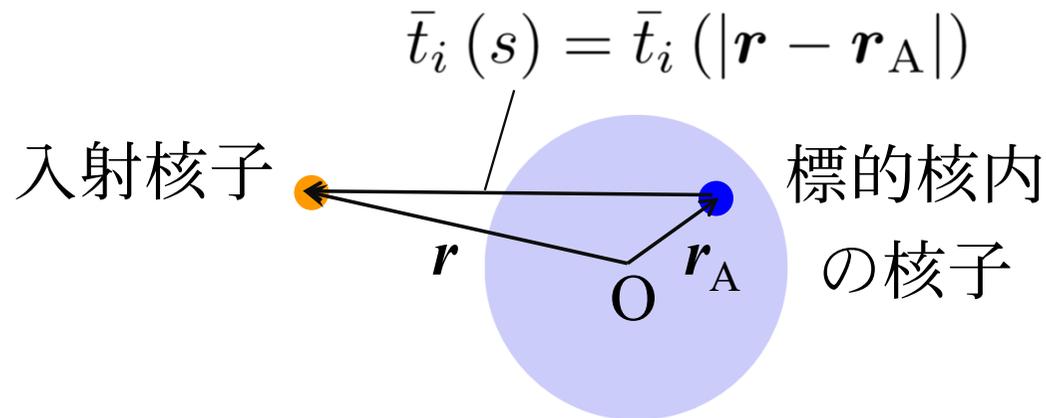
$$\left( T_{\text{NA}} + \int \phi_0^{*A} \sum_i \bar{t}_i \phi_0^A d\xi_A - \cancel{E - \varepsilon_0} \right) \chi_0 = - \sum_{c \neq 0} \left( \int \phi_0^{*A} \sum_i \bar{t}_i \phi_c^A d\xi_A \right) \chi_c$$

畳み込みポテンシャル  
(エネルギー依存, 複素, 非局所)

$\approx 0$   $\bar{t}_i$ で膨大な状態の1つに遷移した後、  
また基底状態に戻る確率は低い。  
(集団励起状態を除く)

# 畳み込みポテンシャル(微視的光学ポテンシャル)

2核子間有効相互作用の“期待値”を核間相互作用とする。



$$U(\mathbf{r}) = \int \phi_0^{*A} \sum_i \bar{t}_i \phi_0^A d\xi_A = (A-1) \int \bar{t}_i(s) \rho(\mathbf{r}_A) d\mathbf{r}_A$$

原子核の密度分布  $\rho_A(\mathbf{r}_A)$  は、核構造計算で求められる。

2核子間有効相互作用をどのようにして求めるかが次の問題。

# インパルス近似に基づく2核子間有効相互作用

$$t_i = v_i + v_i \frac{1}{E - (T_{NA} + H_A) + i\eta} t_i$$

解くのは大変!  
(多体問題)

$$t_i = v_i + v_i \frac{1}{\boxed{E} - T_{NA} - T_{iB} \boxed{-H_B - V_{iB}} + i\eta} t_i$$

$\approx E'$



$$t_i^{IA} = v_i + v_i \frac{1}{E' - T_{NA} - T_{iB} + i\eta} t_i^{IA}$$

エネルギーが高く、相互作用する2核子以外の粒子群の影響が無視できると考える。ただし2核子の運動エネルギーの和は全体のエネルギーに一致せず、一般にエネルギー殻外の有効相互作用が必要。(往々にしてオンシェル近似が用いられる。)

# g行列

無限に広がった核物質(密度 $\rho$ )の中での2核子間有効相互作用を、次のベーテ-ゴールドストーン方程式を解いて求める。

$$g(E, \rho) = v + v \frac{\overset{\text{パウリの排他演算子}}{\boxed{Q}}}{\underset{\text{一体ポテンシャル}}{E - K_0 - K_1 - \boxed{U_0} - \boxed{U_1} + i\varepsilon}} g(E, \rho)$$

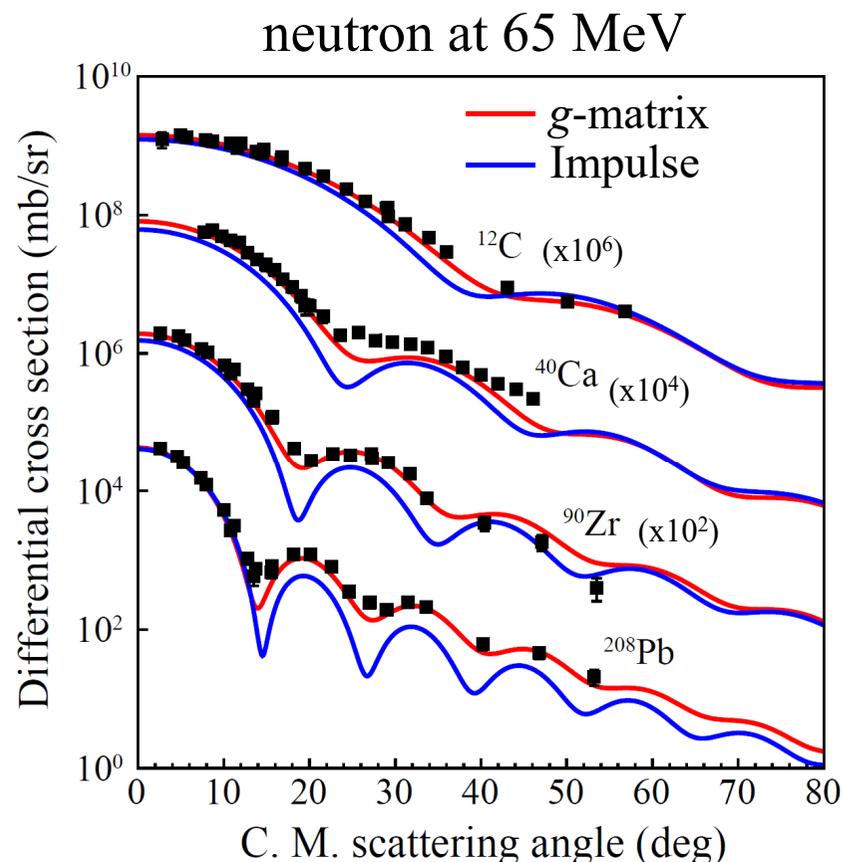
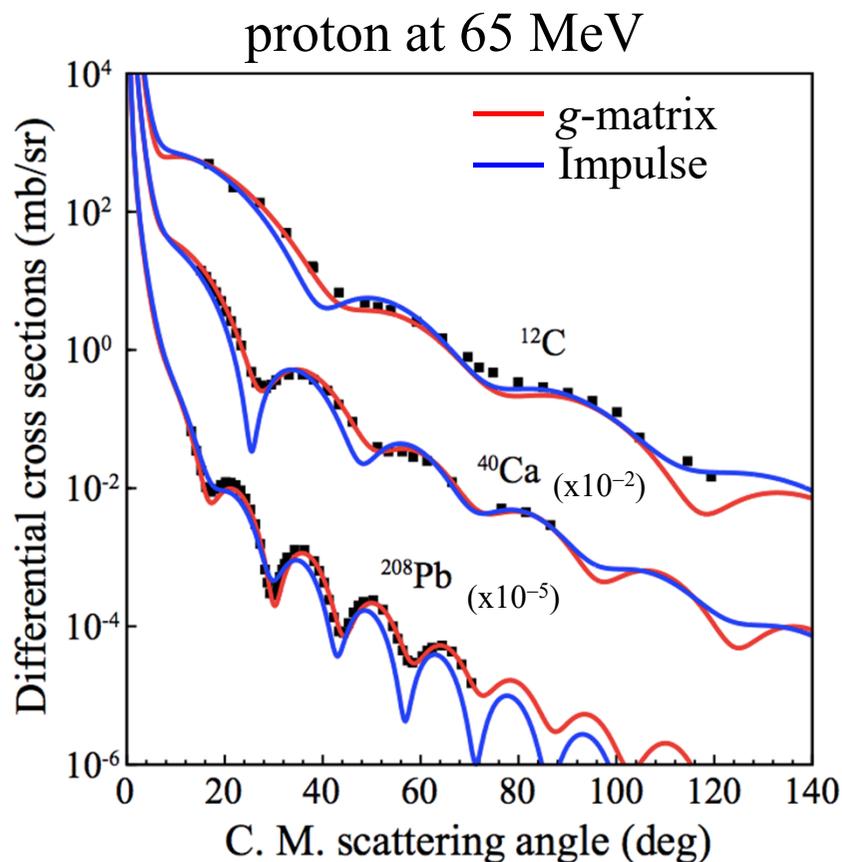
$$U_i = U(\mathbf{k}_i, E_i; \rho) = \sum_{k' \leq \boxed{k_F}} \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{k}' | g(E_i + e') | \mathbf{k}_i, \mathbf{k}' \rangle$$

フェルミ波数( $\propto \rho^{1/3}$ )

$$\equiv V(\mathbf{k}_i, E_i; \rho) + iW(\mathbf{k}_i, E_i; \rho)$$

$$e' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + V(\mathbf{k}', e'; \rho) \quad E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} + V(\mathbf{k}_i, E_i; \rho)$$

# 核子-原子核系の弾性散乱は理論で描け(つつある)

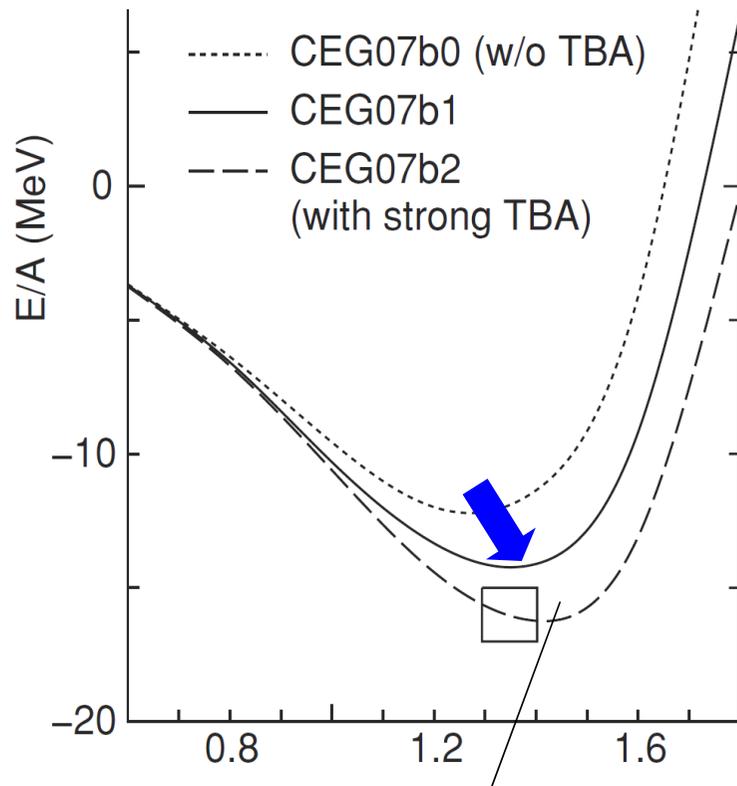


+原子核中での核子間有効相互作用の変化が観測。

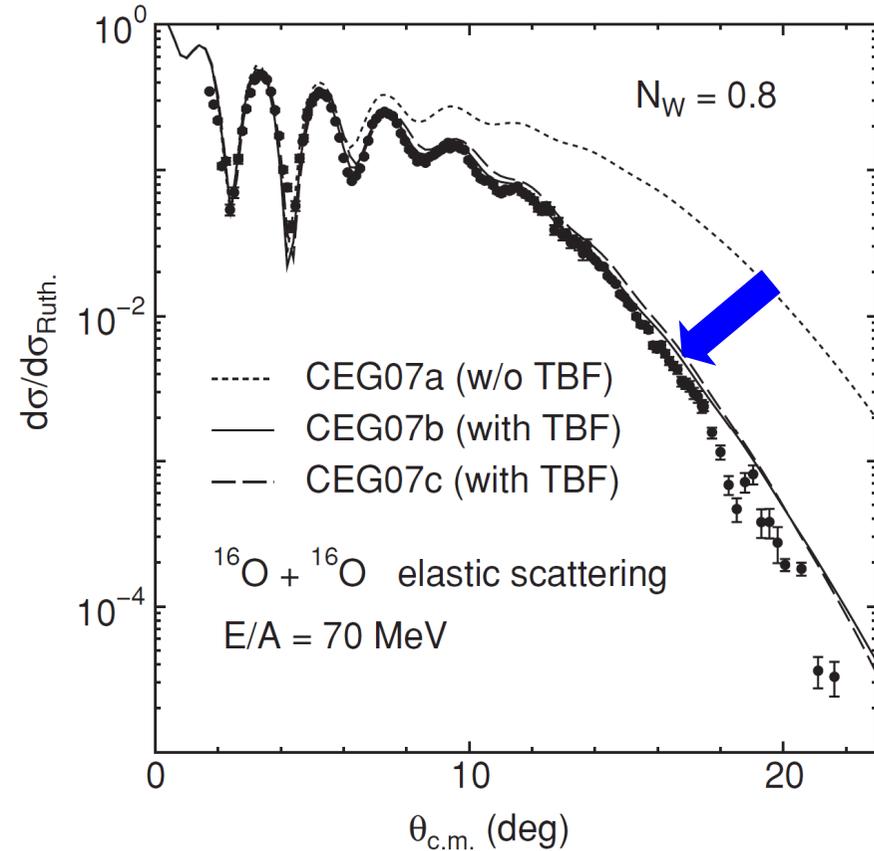
cf. K. Amos+, *Adv. Nucl. Phys.* **25**, 275 (2000).  
T. Furumoto+, *PRC* **78**, 044610 (2008).  
M. Toyokawa+, *PRC* **92**, 024618 (2015).

# 最近の大きな話題: 3体力効果

T. Furumoto, Sakuragi, Yamamoto, *Phys. Rev. C* **80**, 044614 (2009).



Saturation prop. の再現には  
3体力の効果が重要



原子核-原子核反応でプローブ可能

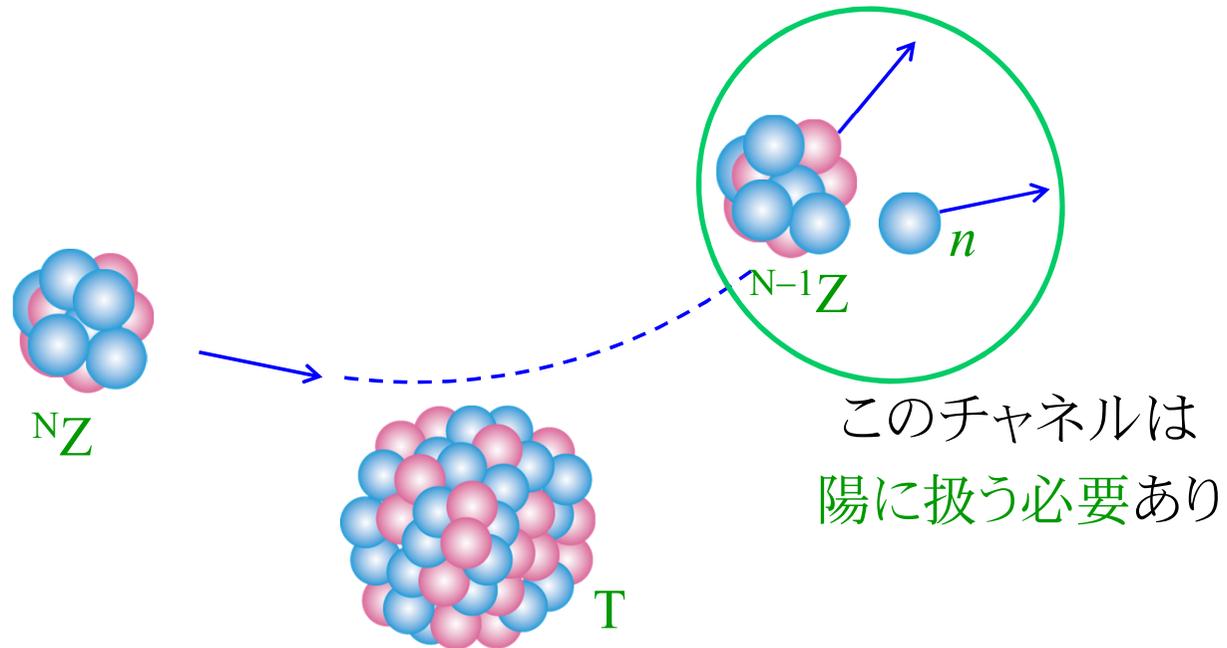
# 多重散乱理論と微視的光学ポテンシャルのまとめ

- 多重散乱理論によれば、2核子間相互作用を無限次くり込んだ有効相互作用の集積として核子-原子核散乱を記述することができる。
- 2核子間相互作用を原子核の密度分布で畳み込むことで、エネルギー依存, 複素, 非局所型一体ポテンシャルが得られる。
- 核内での2核子間有効相互作用は、 $g$ 行列理論によって近似的に得られ、これを用いた微視的光学ポテンシャルは高い成功を収めている。
- 核物質の密度の飽和性を再現するという意味での3体力効果が注目され、原子核反応での観測の可能性が示唆されている。
- (近似の範囲で)核力に正しく立脚した核反応論が構築され、微視的核反応研究は大きな潮流となっている。

## **9. 連続状態離散化チャネル結合法**

**Continuum-Discretized Coupled-  
Channels method; CDCC**

# 弱結合系が入射・分解する反応の記述



弾性チャネル以外の**特定のチャネル**にどのように流束が逃げるか(反応系が遷移するか)を記述しなければならない。

# 分解反応に対する模型空間の設定

見ていないチャンネル  
(標的核の励起・反応系の組み替えなど)

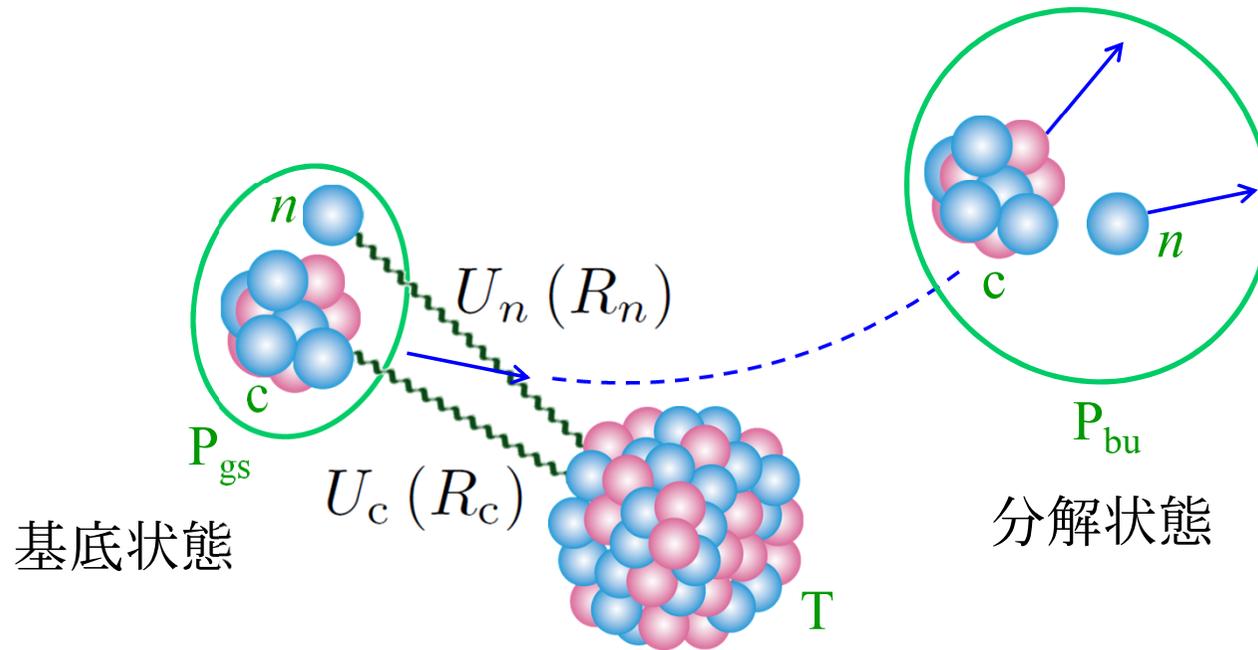
流束の還元

陽に視ているチャンネル  
= 弾性・分解チャンネル

流束の還元

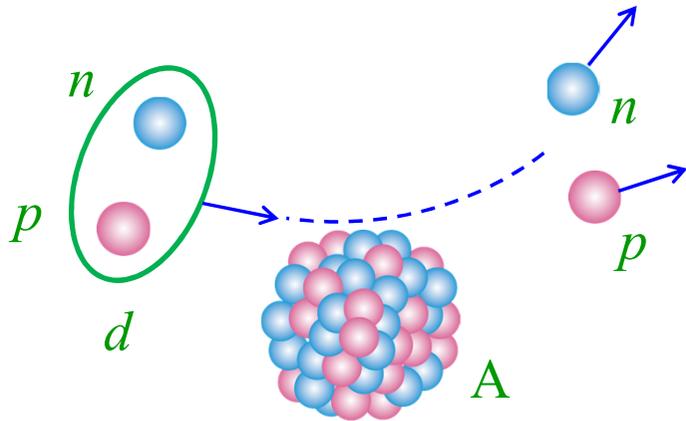
吸収 = 流束の消失

# 分解反応を記述するひとつの(適切な)モデル



これ以降、弱束縛の入射粒子として重陽子を考える。

# Three-body scattering problem



Assumptions for simplicity:

- No spins
- No Coulomb
- No absorption (imaginary pot.)
- 2-body problem solved

Schroedinger Equation

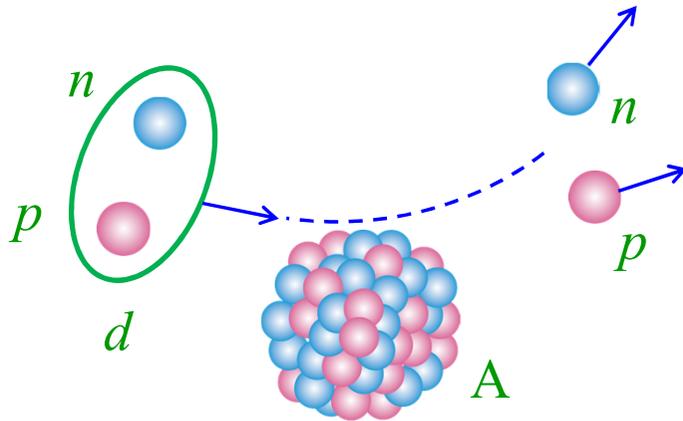
boundary condition (b.c.) not specified

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0.$$

• Solution 1:  $\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \phi_d + \frac{1}{E - H + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \phi_d$

$$= \frac{i\varepsilon}{E - H + i\varepsilon} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \phi_d \equiv \Omega^{(+)} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \phi_d.$$

# Three-body scattering problem



Assumptions for simplicity:

- No spins
- No Coulomb
- No absorption (imaginary pot.)
- 2-body problem solved

Schroedinger Equation

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0.$$

• Solution 2: 
$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \phi_d + \frac{1}{E - \underbrace{(K + V_{pn})}_{\equiv H_d} + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

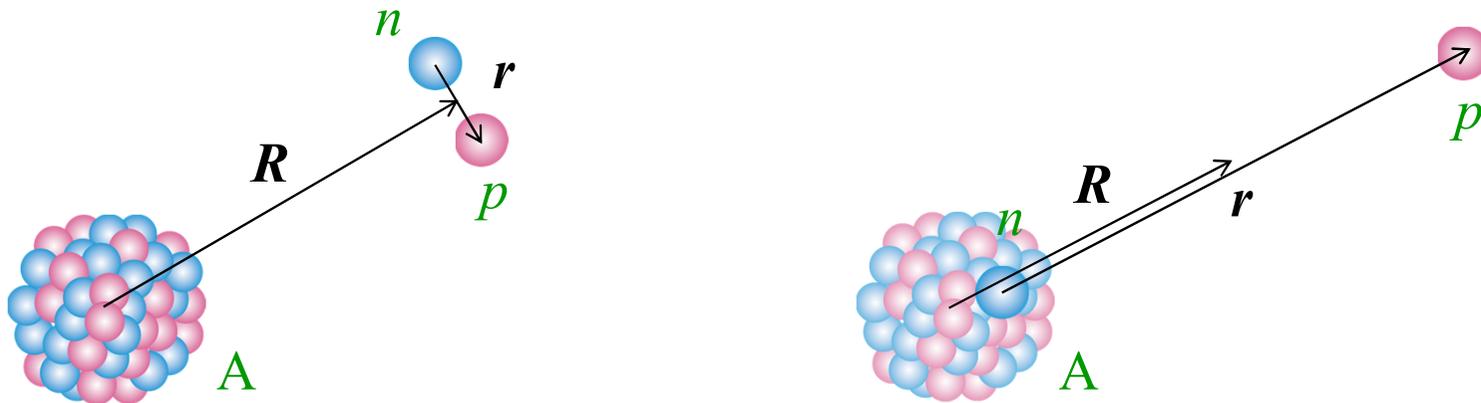
Lippmann-Schwinger (LS) equation

# Problems of the LS equation

$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

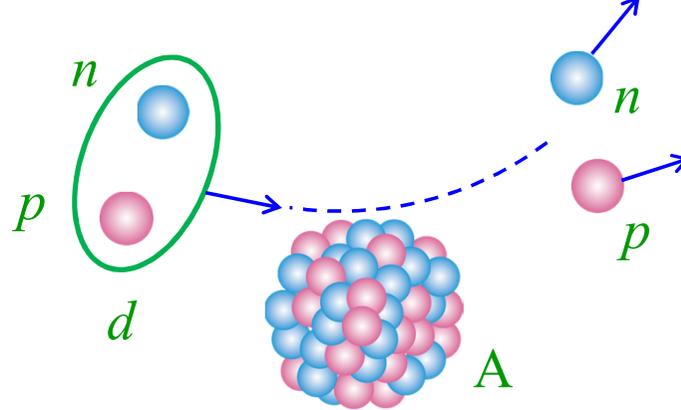
1. Absence of **the rearrangement channels**
2. Divergence problem due to **the disconnected diagram**
3. **Nonuniqueness** of the solution

The b.c. of the LS Eq. is not appropriate.



# The Faddeev theory

*L. D. Faddeev, Zh. Eksp. Theor. Fiz. **39**, 1459 (1960) [Sov. Phys. JETP **12**, 1014 (1961)].*



$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Faddeev Eqs.

$$[E - K - V_{pn}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n),$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = V_{nA} \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = V_{pA} \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

# Three-body theory in a model space

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);*

*N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Faddeev Eqs. not pair int. but 3-body int.

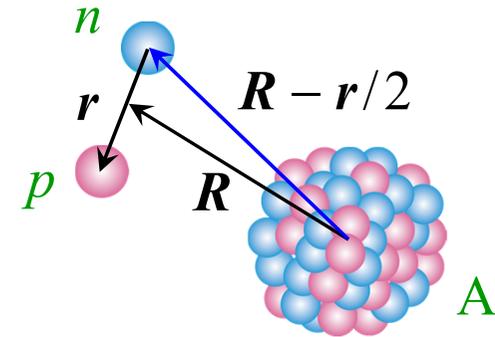
$$[E - K - V_{pn} - \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n),$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = (V_{nA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = (V_{pA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{pA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$$\mathcal{P}_0 e^{-\mu(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)^2} \rightarrow e^{-\mu R^2} e^{-\mu r^2/4}$$

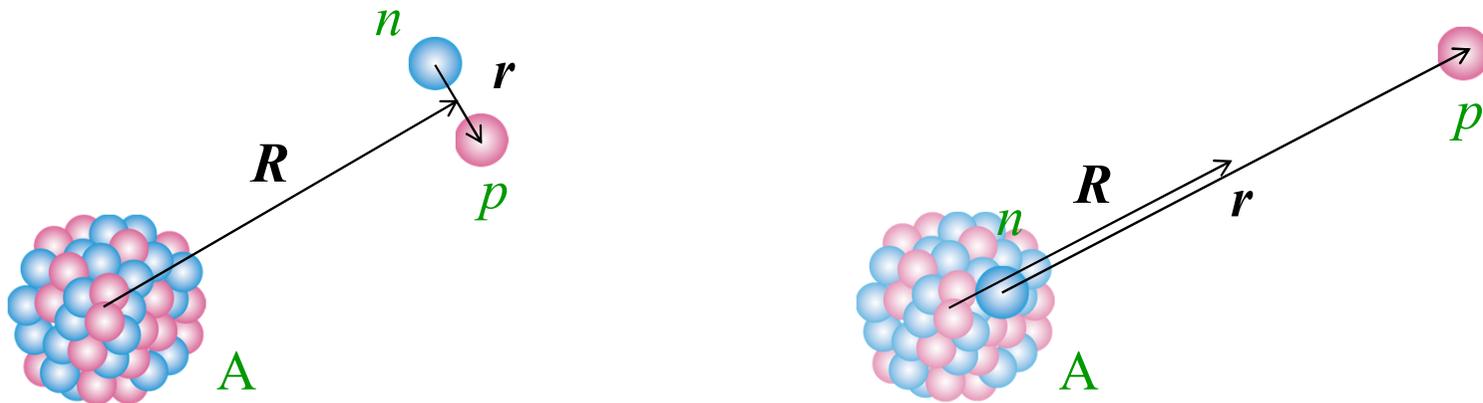


# Problems of the LS equation

$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

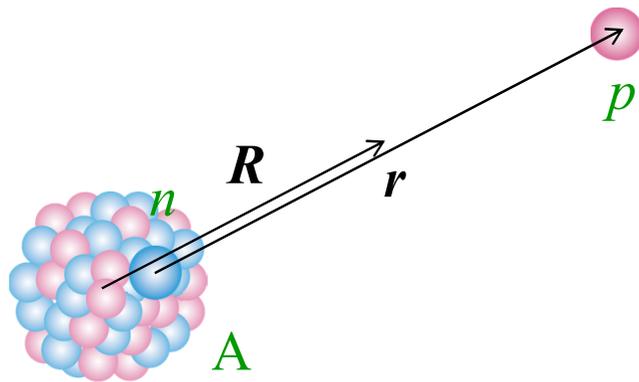
1. Absence of **the rearrangement channels**
- ✓ 2. Divergence problem due to **the disconnected diagram**
- ✓ 3. **Nonuniqueness** of the solution

The b.c. of the LS Eq. is not appropriate.



# $l$ -truncation, the center of CDCC

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);  
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*



$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$\mathcal{P}_{l_{\max}}$  smears out  $\hat{r}$  w/ the resolution of  $1/l_{\max}$ .

[If  $l_{\max} \rightarrow \infty$ , it means  $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ .]

- We have no rearrangement-like channel in the asymptotic region because of  $\mathcal{P}_{l_{\max}}$ .
- As  $l_{\max}$  increases, the coupling between the 1<sup>st</sup> Eq. and the other two becomes weaker.

# Three-body theory in a model space

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);*

*N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Faddeev Eqs.

not pair int. but 3-body int.

→ 0

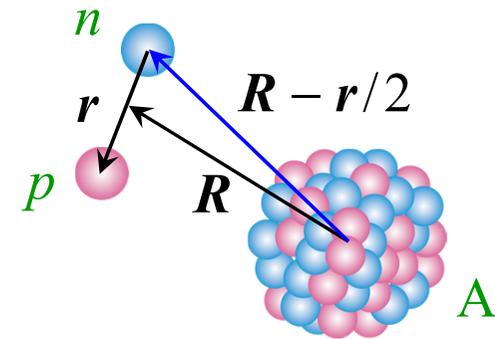
$$[E - K - V_{pn} - \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n)$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = (V_{nA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = (V_{pA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{pA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$$\mathcal{P}_0 e^{-\mu(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)^2} \rightarrow e^{-\mu R^2} e^{-\mu r^2/4}$$



# CDCC, as an alternative to the Faddeev theory

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);  
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*

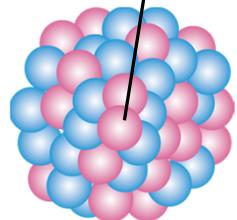
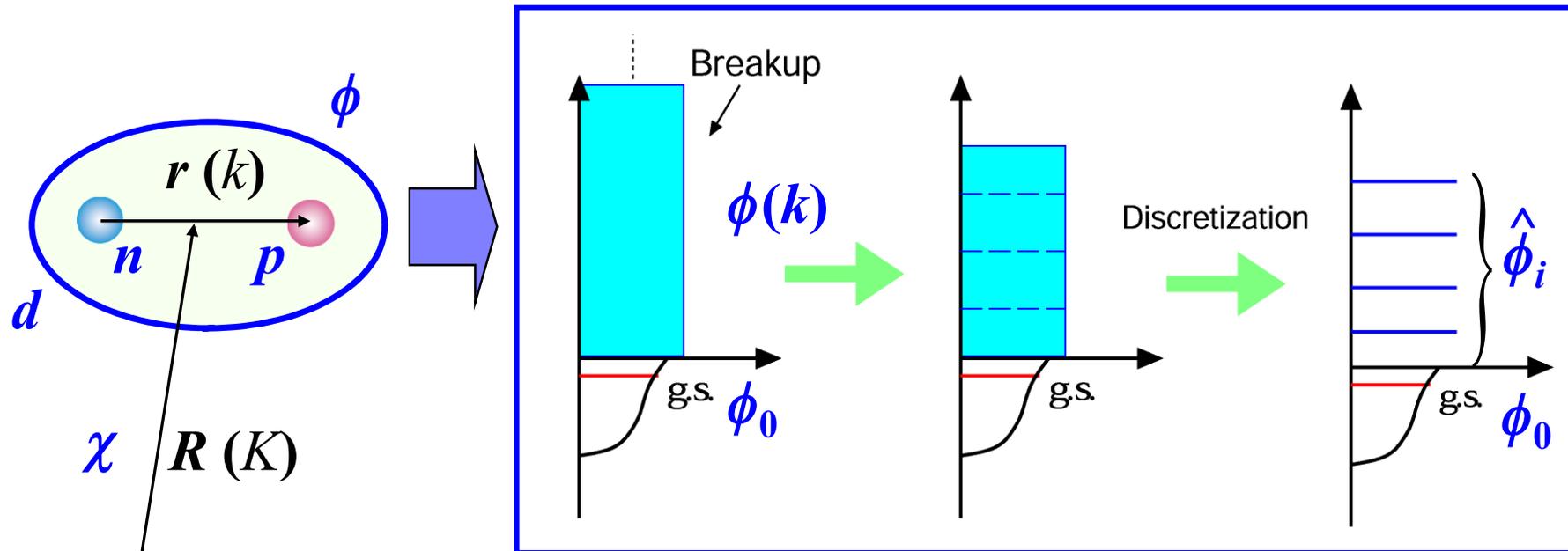
CDCC solves the following LS eq.:

$$\Psi^{\text{CDCC}} = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}} \Psi^{\text{CDCC}}.$$

CDCC gives a proper solution to a three-body scattering problem *if* the solution converges w/ respect to  $l$ .

- Continuum-Discretization has nothing to do w/ the justification of CDCC.
- $l$ -truncation allows one to truncate also  $r$  and  $k$ .
- Convergence for other quantities ( $r_{\max}$ ,  $k_{\max}$ , and  $\Delta k$ , etc.) must be confirmed to obtain a proper solution to the LS Eq.

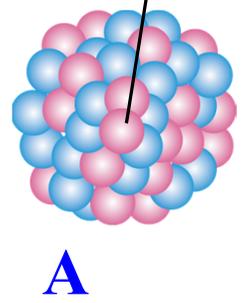
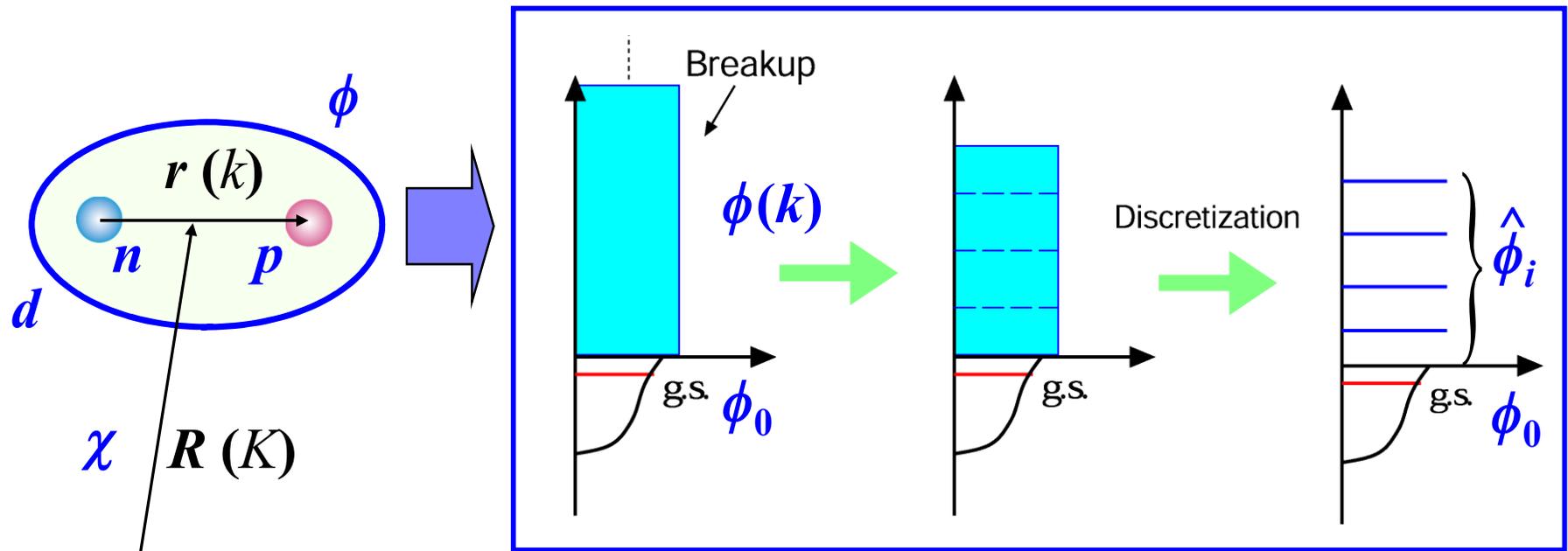
# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



**A**

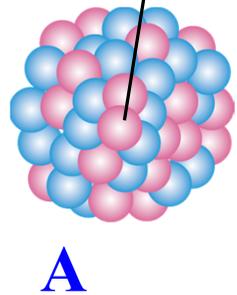
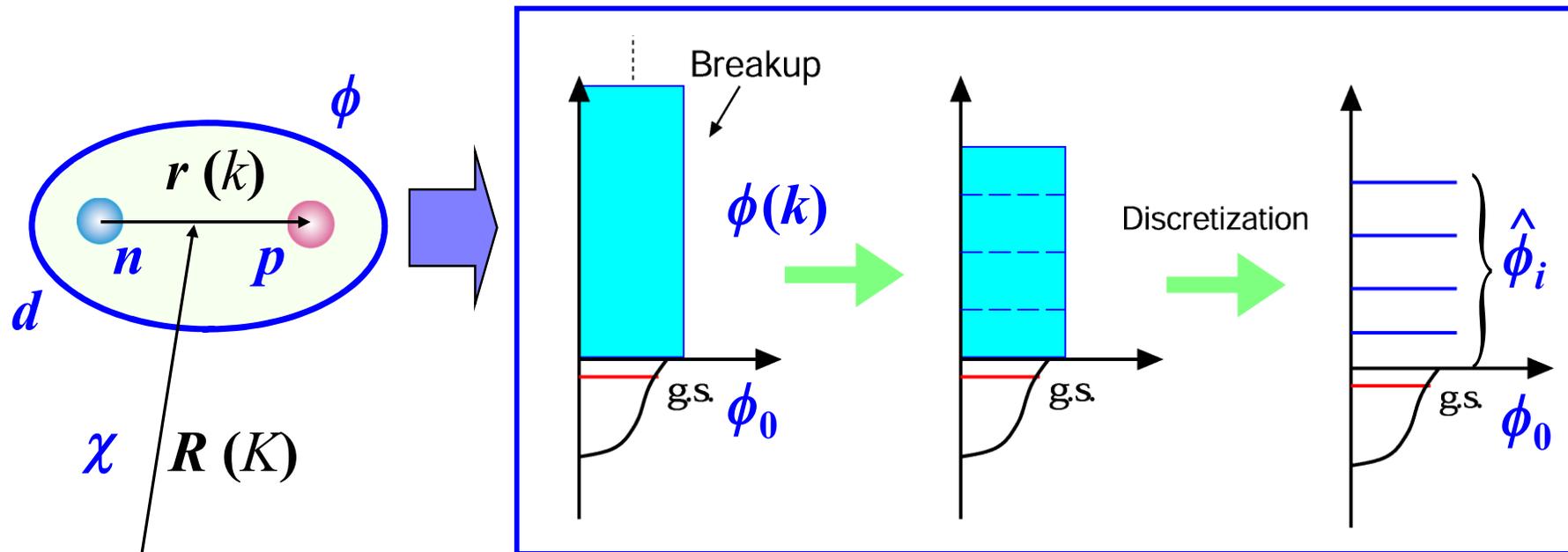
$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(k_0, \vec{r})\chi_0(K_0, \vec{R}) + \int_0^\infty \phi(k, \vec{r})\chi(K, \vec{R})dk$$

# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(k_0, \vec{r})\chi_0(K_0, \vec{R}) + \int_0^\infty \phi(k, \vec{r})\chi(K, \vec{R})dk$$

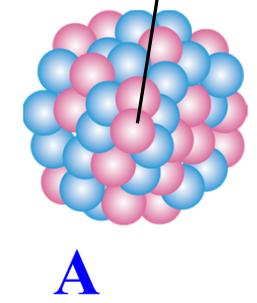
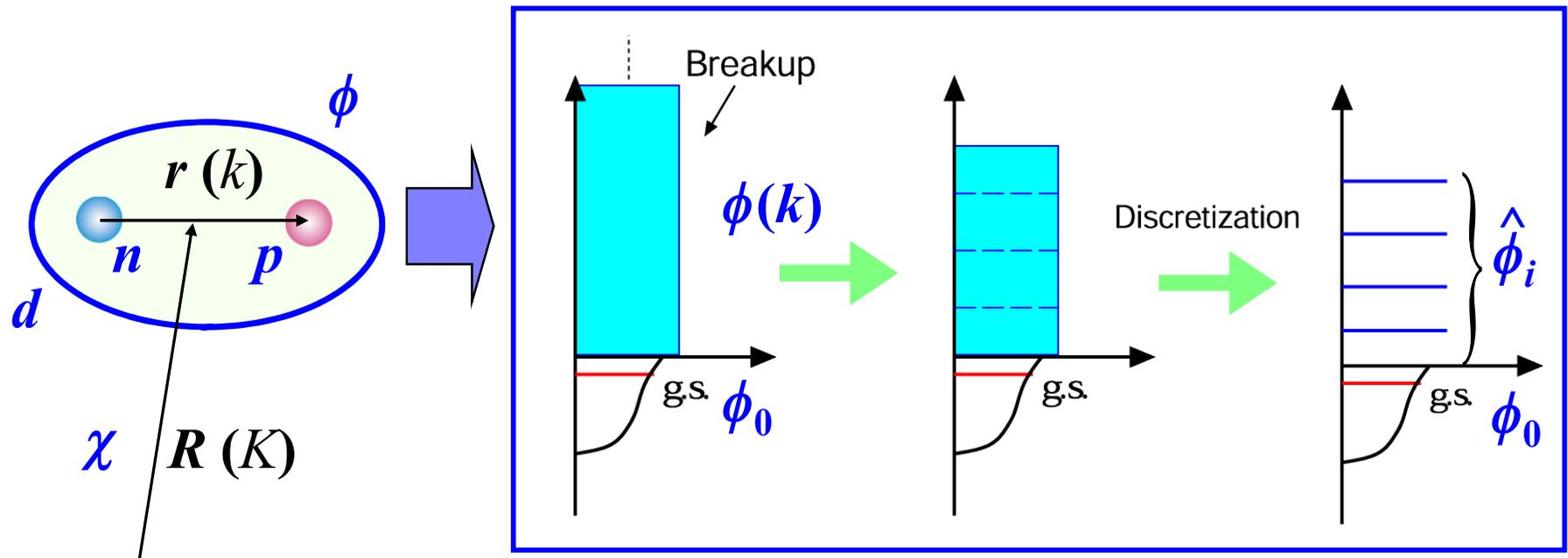
# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \int_0^\infty \phi(k, \vec{r}) \chi(K, \vec{R}) dk$$

**k-truncation**

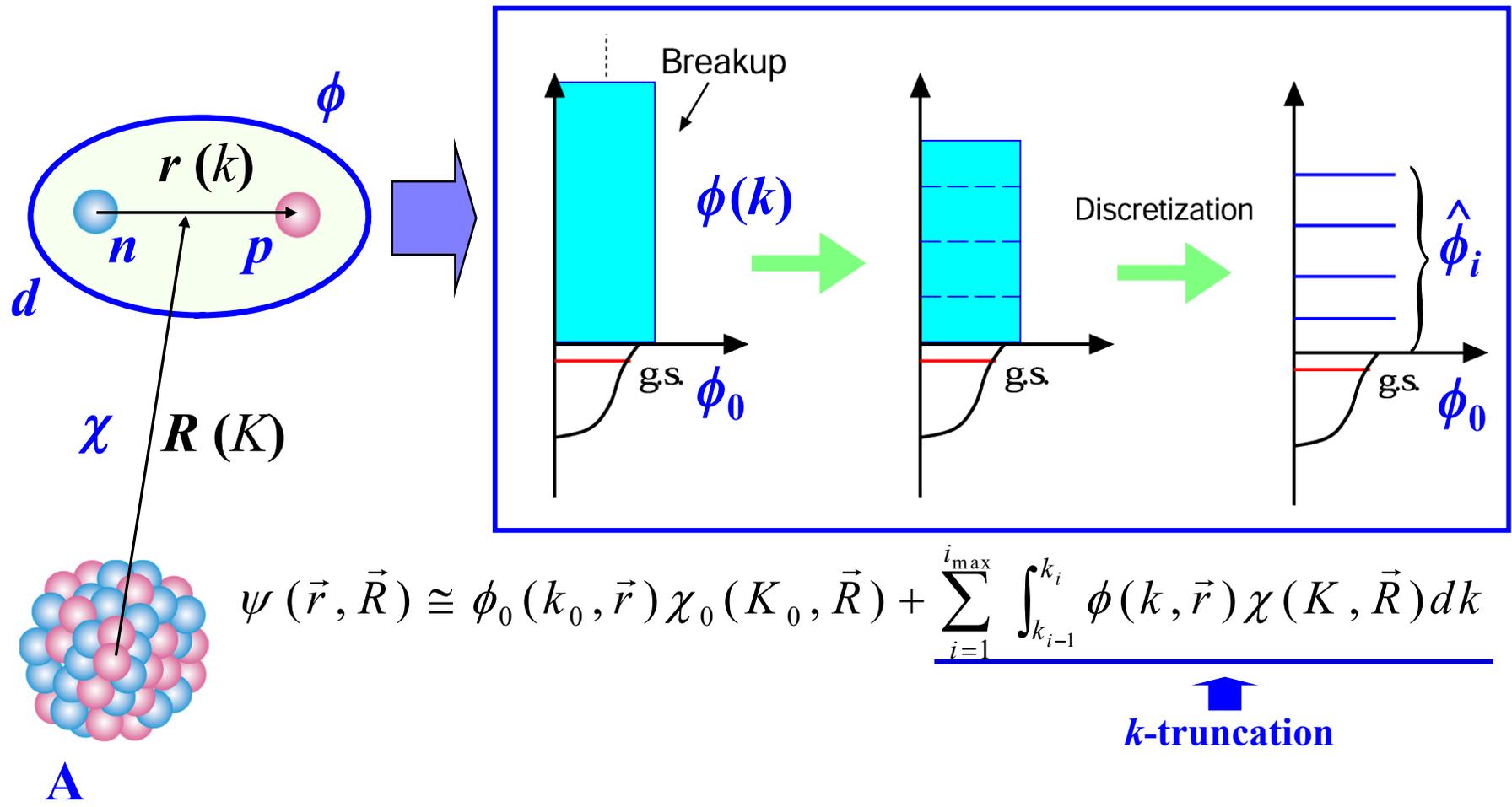
# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



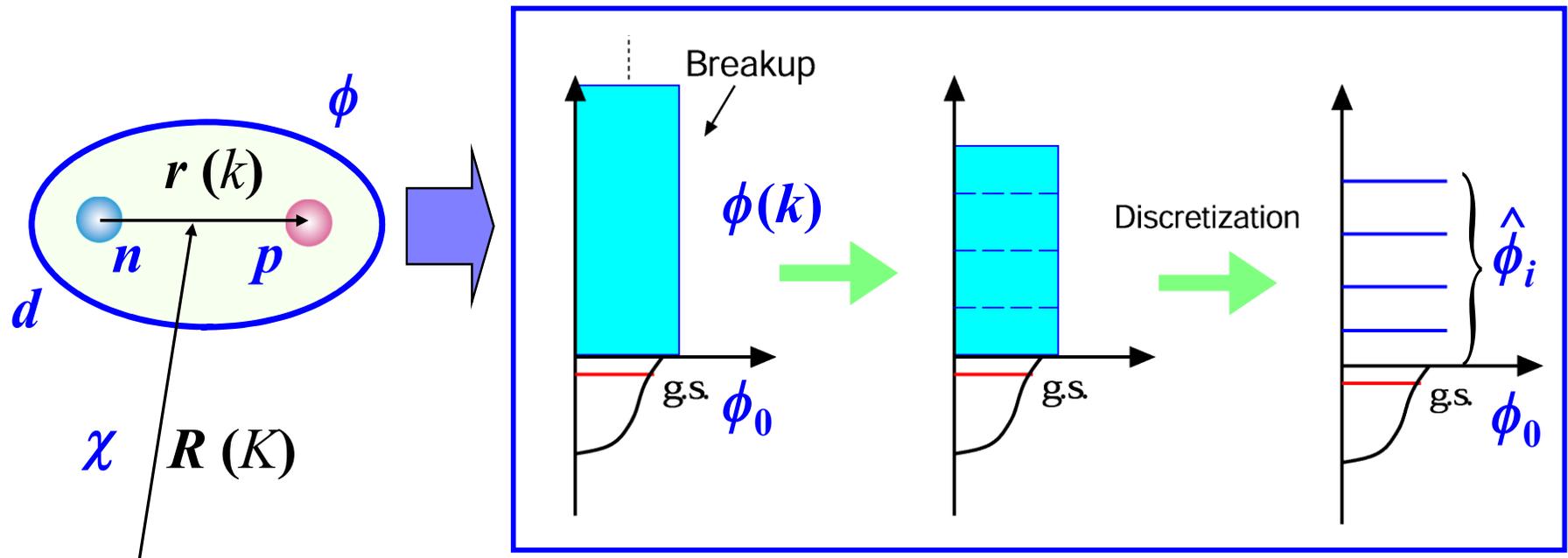
$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \int_0^{k_{\max}} \phi(k, \vec{r}) \chi(K, \vec{R}) dk$$

**k-truncation**

# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



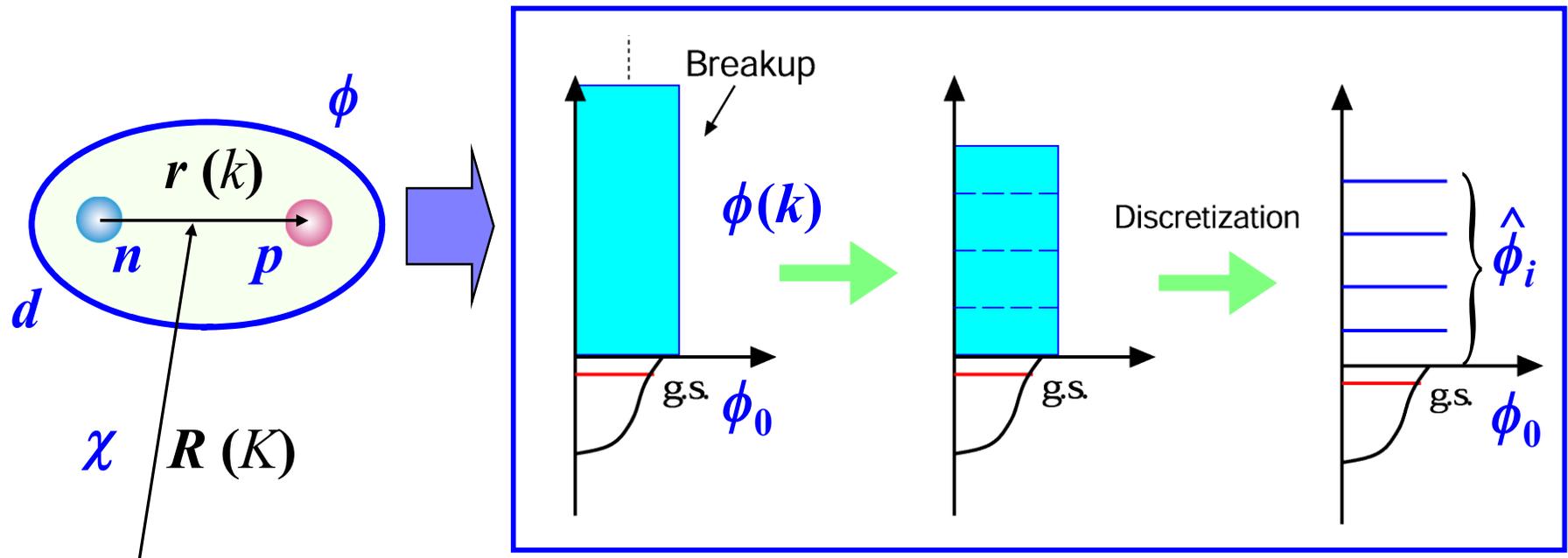
# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \hat{\chi}(\hat{K}_i, \vec{R}) \int_{k_{i-1}}^{k_i} \phi(k, \vec{r}) dk}_{k\text{-truncation and discretization}}$$

A

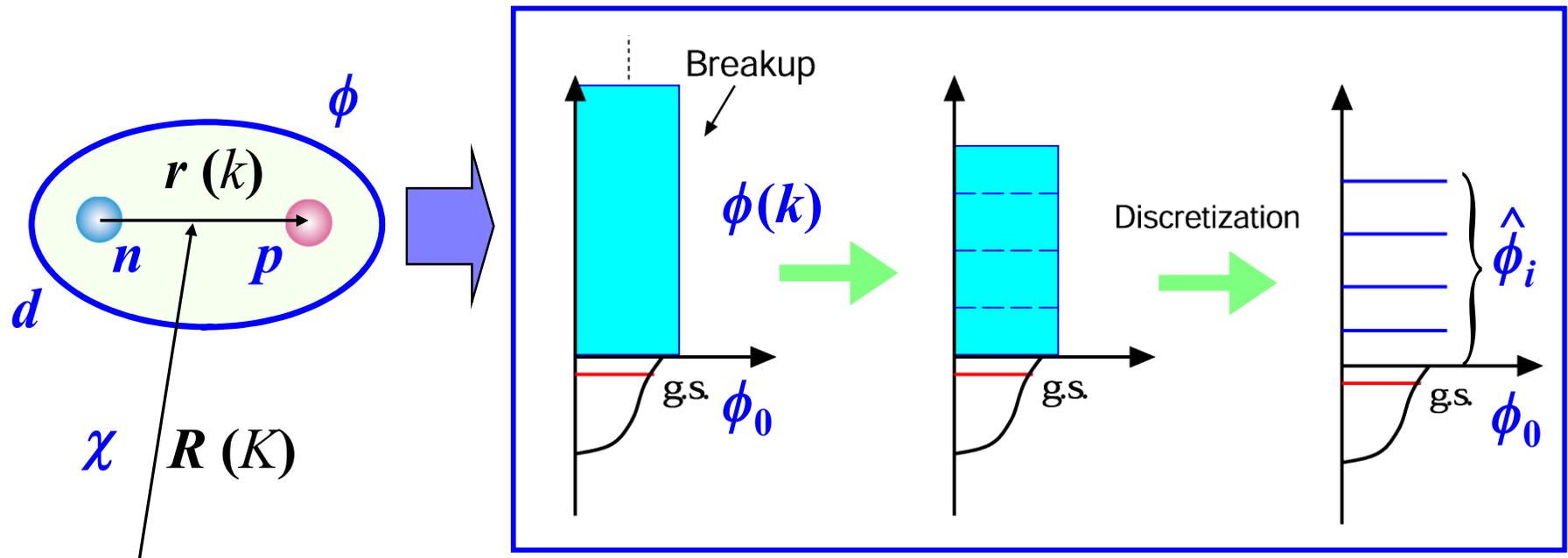
# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \hat{\chi}(\hat{K}_i, \vec{R}) \int_{k_{i-1}}^{k_i} \phi(k, \vec{r}) dk}_{k\text{-truncation and discretization}}$

$\psi^{\text{CDCC}}(\vec{r}, \vec{R}) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \hat{\phi}_i(\vec{r}) \hat{\chi}_i(\hat{K}_i, \vec{R})$

# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)

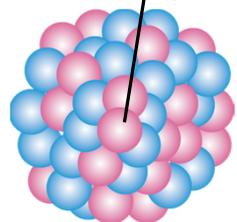
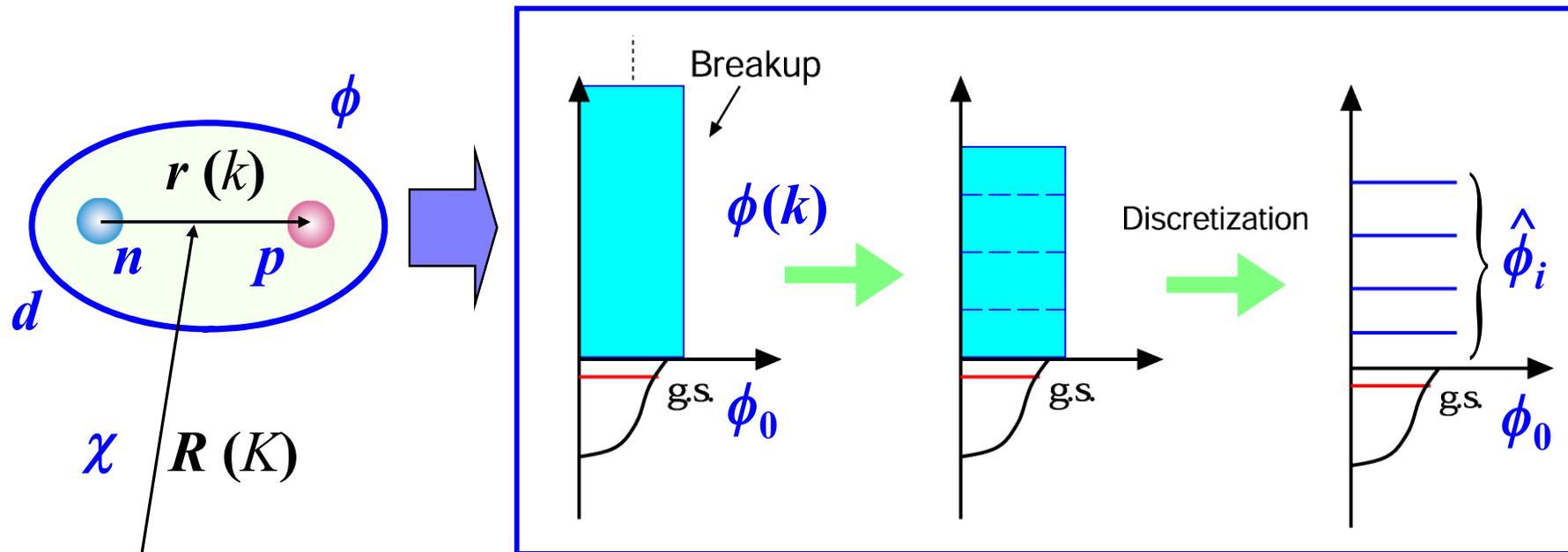


$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) \cong \phi_0(k_0, \vec{r}) \chi_0(K_0, \vec{R}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \hat{\chi}(\hat{K}_i, \vec{R}) \int_{k_{i-1}}^{k_i} \phi(k, \vec{r}) dk}_{k\text{-truncation and discretization}}$$

$$\psi^{\text{CDCC}}(\vec{r}, \vec{R}) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \hat{\phi}_i(\vec{r}) \hat{\chi}_i(\hat{K}_i, \vec{R})$$

standard b.c.

# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



**A**

$$\psi = \phi_0 \chi_0 + \int_0^\infty \phi_k \chi_k dk \quad \Rightarrow \quad \psi^{\text{CDCC}} = \sum_i^{i_{\max}} \hat{\phi}_i \hat{\chi}_i$$

cf. M. Kamimura, Yahiro, Iseri, Sakuragi, Kameyama, and Kawai, *PTP Suppl.* **89**, 1 (1986);  
 N. Austern, Iseri, Kamimura, Kawai, Rawitscher, and Yahiro, *Phys. Rep.* **154** (1987) 126;  
 M. Yahiro, Ogata, Matsumoto, and Minomo, *PTEP* **2012**, 01A206 (2012).

# Faddeev-AGS vs. CDCC

*N. J. Upadhyay, A. Deltuva, F. M. Nunes, PRC 85, 054621 (2012).*

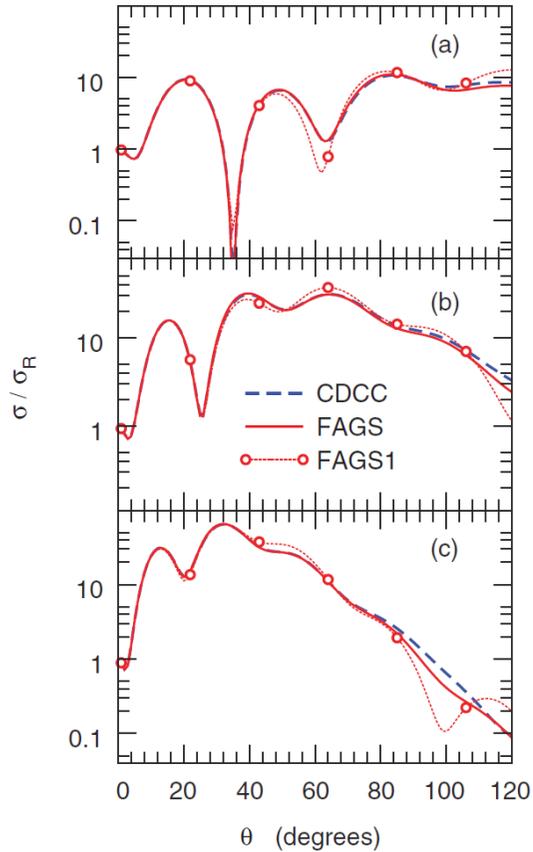


FIG. 2. (Color online) Elastic cross section for  $d+^{10}\text{Be}$ : (a)  $E_d = 21.4$  MeV, (b)  $E_d = 40.9$  MeV, and (c)  $E_d = 71$  MeV.

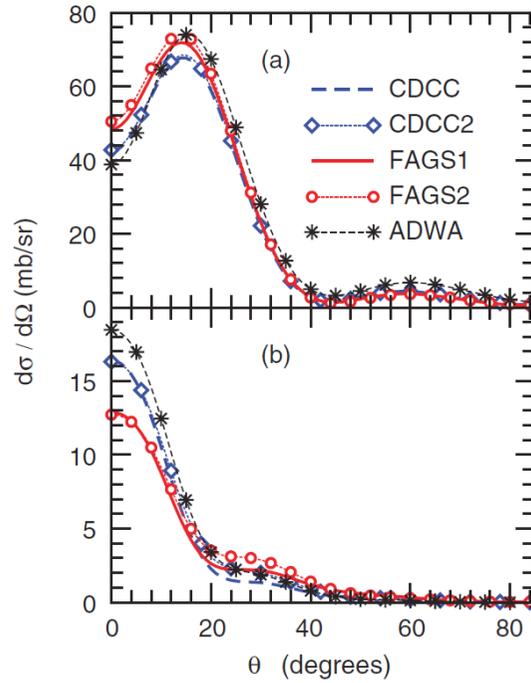


FIG. 6. (Color online) Angular distribution for  $^{12}\text{C}(d, p)^{13}\text{C}$ : (a)  $E_d = 12$  MeV and (b)  $E_d = 56$  MeV.

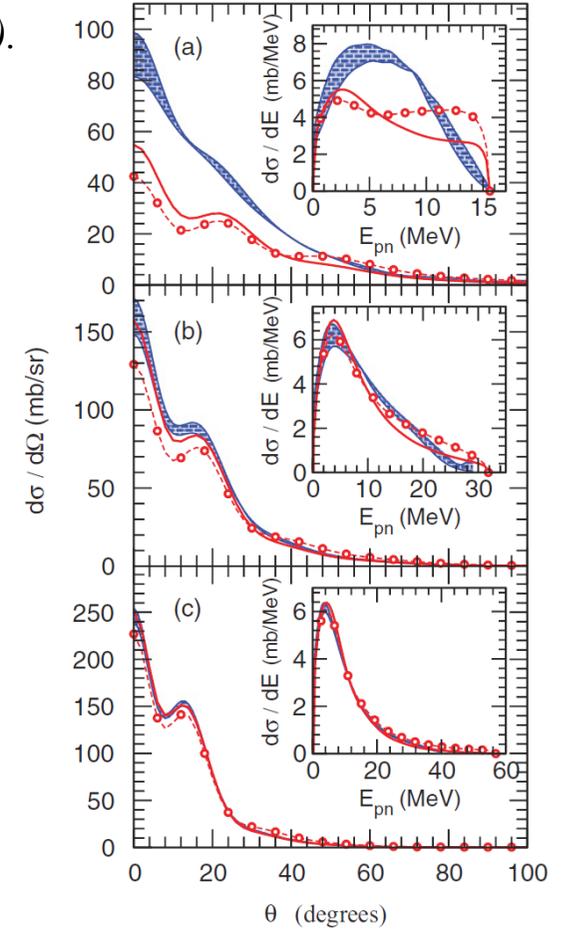
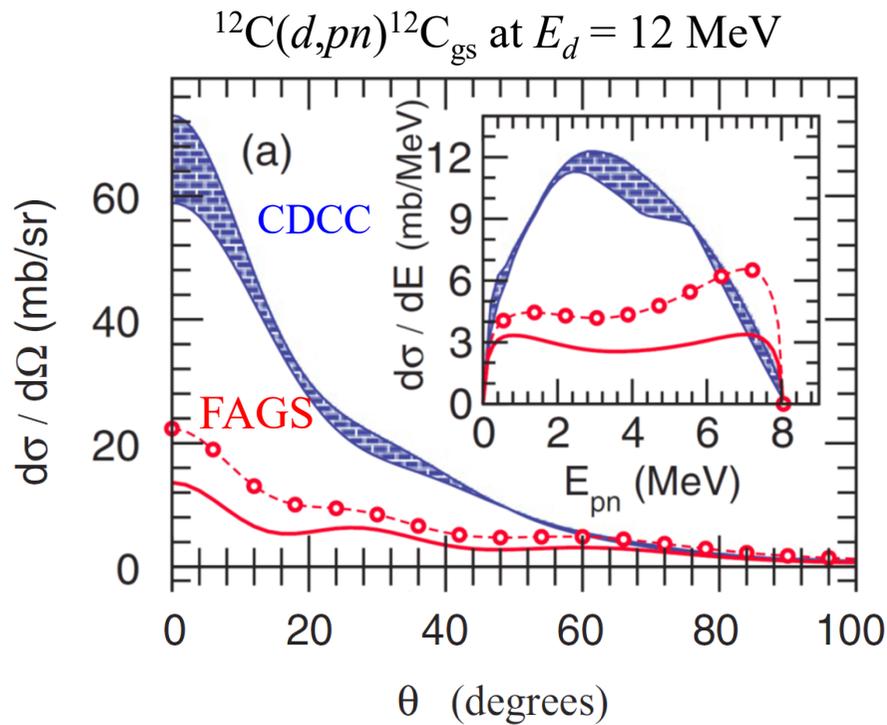


FIG. 8. (Color online) Breakup distributions for the  $^{10}\text{Be}(d, pn)^{10}\text{Be}$  reaction at (a)  $E_d = 21$  MeV, (b)  $E_d = 40.9$  MeV, and (c)  $E_d = 71$  MeV. Results for CDCC (hatched band), FAGS (solid), and FAGS1 (circles).

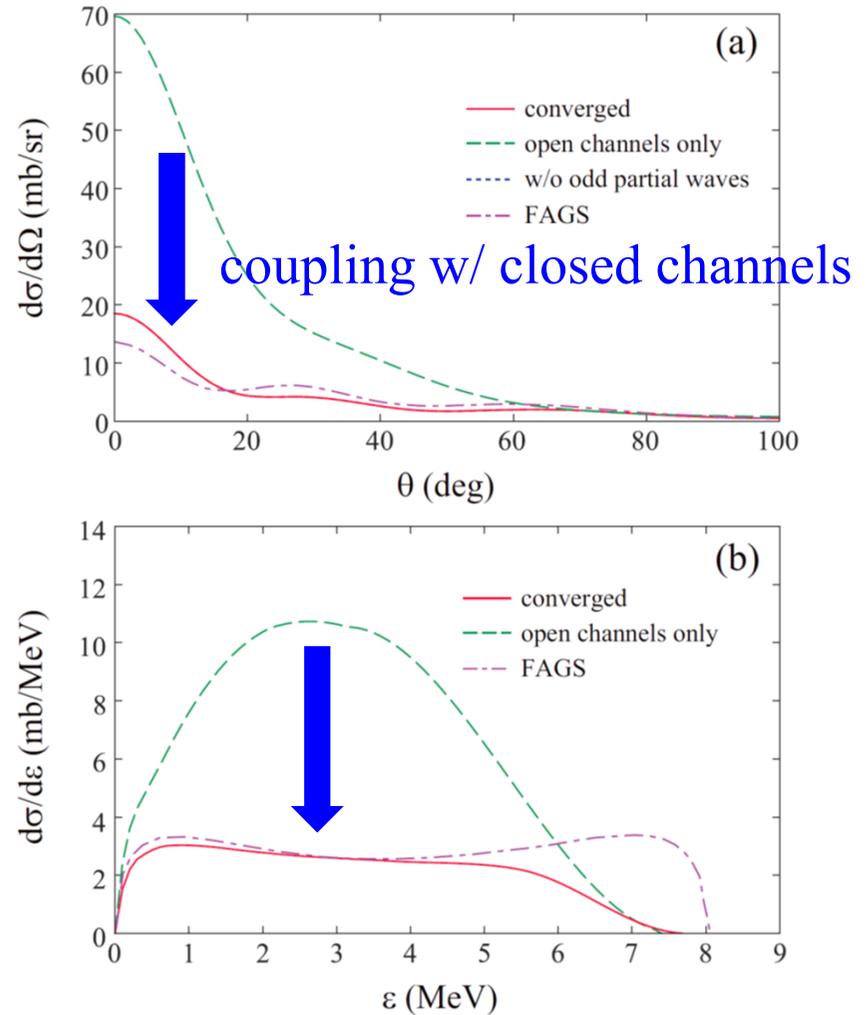
# Applicability of CDCC to low energy BU process

*N. J. Upadhyay et al., PRC 85, 054621 (2012).*

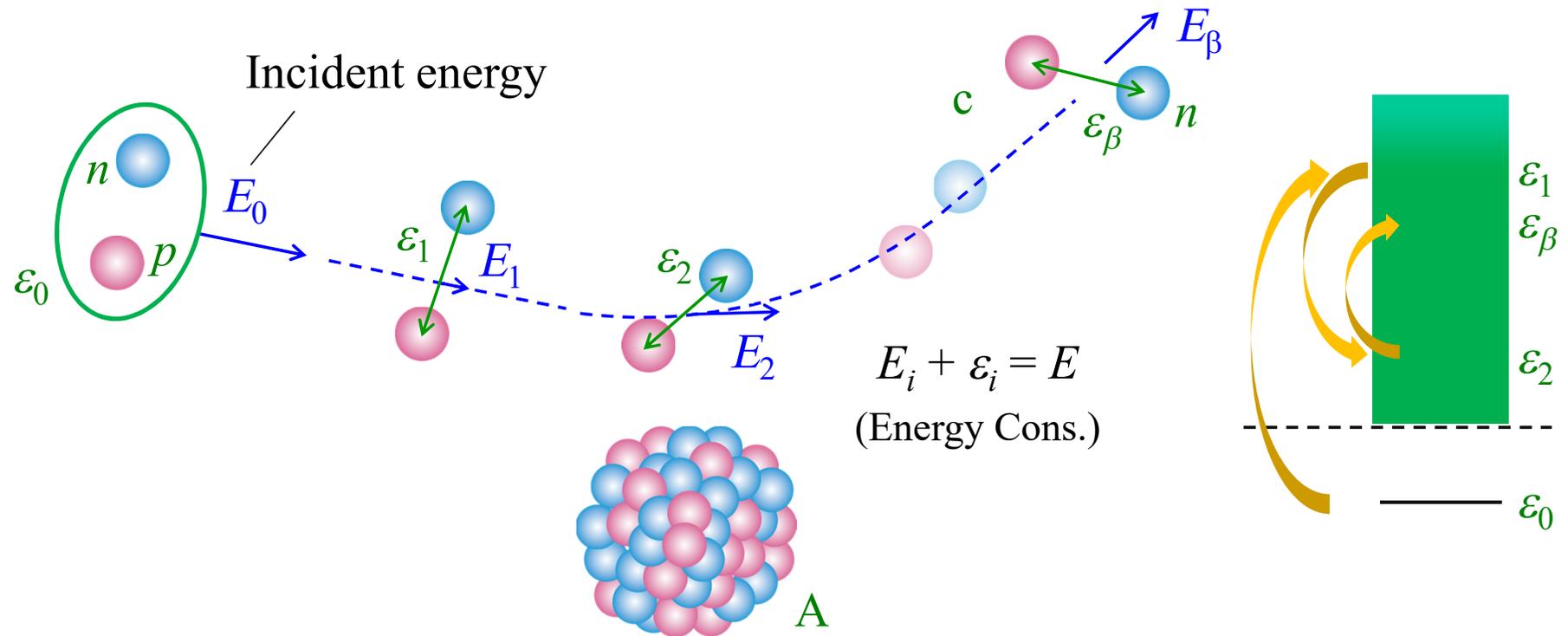


CDCC severely overshoots the result of FAGS.

*KO and K. Yoshida, PRC 94, 051603(R) (2016).*



# Description of deuteron breakup process by CDCC

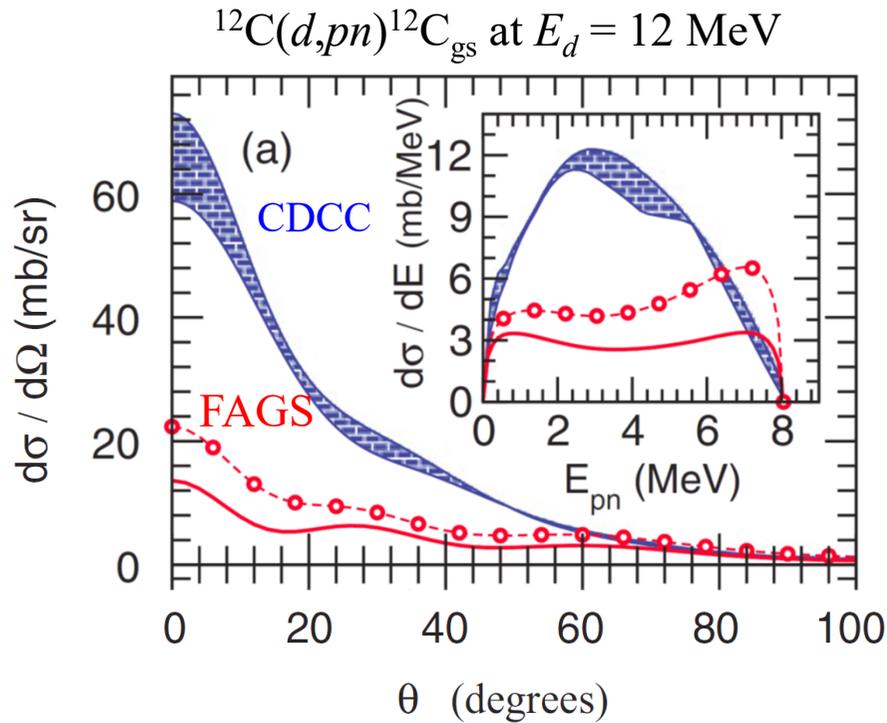


- Open channels ( $E_i > 0$ ): directly connected to observables
- Closed channels ( $E_i < 0$ ): virtual breakup channels

Neglected in the preceding study

# Applicability of CDCC to low energy BU process

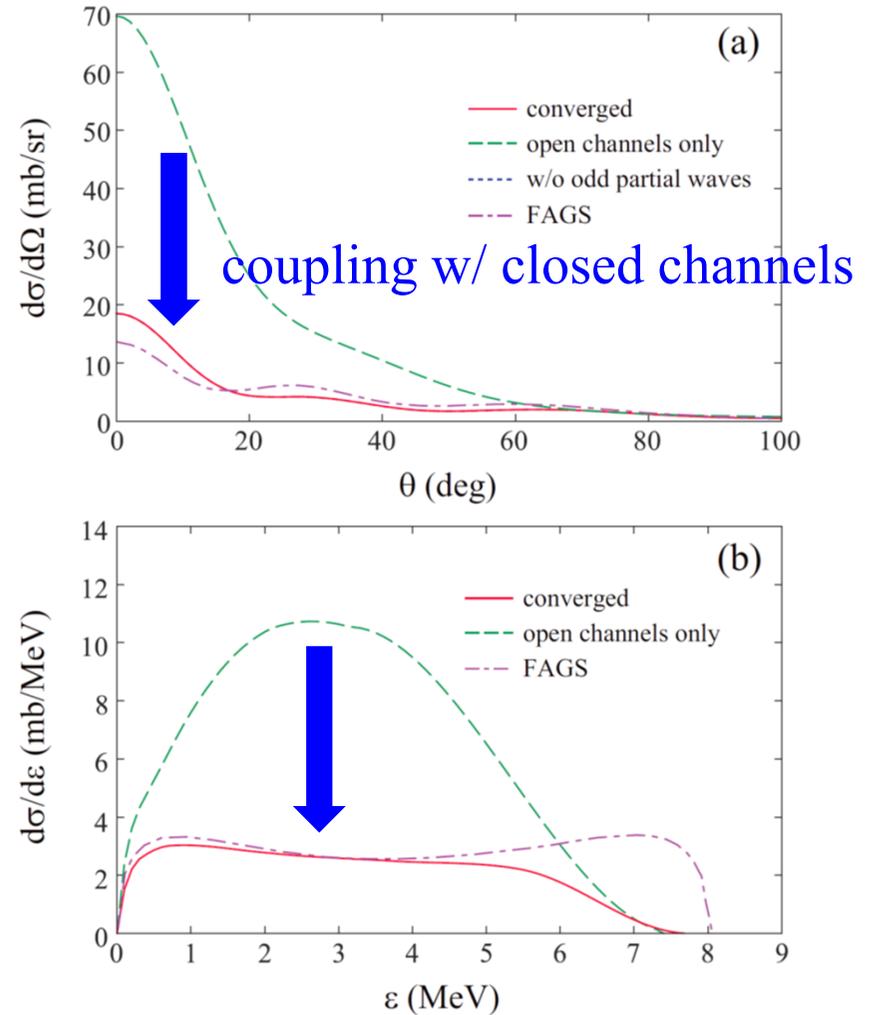
N. J. Upadhyay et al., PRC 85, 054621 (2012).



CDCC severely overshoots the result of FAGS, if closed-channels are neglected.

*cf. triple-alpha study*

KO and K. Yoshida, PRC 94, 051603(R) (2016).



# 連続状態の離散化の方法I (average法)

散乱波動関数を波数幅  $\Delta k$  にわたって積分する。自由波の場合は

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{l,i}^{\text{free}}(r) &\equiv \int_{k_i}^{k_i+\Delta k} \varphi_l^{\text{free}}(k, r) dk = \int_{k_i}^{k_i+\Delta k} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) dk \\ &= \frac{-1}{r} \left( \cos\left[(k_i + \Delta k)r - \frac{l\pi}{2}\right] - \cos\left[k_i r - \frac{l\pi}{2}\right] \right)\end{aligned}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

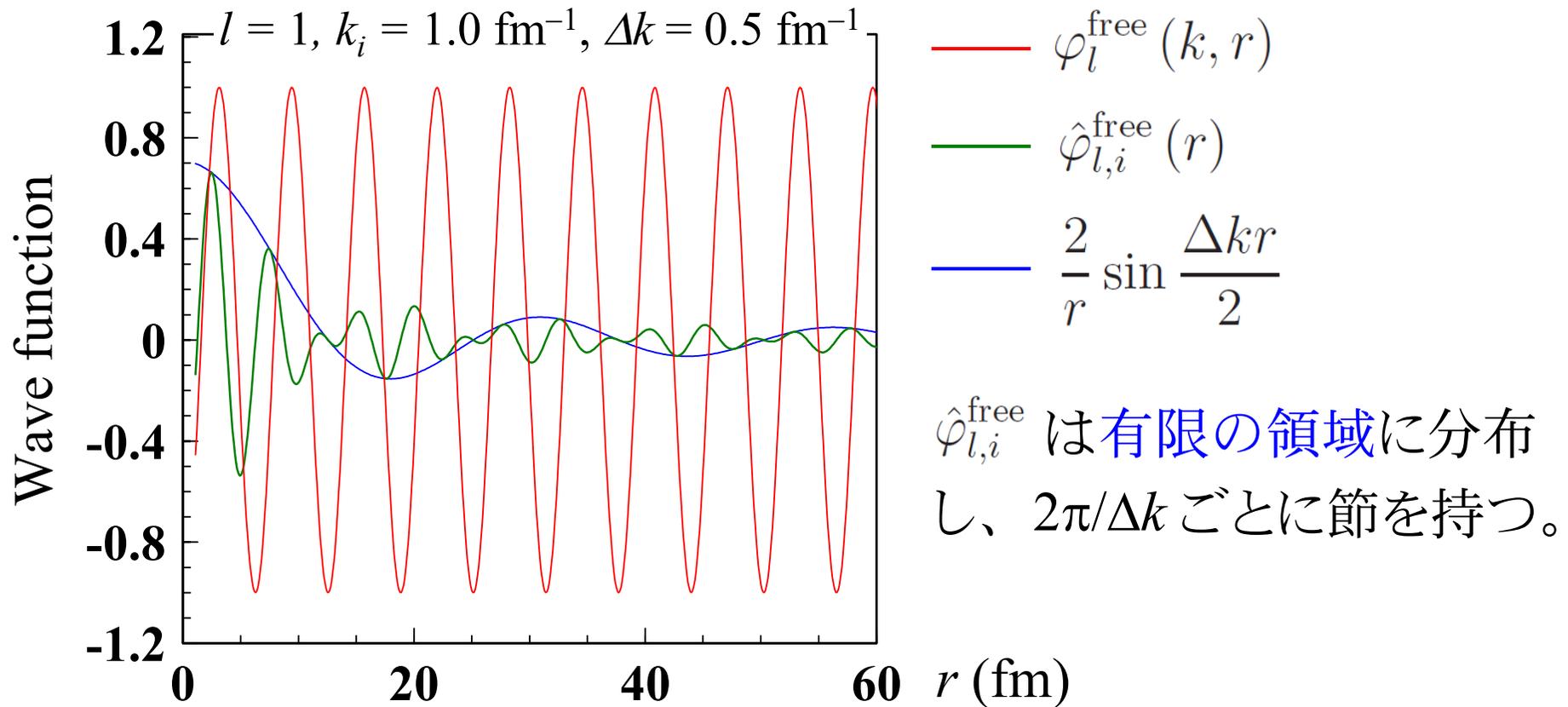
減衰因子

付加的な振動因子

$$\hat{\varphi}_{l,i}^{\text{free}}(r) = \left[ \frac{2}{r} \right] \sin\left(\left[ k_i + \frac{\Delta k}{2} \right] r - \frac{l\pi}{2}\right) \left[ \sin \frac{\Delta k r}{2} \right]$$

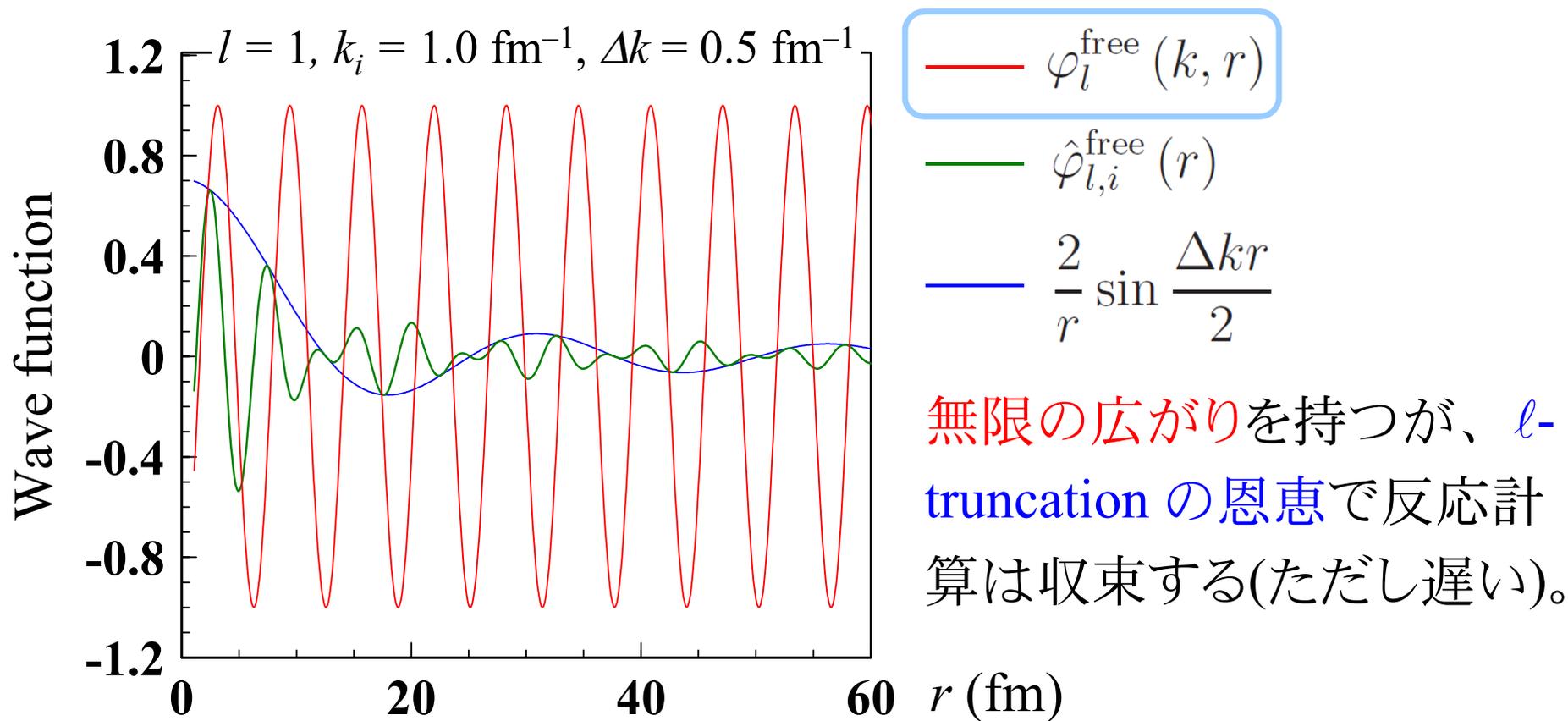
# 離散化された連続状態のふるまい

$$\hat{\varphi}_{l,i}^{\text{free}}(r) = \sin \left( \left[ k_i + \frac{\Delta k}{2} \right] r - \frac{l\pi}{2} \right) \frac{2}{r} \sin \frac{\Delta k r}{2}$$



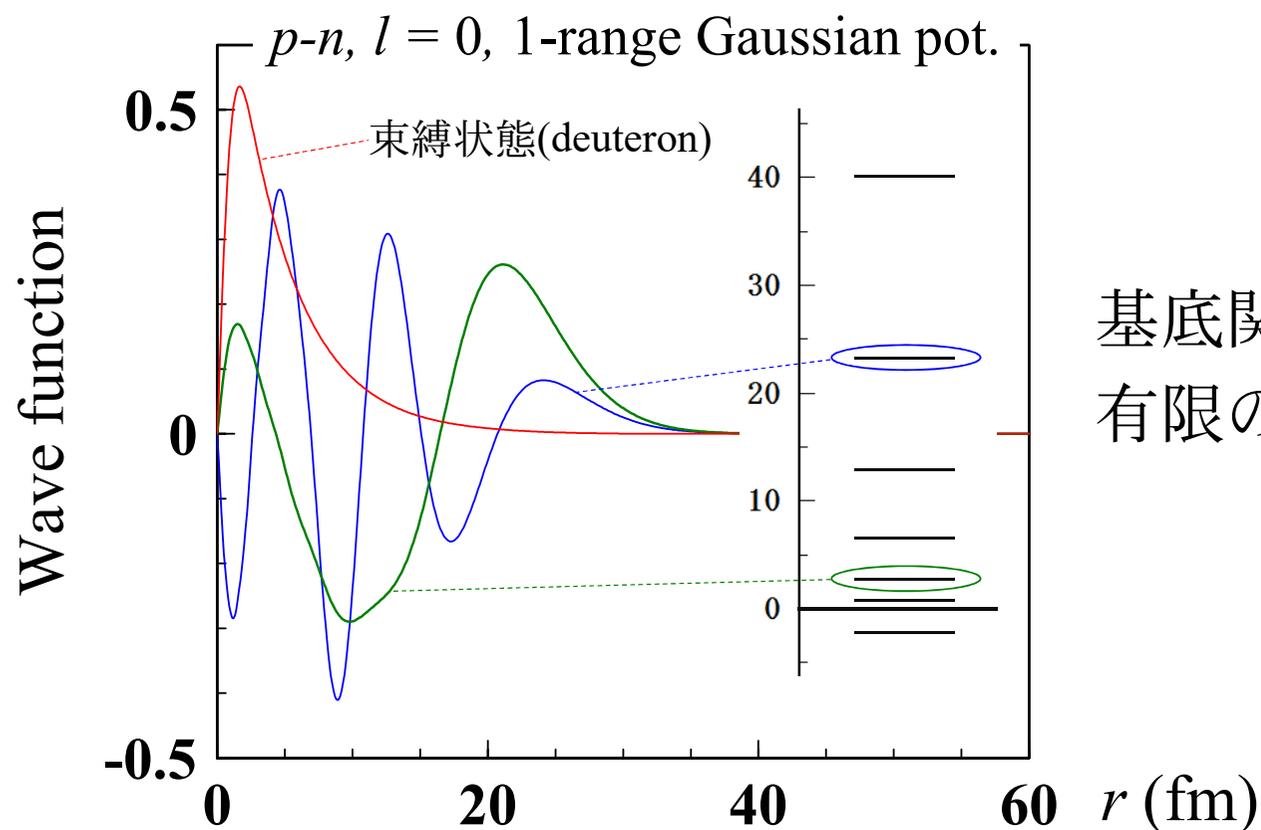
# 連続状態の離散化の方法II (midpoint法)

$k = k_i + \Delta k/2$  における散乱波動関数をそのまま採用する。



# 連続状態の離散化の方法III (pseudostate法)

入射粒子の内部ハミルトニアンを基底関数で対角化し、得られた擬状態(閾値よりも上の状態)を離散化された連続状態とみなす。



基底関数の広がりに応じた有限の空間に分布する。

# 離散化の手法の比較

- 3つの手法は、弾性散乱断面積・全分解断面積について完全に同じ結果を与えることが確認されている。

※全分解断面積:  $i = 1-i_{\max}$  のチャンネルに遷移(分解)する断面積の和

- Mid法はCDCCCの正当性にとっては重要だが、実際の計算では、収束が速く、状態のコントロールが容易なAv法が便利。  
→ 標準的な手法として広く普及

- PS法は最も初期に開発されたが、CDCCCで得られる離散的な結果を連続化する処方がなく、長く利用されていなかった。

※Av法では、幅  $\Delta k$  の連続状態を等重で束ねた状態への遷移

を考えているので、 $S_0(k) \sim \frac{S_{i0}}{\sqrt{\Delta k}}$  とすれば良い。

# 離散的な結果の連続化(平滑化)

簡単のため、 $k_\beta$ の大きさのみを指定した観測量を考える:

$$T_{\beta\alpha} \sim \langle \phi_{k_\beta} e^{i\mathbf{K}_\beta \cdot \mathbf{R}} | U_n + U_p | \Psi_\alpha^{\text{CDCC}} \rangle$$

$$\mathcal{P} \equiv \sum_{i=0}^{i_{\max}} |\hat{\phi}_i\rangle \langle \hat{\phi}_i| \sim 1$$

CDCCで求めた*i*チャンネルへの遷移行列

$$\sim \sum_{i=0}^{i_{\max}} \langle \phi_{k_\beta} | \hat{\phi}_i \rangle \langle \hat{\phi}_i e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}} | U_n + U_p | \Psi_\alpha^{\text{CDCC}} \rangle$$

離散状態と連続状態のoverlap

(平滑化関数):  $f_i(k_\beta)$

この考え方は、PS法にも適用可能。

## 平滑化関数( $\Delta v$ 法の場合)

規格化係数  $\hat{\varphi}_i(r) = \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_i}^{k_i + \Delta k} \varphi(k, r) dk$

$$\int \varphi^*(k, r) \varphi(k', r) dr = \delta(k' - k)$$

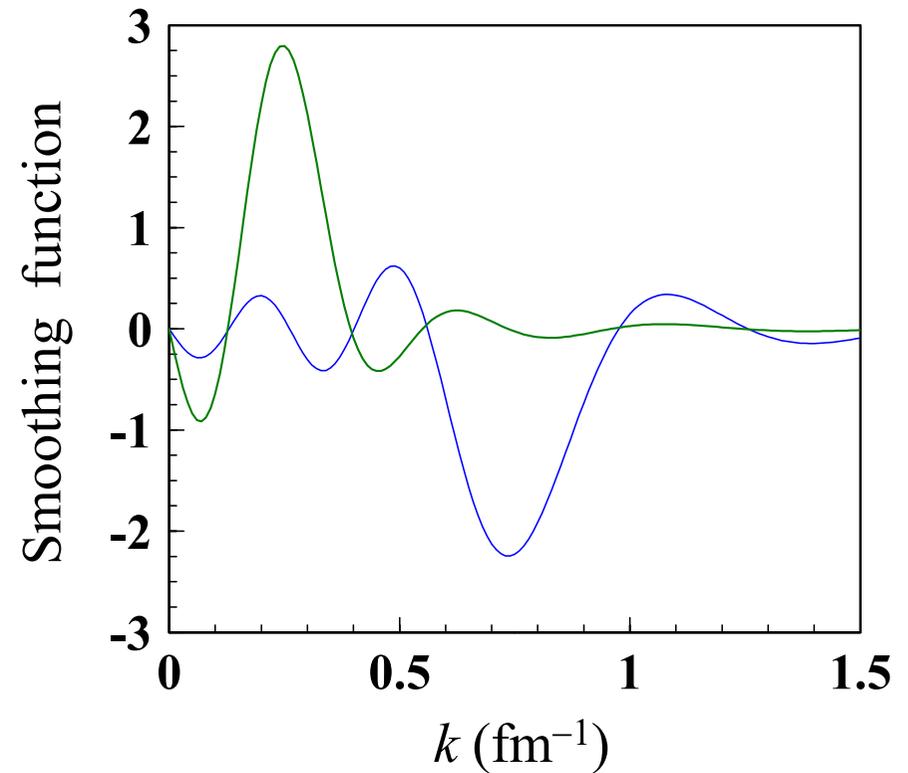
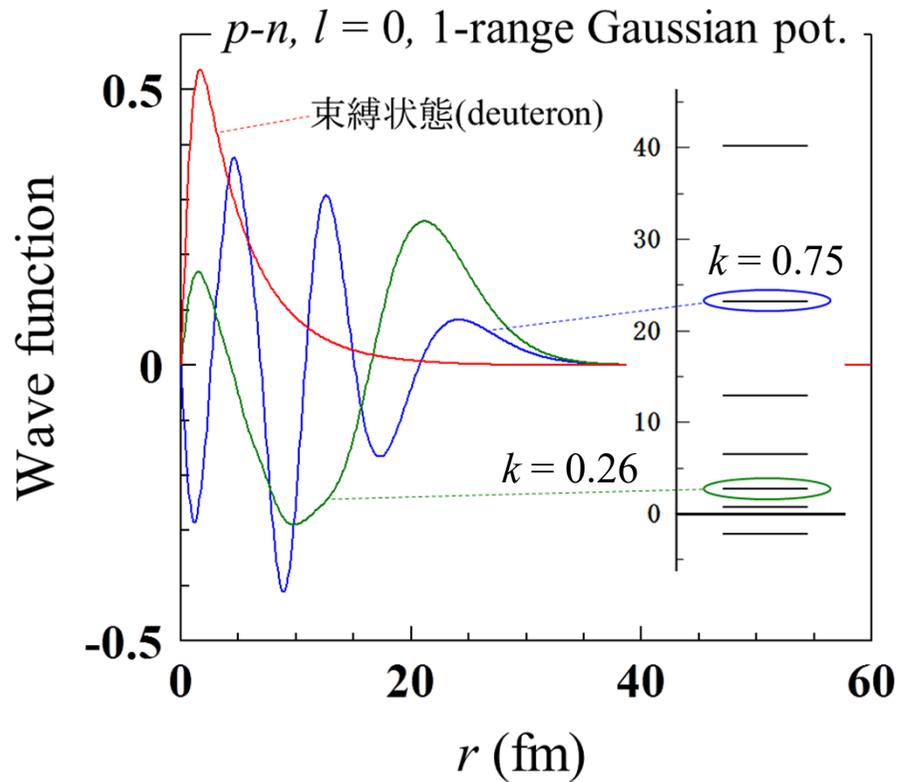


$$f_i(k) = \int \varphi^*(k, r) \hat{\varphi}_i(r) dr$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int dr \int_{k_i}^{k_i + \Delta k} dk' \varphi^*(k, r) \varphi(k', r)$$

通常の処方と同じ答

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_i}^{k_i + \Delta k} dk' \delta(k' - k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} & (k_i < k < k_i + \Delta k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

# 平滑化関数(PS法)

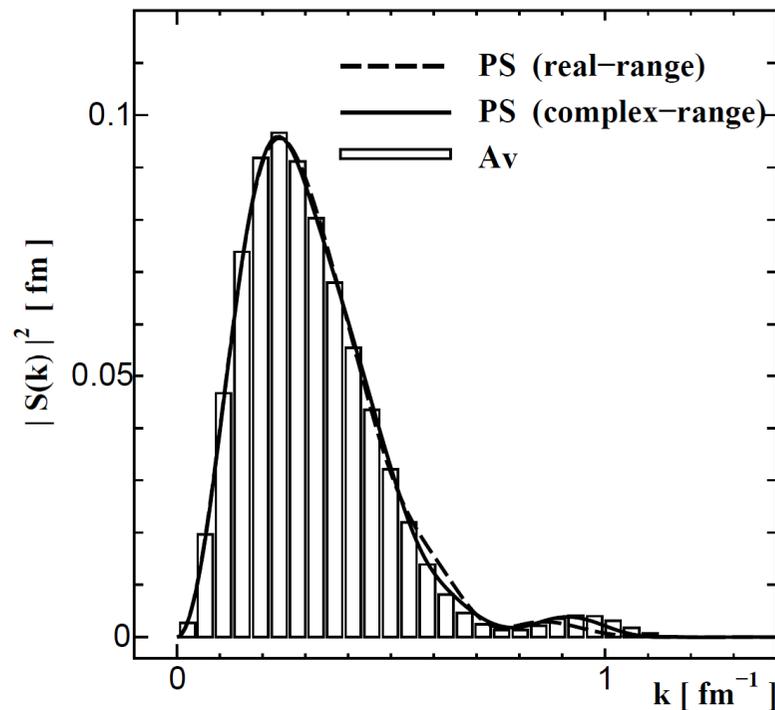


固有値に対応する  $k$  にピークを持つが、有意の広がりを持つ。

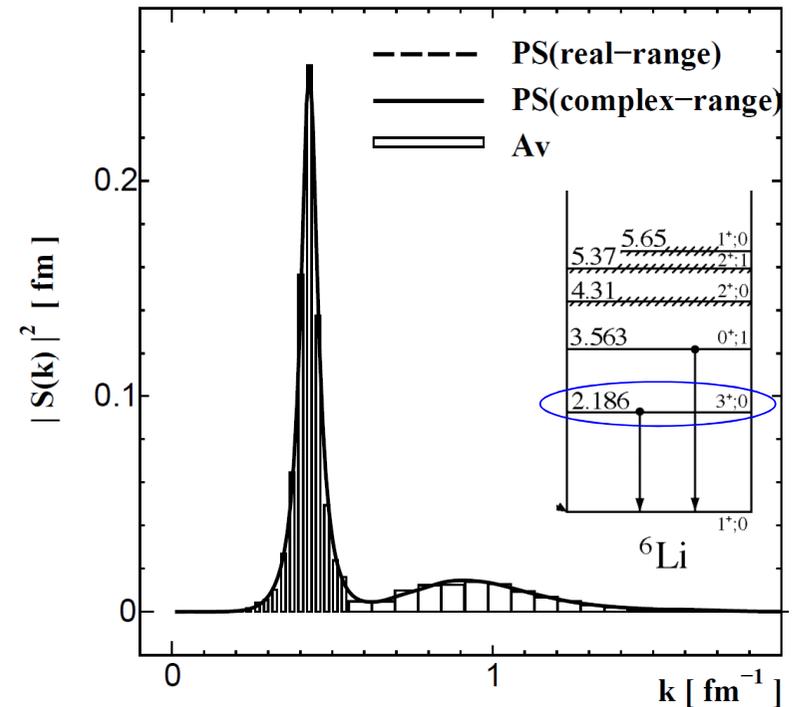
# 平滑化の実例(A<sub>v</sub>法 vs PS法)

T. Matsumoto, Kamizato, O, Iseri, Hiyama, Kamimura, Yahiro, Phys. Rev. C **68**, 064607 (2003).

$d+^{58}\text{Ni}$  at 80 MeV



$^6\text{Li}+^{40}\text{Ca}$  at 156 MeV



平滑化した遷移強度は両者で極めて良く一致。

# CDCCの“汎用”コード

CDCC のコード(重陽子入射版)は

<http://www.nt.phys.kyushu-u.ac.jp/CDCC/index.html>

で公開中。

- 計算の骨格は汎用的。少し書き換えれば一般の2クラスター系の反応に適用可能。
- 公開されているマニュアルは、実はCDCCの基礎勉強の良いテキスト(通常省略されることが多い角運動量の足が正確に扱われている)。
- 青木保夫氏(理研)が開発した `ctak`, `hctak` や Ian Thompson氏(Lawrence Livermore)が開発した `Fresco` がwebから入手可能。

# CDCCの概観および理論的基盤のまとめ

CDCC は

- 分解反応を非摂動的に記述する反応模型である。
- exact な反応理論である(歪曲波) Faddeev 理論の第0近似であり、高次の補正は極めて小さい。
- 適切に限定された模型空間の中で構築された反応論である。
- 弱束縛系の分解を取り扱う、実効的かつ高精度の反応模型として高い成功を収めている。

Review papers

*M. Kamimura, Yahiro, Iseri, Sakuragi, Kameyama, Kawai, Prog. Theor. Phys. Suppl. 89 (1986), 1.*

*N. Austern, Iseri, Kamimura, Kawai, Rawitscher, Yahiro, Phys. Rep. 154 (1987), 125.*

*M. Yahiro, O, Matsumoto, Minomo, Prog. Theor. Exp. Phys. 2012, 01A206 (2012).*

# この講義で伝えたかったこと

- 研究目的に見合った**模型空間**を設定することの意味と価値。
- 反応確率ではなく**断面積**を使う理由。
- **アイコンール近似**を使えばごく簡単に散乱問題が解けるということ。
- 複素光学ポテンシャルの**起源**。
- 波束の理論を用いた**定常散乱波の正当性**の証明。
- **多重散乱理論**に基づく微視的反応理論とその活躍。
- **模型空間の中での厳密3体反応理論**という考え方。*l*-truncationの有効性こそが**CDCCの理論的基盤**(連続状態の離散化はまた**別の話**)。
- 研究対象の**拡大**と物理の**理解**をもたらす**近似(模型)**は偉大。  
(ただし近似の**基盤**と**適用限界**は把握しておく必要あり。)